

УДК 530.182

К ТЕОРИИ АМПЛИТУДНО-ФАЗОВОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ МОД В ЭЛЕКТРОННЫХ МАЗЕРАХ

В. Е. Запелов, Г. С. Нусинович

Развита теория амплитудно-фазового взаимодействия двух мод в электронном лазере, обладающем как активной, так и реактивной нелинейностью. Рассмотрен гиротрон, в котором подобная ситуация может иметь место при взаимодействии мод, различающихся только продольной структурой. Показано, что благодаря этому эффекту в гиротроне возбуждение колебаний моды с одной продольной вариацией сопровождается появлением слабых пульсаций моды с двумя вариациями.

Введение. Проблеме взаимодействия мод в электронных лазерах с развитым пространством взаимодействия в последние годы уделяется все большее внимание (см., например, [1-4]). При этом случай двух мод обычно исследуется в условиях их чисто амплитудного (несинхронного) взаимодействия, что имеет место [1], когда выполняется либо условие азимутальной ортогональности мод

$$n_1 m_2 \neq n_2 m_1 \quad (1)$$

(здесь $m_{1,2}$ — азимутальные индексы мод круглого цилиндрического резонатора, $n_{1,2}$ — номера резонансных с этими модами гармоник частоты колебаний электронов во внешних статических полях ω_0), либо условие значительного разнеса частот их синхронных гармоник

$$|n_1 \omega_2 - n_2 \omega_1| \gg \omega/Q, \quad (2)$$

позволяющее провести в уравнениях для амплитуд мод, изменяющихся за характерные времена порядка Q/ω (Q — добротность колебаний), усреднение по быстро меняющейся (с периодом $2\pi/|n_1 \omega_2 - n_2 \omega_1|$) разности фаз.

Условия (1), (2) выполняются в большинстве ситуаций, встречающихся на практике. Тем не менее есть по крайней мере два случая, когда эти условия не выполняются и может иметь место амплитудно-фазовое взаимодействие двух мод. Первым случаем является взаимодействие мод, различающихся только продольными индексами ($n_1 = n_2$, $m_1 = m_2$). Если речь идет о взаимодействии мод, возбуждающихся в отрезке открытого волновода длиной L вблизи критической частоты $\omega_{кр}$, то разнос частот мод с одной и двумя продольными вариациями, как легко оценить, составляет величину

$$\omega_2 - \omega_1 \approx \frac{3}{8} \left(\frac{\lambda}{L} \right)^2 \omega_{кр},$$

в то же время ширина резонансных кривых мод, определяемая их минимальной дифракционной добротностью $Q_{диф}^{min} \approx (25/q^2) (L/\lambda)^2$ [5], равняется для моды с одной продольной вариацией ($q=1$)

$$\frac{\omega}{Q_{диф}^{min}} \approx \frac{\omega}{25} \left(\frac{\lambda}{L} \right)^2,$$

для моды с двумя вариациями ($q=2$) —

$$\frac{\omega}{Q_{\text{диф}2}^{\text{min}}} \approx \frac{4\omega}{25} \left(\frac{\lambda}{L}\right)^2,$$

т. е. эти величины одного порядка и, следовательно, условие (2) не выполняется. Если с целью смещения оптимума КПД в область больших токов — увеличения мощности излучения — принимают специальные меры по снижению добротности резонаторов, то это еще усиливает перекрытие резонансных кривых подобных мод.

Другим случаем является взаимодействие симметричных мод, возбуждающихся на разных гармониках частоты осцилляций электронов. Поскольку $m_1=m_2=0$, то условие (1) в данном случае не выполняется всегда, а условие (2), например, при взаимодействии мод $TE_{0,p,1}$ ($n_1=1$) и $TE_{0,2p,q>1}$ ($n_2=2$) может не выполняться уже при $p \geq 3$.

В настоящей работе случай амплитудно-фазового взаимодействия двух мод исследуется сначала аналитически на примере достаточно общей и простой модели электронного мазера, после чего рассматриваются аналогичные процессы в квазилинейной модели мазера на циклотронном резонансе с однородной продольной структурой ВЧ поля в области резонатора. Завершают статью результаты численного исследования амплитудно-фазового взаимодействия двух мод, обладающих различной продольной структурой, в гиротроне.

Двухмодовый электронный мазер. Динамику электронного мазера с амплитудно-фазовым взаимодействием двух мод можно описывать системой уравнений для амплитуд обеих мод $F_{1,2}$ и разностной фазы $\psi = n_1\psi_2 - n_2\psi_1$ (ср. [1]):

$$\frac{dF_1}{dt} = \left(-\frac{n_1}{2Q_1} + I_1 \hat{\Phi}'_1\right) F_1, \quad (3)$$

$$\frac{dF_2}{dt} = \left(-\frac{n_2}{2Q_2} + I_2 \hat{\Phi}'_2\right) F_2,$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{n_1 \omega'_2 - n_2 \omega'_1}{\omega_0} + I_2 \hat{\Phi}''_2 - I_1 \hat{\Phi}''_1.$$

Здесь безразмерное время t нормировано на опорную частоту ω_0 , ω'_s — действительные части собственных частот мод, параметры тока $I_{1,2}$ пропорциональны произведению тока пучка на импедансы связи электронов с полями мод, комплексные величины $\hat{\Phi}_{1,2} = \hat{\Phi}'_{1,2} + i\hat{\Phi}''_{1,2}$ характеризуют комплексную мощность взаимодействия электронного пучка с полями резонансных мод и могут быть определены в результате интегрирования уравнений движения электронов, что будет сделано ниже.

При рассмотрении двух мод с близкими резонансными кривыми, ширина которых мала по сравнению с шириной зоны самовозбуждения, определяемой временем пролета электронов через резонатор T .

$$\frac{\omega}{Q} \ll \Delta\omega_{\text{св}} \sim \frac{\pi}{T}, \quad (4)$$

можно считать, что за время пролета электронов суммарное ВЧ поле $F_{\Sigma} = F_1 f_1(\zeta) e^{i\psi_1} + F_2 f_2(\zeta) e^{i\psi_2}$ (функции $f_{1,2}(\zeta)$ описывают продольную структуру мод) не успевает существенно измениться. По этой причине оказывается возможным сначала проинтегрировать уравнения движения электронов в квазистационарном поле F_{Σ} и вычислить текущие значения $\hat{\Phi}_s$, а затем исследовать «медленные» процессы взаимодей-

вия мод в пространстве переменных системы уравнений (3) F_1, F_2, ψ .

Для простоты рассмотрим сначала модельную задачу, полагая продольные структуры обеих мод одинаковыми и считая, что генератор находится в зоне мягкого самовозбуждения, где при не слишком большой величине поля F_2 в выражении для $\hat{\Phi}_s$ можно ограничиться учетом кубичной нелинейности. В тех случаях, когда условия (1), (2) не выполняются и справедливо условие (4), это приводит к следующим выражениям для $\hat{\Phi}_s$:

$$\begin{aligned}\hat{\Phi}_1 &= \left(1 + \frac{F_2}{F_1} e^{i\psi}\right) [\alpha - \beta (F_1^2 + F_2^2 + 2F_1 F_2 \cos \psi)], \\ \hat{\Phi}_2 &= \left(1 + \frac{F_1}{F_2} e^{-i\psi}\right) [\alpha - \beta (F_1^2 + F_2^2 + 2F_1 F_2 \cos \psi)].\end{aligned}\quad (5)$$

Здесь комплексные коэффициенты α и β характеризуют соответственно линейные и нелинейные свойства генератора и определяются [6] продольной структурой мод и их положением в зоне самовозбуждения.

Полагая параметры тока и добротности мод одинаковыми, $I_1 = I_2 = I$, $Q_1 = Q_2 = Q$, вводя $\tau = \delta I \omega_0 t$ ($\delta = (\omega'_2 - \omega'_1) / \omega_0$), $r = (2IQ\delta)^{-1}$, $\tilde{\alpha} = \alpha / \delta$, $\tilde{\beta} = \beta / \delta$ и обозначая через χ величину $\tilde{\alpha} - \tilde{\beta} (F_1^2 + F_2^2 + 2F_1 F_2 \cos \psi)$ (знак \sim у α и β ниже опустим), из уравнений (3) и выражений (5) получаем упрощенную систему уравнений:

$$\begin{aligned}\frac{dF_1}{d\tau} &= (F_1 + F_2 \cos \psi) \chi' - F_2 \chi'' \sin \psi - r F_1, \\ \frac{dF_2}{d\tau} &= (F_2 + F_1 \cos \psi) \chi' + F_1 \chi'' \sin \psi - r F_2, \\ \frac{d\psi}{d\tau} &= 1 - \frac{F_1^2 + F_2^2}{F_1 F_2} \chi' \sin \psi + \frac{F_1^2 - F_2^2}{F_1 F_2} \chi'' \cos \psi.\end{aligned}\quad (6)$$

В простейшем случае, когда положение мод в зоне самовозбуждения таково, что мнимой частью χ можно пренебречь ($\chi'' = 0$), система уравнений (6) определяет нулевое состояние равновесия

$$F_1 = F_2 = 0, \quad \sin \psi_0 = 1/2\alpha', \quad (7)$$

симметричное состояние равновесия

$$F_1^2 = F_2^2 = \frac{1 + 4r^2}{16\beta' r^2} \left(\alpha' - \frac{1 + 4r^2}{8r} \right), \quad (8)$$

$$\cos \psi_0 = \frac{4r^2 - 1}{4r^2 + 1}, \quad \sin \psi_0 = \frac{4r}{4r^2 + 1}$$

и несимметричное состояние равновесия

$$F_1^2 = \frac{\alpha' - r}{2\beta'} [1 \pm \sqrt{1 - 4r^2}], \quad F_2^2 = \frac{\alpha' - r}{2\beta'} [1 \mp \sqrt{1 - 4r^2}], \quad \psi_0 = \frac{\pi}{2}. \quad (9)$$

Из двух различающихся по фазе нулевых состояний равновесия (7) устойчивым относительно изменения фазы является состояние с $\cos \psi_0 = \sqrt{1 - (4\alpha'^2)^{-1}}$. Условие его неустойчивости относительно $F_{1,2}$

(условие самовозбуждения генератора) имеет вид

$$\alpha' > (1 + 4r^2)(8r)^{-1},$$

что совпадает с условием существования симметричного состояния равновесия (8). В свою очередь, условиями устойчивости симметричного состояния (8) являются

$$r > \frac{1}{2}, \quad \alpha' > \frac{4r^2 + 3}{16r}. \quad (10)$$

Когда нарушается первое из условий (10), т. е. при $r = 1/2$, в системе рождаются устойчивые несимметричные состояния равновесия (9), а нарушение второго из условий (10) превращает симметричное состояние (8) в неустойчивый узел (или фокус).

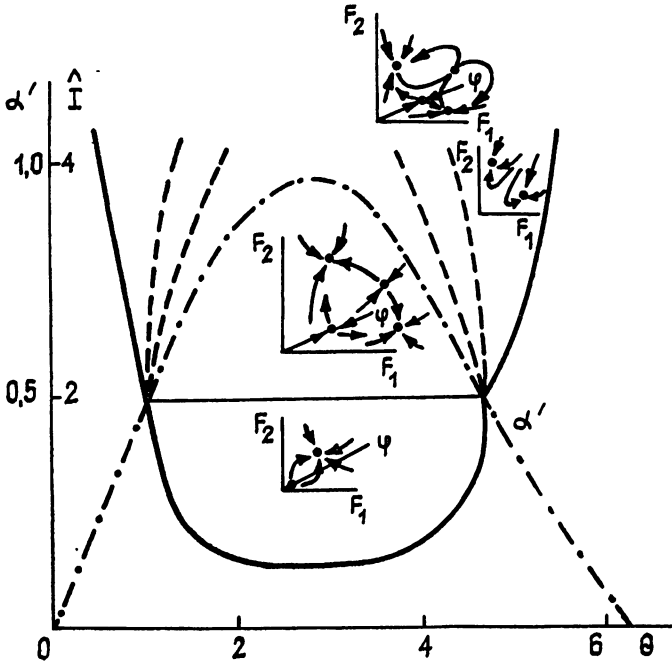


Рис. 1.

В качестве примера на рис. 1 показано разбиение традиционной плоскости «ток пучка — угол пролета электронов» на зоны с различной динамикой, построенные для МЦР-монотрона с однородной вдоль оси резонатора продольной структурой ВЧ поля. Здесь угол пролета $\theta = (\omega - \omega_{H_0})T$ определяется расстройкой циклотронного резонанса (ω_{H_0} — циклотронная частота электронов на входе в систему), коэффициент α' в пренебрежении эффектами группировки типа «М» равен

$$\alpha' = \mu\theta^{-3} [2(1 - \cos \theta) - \theta \sin \theta],$$

величина параметра неизохронности μ взята оптимальной по КПД [7], $\mu = 7.5$. Параметром тока служит величина $\hat{I} = 1/r = 2IQ\delta$. Кривая, показанная на рис. 1 сплошной линией, а при $\hat{I} > 2$ — штриховой, соответствует условию существования симметричного состояния равновесия (при $\hat{I} \leq 2$ — условию самовозбуждения). Внутренняя штриховая граница определяет границы зоны, внутри которой выполняется второе из условий (10). Показанные при $\hat{I} > 2$ сплошными линиями кривые определяют границу области существования несимметричных состояний равновесия $\alpha' = r$.

Заметим, что с увеличением расстройки частот мод δ величина r стремится к нулю. При этом несимметричные состояния равновесия (9) приближаются к осям F_1, F_2 т. е. система переходит к случаю чисто амплитудного (несинхронного) взаимодействия мод [1, 6] при их «сильной» связи, когда устойчивыми являются одномодовые состояния равновесия любой из мод в зависимости от начальных условий.

Электронный мазер с реактивной нелинейностью. При произвольном положении частот мод в зоне самовозбуждения действительная и мнимая части комплексных величин $\Phi_{1,2}$ (5) являются величинами одного порядка. Входящие в $\Phi_{1,2}$ коэффициенты α и β для электронного мазера с произвольной продольной структурой ВЧ поля определены в [6]. Для МЦР-монотрона с однородной продольной структурой ВЧ поля соответствующие графики зависимости коэффициентов α и β от угла пролета приведены в [8].

С учетом этих зависимостей система уравнений (6) интегрировалась численно при $\mu=7,5$, $\delta=10^{-2}$ ($\tilde{\alpha}\sim\mu/\delta$, $\tilde{\beta}\sim\mu^3/\delta$) и различных значениях угла пролета θ и коэффициентов $r_{1,2}=(2\delta I_{1,2} Q_{1,2})^{-1}$, различающихся в случае мод с разной добротностью ($Q_1\neq Q_2$) или импедансом связи ($I_1\neq I_2$).

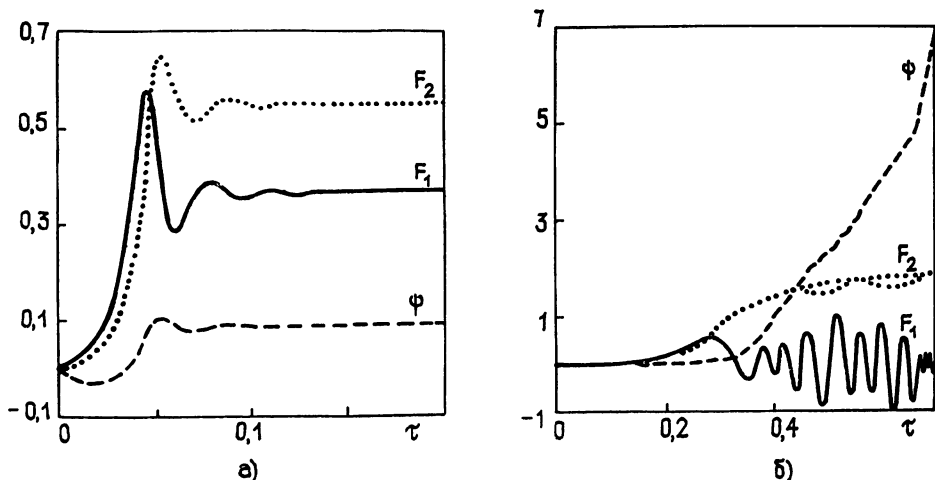


Рис. 2.

При малой «надпороговости» (больших значениях r), как и в рассмотренном выше случае, нестационарные процессы завершаются установлением режима взаимной синхронизации мод; при большой «надпороговости» — установлением близких к одномодовым колебаний после достаточно сложного переходного процесса. В качестве примера на рис. 2 показаны процессы (а) — установления режима взаимной синхронизации мод при $\theta=3,6$, $r_2=4r_1$, $r_1=40$ (соотношение $r_2=4r_1$ соответствует случаю взаимодействия мод с одной и двумя продольными вариациями), (б) — выхода на режим, близкий к одномодовой генерации, при $r_1=10$ и тех же прочих параметрах (при больших τ осцилляции F_1 затухают). Соответствующие портреты системы на плоскости амплитуд F_1, F_2 показаны на рис. 3а. На рис. 3б изображен аналогичный процесс на плоскости F_1, F_2 при $\theta=3$, $r_2=r_1=10$. В точках поворота (см. рис. 3б), т. е. там, где F_2 принимает минимальное значение, фаза ψ резко меняется примерно на π^* . В конечном счете, однако, система оказывается вблизи оси F_2 , где амплитуда первой моды очень

* Соответствующий портрет системы в фазовом пространстве F_1, F_2, ψ близок к полученному в [9] при рассмотрении взаимодействия двух волн в нелинейной активной среде в случае связи волн на периодической пространственной модуляции диэлектрической постоянной среды.

мала и взаимная синхронизация мод невозможна. При этом фаза начинает линейно меняться со временем и устанавливаются практически одномодовые колебания второй моды.

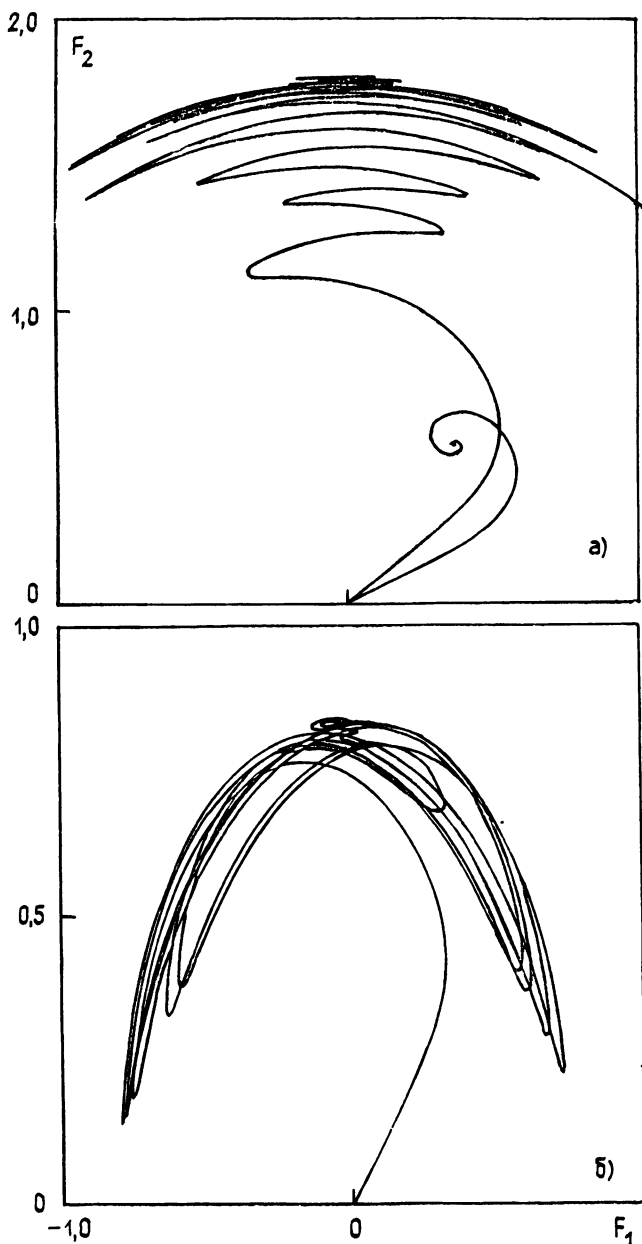


Рис. 3.

Гиротрон с модами, различающимися продольной структурой.
 В наиболее перспективной разновидности МЦР — гиротроне — рассматриваемая ситуация, как отмечалось во Введении, может складываться при взаимодействии мод, различающихся только продольной структурой. Будем считать, что первая мода имеет одну продольную вариацию поля, а вторая — две и, соответственно, функции, описывающие эти распределения, могут быть заданы в виде $f_1 = \sin(\pi z/L)$, $f_2 = \sin(2\pi z/L)$.

Численное исследование гиротрона с такой структурой ВЧ полей было проведено с помощью самосогласованной системы уравнений, включающих в себя наряду с уравнениями возбуждения ВЧ поля (3)

уравнение движения электронов в поле многомодового резонатора [1]

$$\frac{da}{d\zeta} - i(\Delta + |a|^2 - 1)a = i \left\{ \sum_s a^{n_s-1} F_s f_s \exp[i(\psi_s - n_s \vartheta_0)] \right\}^* \quad (11)$$

с граничным условием на входе в пространство взаимодействия $a(\zeta_{\text{вх}}) = 1$ и выражение, определяющее величину $\hat{\Phi}_s$ ($s=1, 2$) [1],

$$\hat{\Phi}_s = -\frac{i}{F_s} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \int_{\zeta_{\text{вх}}}^{\zeta_{\text{вых}}} a^{n_s} f_s^* \exp[-i(\psi_s - n_s \vartheta_0)] d\zeta \right\} d\vartheta_0. \quad (12)$$

Здесь $\Delta = \frac{2}{\beta_{\perp 0}^2} \frac{\omega - \omega_{H_0}}{\omega_{H_0}}$ — приведенная расстройка циклотронного резонанса,

$\omega = \omega_1/n_1$ — опорная частота, $\zeta = (\beta_{\perp 0}^2/2\beta_{\parallel}) (\omega_{H_0} z/c)$ — приведенная продольная координата, $\beta_{\perp, \parallel}$ — невозмущенные компоненты скорости электронов, нормированные на скорость света, комплексная величина a характеризует поперечный импульс электронов $a = (p_x - ip_y) p_{\perp 0}^{-1} e^{i\omega t}$, ϑ_0 — фаза влета электронов в пространство взаимодействия, которая в каждый фиксированный момент времени может отсчитываться относительно фазы первой моды ψ_1 : $\vartheta_0 = \vartheta_0 - n_1 \psi_1$; при этом в (11), (12) можно считать $\psi_1 = 0$ и $\psi_2 = \psi$, т.е. разностной фазой, определяемой последним уравнением системы (3). Заметим, что в отличие от [1] выражение для $\hat{\Phi}_s$ (12) в нашем случае не содержит усреднения по ψ , поскольку рассматривается синхронное взаимодействие мод.

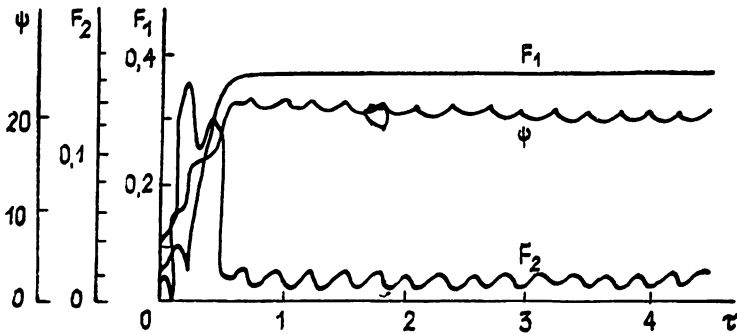


Рис. 4.

С целью уменьшения числа параметров переменные системы уравнений (3) нормировались на добротность первой моды, т.е. вводились

$\tau = \omega t/2Q_1$, $\hat{I} = 2I_1 Q_1$, $\delta = 2Q_1(\omega'_2 - \omega'_1)\omega^{-1}$. Численное исследование нестационарных процессов, проведенное для мод, резонансных с первой гармоникой циклотронной частоты, при $\delta = 20$ (что примерно соответствует разнотности частот мод с одной и двумя продольными вариациями), $\zeta_h = (\beta_{\perp 0}^2/2\beta_{\parallel}) (\omega_{H_0} L/c) = 10$, $Q_1 = 4Q_2$ и различных значениях

расстройки циклотронного резонанса Δ и параметра тока \hat{I} показало, что эти процессы завершаются установлением колебаний высокодобротной (первой) моды, которые сопровождаются пульсациями низкодобротной (второй) моды и разностной фазы ψ . В качестве примера на рис. 4 показаны переходные процессы в гиротроне с параметрами $\Delta = 0,6$, $I_1 Q_1 = 1$. Как и следовало ожидать, характерное время переходных процессов $\tau \sim 1$ соответствует размерному времени $t \sim 2Q_1/\omega$, частота пульсаций амплитуды второй моды и разностной фазы соответствует разнотности собственных частот мод.

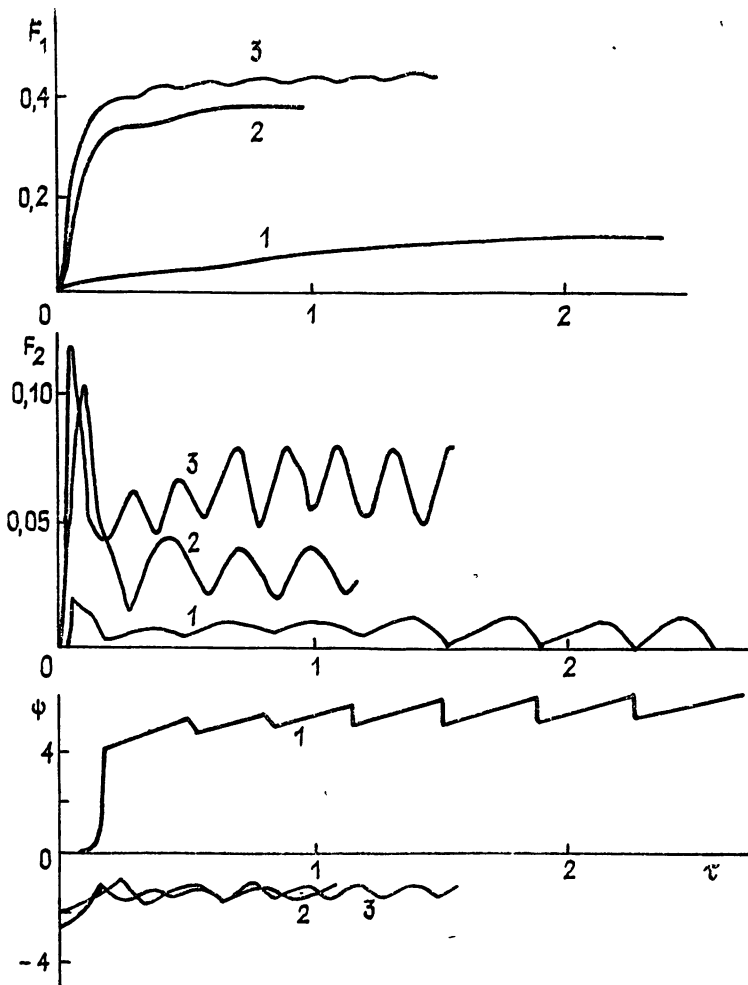


Рис. 5.

Динамика гиротрона при расстройке циклотронного резонанса, соответствующей низким стартовым токам ($\Delta=0,3$), показана на рис. 5 для различных токов пучка (1 — $I_1 Q_1=0,05$, 2 — $I_1 Q_1=1$, 3 — $I_1 Q_1=2$). Как видно из рис. 5, с ростом тока растут амплитуды обеих мод и амплитуда пульсаций второй моды, при этом период пульсаций сокращается из-за увеличения электронного смещения частот мод.

Динамика гиротрона при взаимодействии мод, резонансных с разными гармониками циклотронной частоты, показана на рис. 6, где приведены результаты расчетов при $I_1 Q_1=0,1$, $I_2 Q_2=0,05$, $\Delta=0,6$, $n_1=1$, $n_2=2$ и разных значениях взаимной расстройки частот мод δ (а) — $\delta=0$, б) — $\delta=1$, в) — $\delta=-1$, г) — $\delta=5$). Как следует из рис. 6, взаимная синхронизация мод имеет место в интервале расстроек $|\delta| \leq 1$, а при больших расстройках, как и в рассмотренном выше случае, устанавливаются колебания первой моды, сопровождающиеся пульсациями амплитуды второй моды и разностной фазы. То обстоятельство, что при отрицательной расстройке $\delta=-1$ (рис. 6в) время переходного процесса существенно превышает полученное для $\delta=1$ (рис. 6б), соответствует попаданию второй моды в зону относительно низких стартовых токов (если расстройку $\delta=-1$ представить в том же масштабе, что и Δ , то взаимная расстройка частот мод $\tilde{\Delta} = (2/\beta_{10}^2)(\omega'_2 - 2\omega'_1)\omega_{H_0}^{-1}$ при $\beta_{10}^2 = 0,07$ и $Q_1=625$, например, равна $\tilde{\Delta} \simeq -0,23$). В такой ситуации более явно выражены эффекты конкуренции мод, затрудняющие установле-

ние режима взаимной синхронизации мод, в то время как при $\delta = 1$ вторая мода может оказаться в условиях нелинейного возбуждения [10], когда первая мода способствует возбуждению второй.

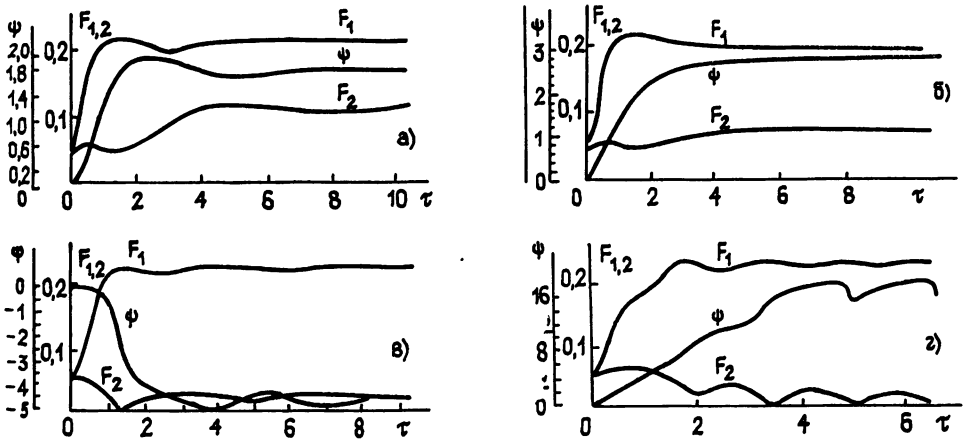


Рис. 6.

Разнос собственных частот мод, различающихся только продольной структурой, в случае мод с одной и двумя продольными вариациями настолько велик по сравнению с шириной их резонансных кривых, что фазовое взаимодействие мод приводит только к тому, что к автоколебаниям основной моды добавляются относительно слабые пульсации второй моды. Этот эффект, сопровождающийся уширением линии излучения, может оказаться существенным для гиротронов, предназначенных для активной диагностики плазмы, где основную роль играет изменение ширины линии, обусловленное томсоновским рассеянием падающего СВЧ излучения на плазменных колебаниях (см., например, [11]).

Авторы признательны А. Л. Шаровой за помощь в проведении расчетов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Моисеев М. А., Нусинович Г. С. // Изв. вузов. Радиофизика. 1974. Т. 17. № 11. С. 1709.
2. Dialetis D., Chu K. R. *Infrared and Millimeter Waves*. — New York: Academic Press. 1983. V. 7. P. 537.
3. Kreischer K. E. et al. // IEEE. 1984. V. MTT-32. № 5. P. 481.
4. Min Zhu, Döring H. // Int. J. Inf. Millimeter Waves. 1986. V. 7. № 4. P. 653.
5. Власов С. Н. и др. // Изв. вузов. Радиофизика. 1969. Т. 12. № 8. С. 1236.
6. Зарницына И. Г., Нусинович Г. С. // Изв. вузов. Радиофизика. 1975. Т. 18. № 2. С. 303.
7. Гапонов А. В., Петелин М. И., Юлпатов В. К. // Изв. вузов. Радиофизика. 1967. Т. 10. № 9—10. С. 1414.
8. Нусинович Г. С. // Изв. вузов. Радиофизика. 1985. Т. 28. № 10. С. 1323.
9. Рабинович М. И. // Изв. вузов. Радиофизика. 1974. Т. 17. № 4. С. 477.
10. Зарницына И. Г., Нусинович Г. С. // Изв. вузов. Радиофизика. 1977. Т. 20. № 3. С. 461.
11. Woskoboynikow P., Cohn D. R., Temkin R. J. // Int. J. Inf. Millimeter Waves. 1983. V. 4. № 2. P. 205.

Институт прикладной физики
АН СССР

Поступила в редакцию
6 апреля 1987 г.

ON THE THEORY OF PHASE-AMPLITUDE MODE INTERACTION IN ELECTRON MASERS

V. E. Zapevalov, G. S. Nusinovich

The theory of phase-amplitude two-mode interaction is developed for the electron maser with real and imaginary nonlinearities. Such a situation can take place in gyrotrons for modes differing in the axial structure only. It is shown that due to this effect the excitation of the gyrotron mode with one axial variation can be supplemented with weak pulsations of the mode with two axial variations.