УДК 537.874.6

НОВЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ В ТЕОРИИ ОТКРЫТЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ НАПРАВЛЯЮЩИХ СТРУКТУР

Ю. К. Сиренко

Описаны и проанализированы эффект существования поверхностных волн в «запрещенной» зоне и явление междутиповой связи собственных волн в открытых одномерно-периодических направляющих структурах.

Введение. Определим собственные волны $U(y, z, \Phi)$ одномерно-периодической решетки (рис. 1а) как нетривиальные решения краевой задачи

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \varkappa^2 \varepsilon(y, z)\right] U(y, z, \Phi) = 0, \ \varkappa > 0, \ g = \{y, z\} \in R; \tag{1}$$

$$U(g, \Phi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \begin{Bmatrix} a_n \\ b_n \end{Bmatrix} \exp\{i[\Phi_n y \pm \Gamma_n (z \mp 2\pi\delta)]\}, \quad z \gtrless \pm 2\pi\delta; \tag{2}$$

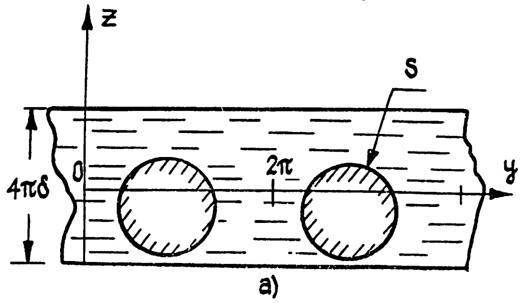
$$U\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial U}{\partial y} \end{Bmatrix}(2\pi, z, \Phi) = \exp(i2\pi\Phi)\, U \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial U}{\partial y} \end{Bmatrix}(0, z, \Phi), \tag{3}$$

удовлетворяющие обычным для электромагнитного поля граничным условиям на поверхности S идеально проводящих металлических образующих решетки и поверхностях разрыва $\varepsilon(y, z)$ — относительной диэлектрической проницаемости слоя, в который она помещена. Здесь $R = \{g = \{y, z\} : 0 \leqslant y \leqslant 2\pi, |z| < \infty\} \setminus \mathrm{int}\, S$; $U(g, \Phi) = E_x$ — в случае E-поляризации поля и $U(g, \Phi) = H_x$ — в H-случае; E_x, H_x — компоненты векторов напряженности электрического и магнитного полей; $\Phi_n = n + \Phi$, $\Gamma_n = (\varkappa^2 - \Phi_n^2)^{1/2}$; $\varkappa = \omega/c$ — частотный параметр; c — скорость света в окружающем решетку пространстве, $\mathrm{Im}\, c = 0$; зависимость от времени определяется множителем $\exp(-i\omega t)$. Комплексная, кусочно-гладкая (в H-случае — кусочно-постоянная) функция $\varepsilon(y, z)$ с $\mathrm{Re}\, \varepsilon > 0$ и $\mathrm{Im}\, \varepsilon \geqslant 0$ периодична по координате y и тождественно равна единице в зонах излучения решетки $|z| > 2\pi\delta$. Область изменения спектрального параметра Φ (постоянной распространения собственной волны в случае, когда задача (1)—(3) нетривиальным образом разрешима) совпадает с римановой поверхностью F аналитического продолжения с действительной оси $\mathrm{Im}\, \Phi = 0$ канонической функции Грина:

$$G_0(g, g_0, \Phi) = \frac{i}{4\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\{i[\Phi_n (y - y_0) + \Gamma_n |z - z_0|]\} \Gamma_n^{-1}; \tag{4}$$

$$\mathrm{Im}\, \Gamma_n(\Phi) \geqslant 0, \quad \mathrm{Re}\, \Gamma_n \geqslant 0, \quad n = 0, \pm 1, \ldots \tag{5}$$

Ограничения (5) связаны с физически обоснованным (для действительной оси первого листа F) требованием отсутствия среди парциальных составляющих (4) плоских волн, приходящих из $|z| = \infty$,



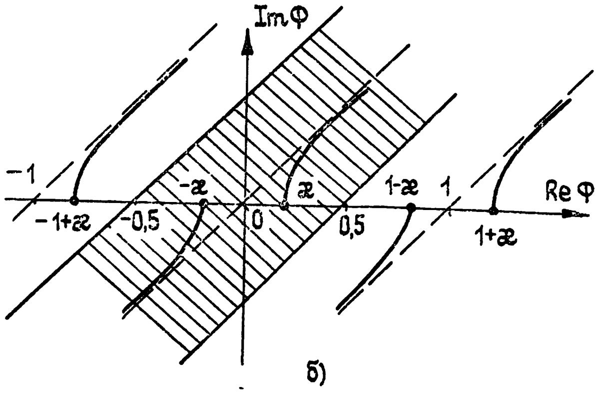


Рис. 1.

Риманова поверхность F бесконечнолистна [1], точки ветвления второго порядка $\Phi_n^{\mp}(\Gamma_n(\Phi_n^{\mp})=0)$ действительны. Условия (5) определяют четверти плоскостей $\mathrm{Re}\,(n+\Phi)$, $\mathrm{Im}\,\Phi$, в которых должны пройти разрезы, отвечающие $\Gamma_n(\Phi)$. Не существует физически обоснованных критериев, определяющих конфигурацию разрезов (наш выбор представлен на рис. 1б), но при постановке задачи на полной поверхности эта неопределенность компенсируется тем, что все возможные ситуации, описываемые значениями наборов $\{\Phi;\ \Gamma_n(\Phi),\ n=0, \pm 1, \ldots\}$, исчерпываются. Собственные волны решетки в зависимости от положения собственной постоянной распространения Φ на поверхности F (в зависимости от значения набора $\{\Phi;\ \Gamma_n(\Phi), n=0, \pm 1 \ldots\}$) формируются группами слагаемых (см. (2)), содержащими волны:

— не приходящие на решетку из $|z|=\infty$, не нарастающие в направлении распространения по z и не затухающие в направлении распространения по y ($\mathrm{Re}\,\Gamma_n \geqslant 0$, $\mathrm{Im}\,\Gamma_n \geqslant 0$, $\mathrm{Re}\,(n+\Phi)\,\mathrm{Im}\,\Phi \leqslant 0$);

— не приходящие, не затухающие по z и не нарастающие по y ($\mathrm{Re}\,\Gamma_n \geqslant 0$, $\mathrm{Im}\,\Gamma_n \leqslant 0$, $\mathrm{Re}\,(n+\Phi)\,\mathrm{Im}\,\Phi \geqslant 0$);

не уходящие, не нарастающие по z и не затухающие по y ($\mathrm{Re}\,\Gamma_n \leqslant 0$, $\mathrm{Im}\,\Gamma_n \leqslant 0$, $\mathrm{Re}\,(n+\Phi)\,\mathrm{Im}\,\Phi \leqslant 0$);

— не уходящие, не затухающие по z и не нарастающие по y ($\mathrm{Re}\,\Gamma_n \leqslant 0$, $\mathrm{Im}\,\Gamma_n \geqslant 0$, $\mathrm{Re}\,(n+\Phi)\,\mathrm{Im}\,\Phi \geqslant 0$).

Таким образом, полная (на поверхности Римана) постановка спектральной задачи с соответствующим образом «продолженными» условиями излучения (2) исключает субъективные элементы, неизбежно появляющиеся при попытках ограничиться простыми, «физическими» областями изменения спектрального параметра Φ, и позволяет анализировать собственные волны любых типов: поверхностные (правильные), поле которых экспоненциально спадает при удалении от решетки; вытекающие с экспоненциально растущим полем; поршневые, поле которых не меняется в направлении, перпендикулярном плоскости структуры.

В данной работе приводятся результаты решения несамосопряженной спектральной краевой задачи (1)—(3) для открытых одномерно-периодических направляющих структур. Учитывая то, что конкретные детали доказательств и структура алгоритмов расчета могут быть легко восстановлены с помощью работ [1, 4–7], посвященных решению аналогичных проблем в случае спектрального параметра $\varkappa$ (свободные колебания поля в одномерно-периодических решетках), мы ограничимся здесь только формулировкой и физическим анализом результатов.

1. Качественные характеристики спектра собственных волн. Отметим прежде всего, что всю информацию о собственных волнах, связанных с собственными значениями Φ, расположенными в произвольном месте поверхности F, можно получить в результате решения задачи (1)—(3) в областях, выделяемых на плоскостях (листах) Φ произвольной полосой (полуполосой, если структура обладает плоскостями симметрии $y = \mathrm{const}$) с шириной по $\operatorname{Re}\Phi$, равной единице. Это связано с тем, что в силу условий квазипериодичности (3) и условий, вытекающих из свойств симметрии, любой собственной волне $U(g, \Phi)$ можно сопоставить волны $U(g, \Phi+p)$, p — целое, и $U(g, -\Phi)$. Один из возможных вариантов выделения полосы для проведения анализа спектральной задачи (1)—(3) показан на рис. 1б.

Следующие результаты являются прямыми следствиями второй формулы Грина и теоремы о комплексной мощности, используемых в областях R и $Q = \{g \in R : |z| \leqslant 2\pi\delta\}$ (область связи зон излучения решетки) [1, 4].

Следствие 1. При $\operatorname{Im}\varepsilon \neq 0$ (существует поглощение энергии поля в материале решетки) действительная ось первого листа F не содержит собственных значений Φ. При $\delta = 0$ (плоские решетки) собственные значения Φ здесь могут совпадать только с точками ветвления $\Phi_n^{\mp}$. Если $\operatorname{Im}\varepsilon \equiv 0$ и $\delta \neq 0$ (идеальная объемная решетка), то все амплитуды a_n, b_n парциальных составляющих поля собственной волны (Φ принадлежит действительной оси первого листа) с номерами n, такими, что $\operatorname{Re}\Gamma_n > 0$, обращаются в нуль. В случае $E(H)$-поляризации энергия электрического поля такой волны в области связи зон излучения всегда больше (меньше) энергии магнитного поля.

Следствие 2. Все собственные волны, собственные числа которых лежат на действительной оси первого листа и не совпадают с точками ветвления, — «правильные». Эти незатухающие вдоль решетки волны могут быть только медленными. Значение

$$\operatorname{Re} P(U, \tilde{y}, \mathbf{y}) = \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} [\mathbf{E}(\tilde{y}, z) \times \mathbf{H}^*(\tilde{y}, z)] \mathbf{y}\, dz,$$

определяющее величину и направление переноса энергии такими волнами, постоянно в любом полном поперечном сечении направляющей структуры. При $\operatorname{Im}\varepsilon \neq 0$ не существует правильных волн, переносящих энергию в положительном (при $\operatorname{Im}\Phi < 0$) и отрицательном (при $\operatorname{Im}\Phi > 0$) направлениях оси y. При $\operatorname{Im}\varepsilon \equiv 0$ не существует правильных «комплексных» волн $\operatorname{Im}\Phi \neq 0$, переносящих энергию вдоль структуры.

Следствие 3 Точки Φ спектра Ω (постоянные распространения собственных волн) связаны в четверки $\{\Phi, -\Phi, \Phi^*, -\Phi^*\}$. Это означает, что вместе с точкой Φ, лежащей, например, на первом листе поверхности F, множеству Ω будут принадлежать точки $-\Phi$, Φ^*, $-\Phi^*$ того же или другого листа. Правильные волны с действительными $U(g, \Phi)$ и $U(g, -\Phi)$ переносят энергию в противоположных направлениях оси y Если $U(g) = \sum_j U(g, \bar{\Phi}_j)$, где $U(g, \Phi_j)$ — правильные волны с действительными волновыми числами, то

$$\operatorname{Re} P(U, \mathbf{y}) = \sum_j \operatorname{Re} P(U(\bar{\Phi}_j), \mathbf{y}),$$

т. е. соответствующие собственные волны ортогональны в энергетическом смысле.

Методами теории потенциала краевая задача (1)—(3) сводится к эквивалентным операторным уравнениям второго рода с вполне непрерывными оператор-функциями параметра $\Phi \in F$. Это позволяет с использованием современных достижений теории мероморфных оператор-функций [8] получить следующие важные качественные характеристики множества собственных постоянных распространения Ω [1, 5, 6].

Предложение 1. Множество Ω решетки с гладкими контурами S поперечного сечения металлических образующих содержит не более чем счетное множество точек, изолированных в любой конечной части поверхности F. С другой стороны, спектр Ω собственных волн такой решетки не пуст, т. е. всегда найдется хотя бы одна точка $\Phi \in F$, в которой задача (1) — (3) нетривиальным образом разрешима.

Сформулированные выше результаты не только качественно характеризуют спектр Ω: они существенно упрощают задачу численного анализа, значительно сокращая зону поиска собственных постоянных распространения и предсказывая особенности динамики их изменения при вариации параметров, создают необходимую основу для построения строгих и эффективных вычислительных процедур [7]. Так, например, связь собственных чисел в четверки (см. следствие 3) означает, что точка $\Phi \in \Omega$ может сойти с действительной оси только после «встречи» с другим собственным числом. В результате две собственные волны с действительными волновыми числами переходят в волны с комплексно-сопряженными постоянными распространения.

Рамки данной работы не позволяют нам подробно остановиться на задачах теории возбуждения открытых периодических волноводов. Отметим только одно следствие из предложения 1, согласно которому любая дифракционная характеристика решетки в поле квазипериодических источников (в поле плоской волны) представляется рядом Лорана по локальным на поверхности F переменным [6]. Такое представление является основой для анализа резонансных и аномальных режимов возбуждения, выяснения роли собственных волн в формировании вторичного поля структуры при облучении ее волнами квазипериодических и компактных в плоскости y, z источников [6].

2. Явление междутиповой связи собственных волн. Хронология изучения этого, до конца еще не исследованного явления открывается работой [9], посвященной анализу «взаимодействия» свободных колебаний в закрытых резонаторах с возмущенной границей. Позднее оно отмечалось как результат «взаимодействия» свободных колебаний и собственных волн, соответственно, в открытых резонаторах с компактной границей [10] и в регулярных открытых линиях передачи [11]. Ниже мы проанализируем явление междутиповой связи собственных волн открытой периодической направляющей структуры. Все представленные численные результаты получены по алгоритмам работы [7], позволяющим быстро и с нужной степенью точности рассчитывать спектральные характеристики решетки волноводного типа (рис. 2) как открытого периодического резонатора (спектральный параметр $\varkappa$) и как открытого периодического волновода (спектральный параметр Φ).

Геометрия структуры, обладающей регулярными каналами связи зон излучения, позволяет ввести в качестве основы для классификации обобщенное понятие «тип волны» (в случае E-поляризации поля, рассматриваемой в дальнейшем, —H_{0nm}), которое включает в себя следующие характеристики: класс симметрии (симметрично или антисимметрично поле относительно ряда плоскостей, определяемых геометрией структуры); семейство (определяется парциальной составляющей H_{0n}, доминирующей в поле собственной волны в области Q); порядковый номер m в данном семействе (определяется числом вариаций поля по высоте регулярной области связи Q). В качестве примера укажем на рис. 2 ($\theta=0{,}8$; $\varepsilon=5$), где в координатах $\varkappa$, δ представлены кривые

$\Phi(\varkappa, \delta)=0{,}33$ и конфигурации полей правильных собственных волн с действительными волновыми числами (линии $|E_x(y, z)|=\mathrm{const}$ на полувысоте решетки, черточками отмечено направление убывания поля), снятые в местах, отмеченных крестиками. Сплошные кривые (здесь и далее) соответствуют симметричным относительно плоскости $z=0$ волнам, штриховые — антисимметричным. В данной простой ситуации условия существования собственных волн «разнесены», и последние сохраняют тип на всех непрерывных спектральных кривых.

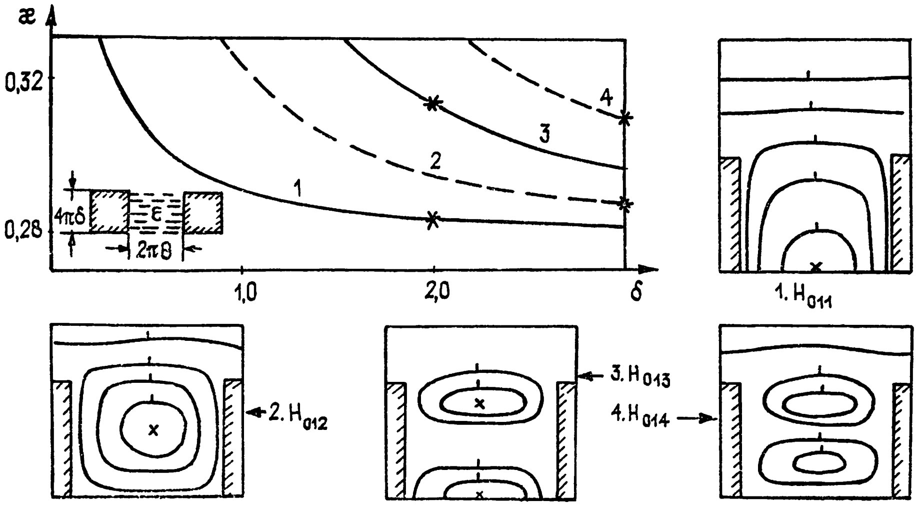


Рис. 2

Более сложная ситуация представлена на рис. 3 ($\theta=0{,}8$; $\varepsilon=25$; спектральные линии $\Phi(\varkappa, \delta) = 0{,}33$ правильных волн с действительными волновыми числами). Границы вариации параметров таковы, что допускают существование собственных волн первого (H_{01m}) и второго (H_{02m}) семейств. Благодаря этому намечается, а в ряде случаев (спектральные кривые волн различных классов симметрии) и реализуется тенденция к вырождению, т. е. одновременному существованию в структуре двух волн разных типов. Непрерывные спектральные кривые, отвечающие собственным волнам разных типов, но одного класса симметрии, избегают «столкновения», полностью обмениваясь характерной динамикой поведения при вариации параметров. Как показывает увеличенный фрагмент рис. 3, представленный на рис. 4 (конфигурации полей сняты в точках, отмеченных крестиками), происходящие изменения затрагивают и тип собственной волны, отвечающей непрерывной спектральной кривой: «взаимодействующие» волны обмениваются всеми характерными признаками.

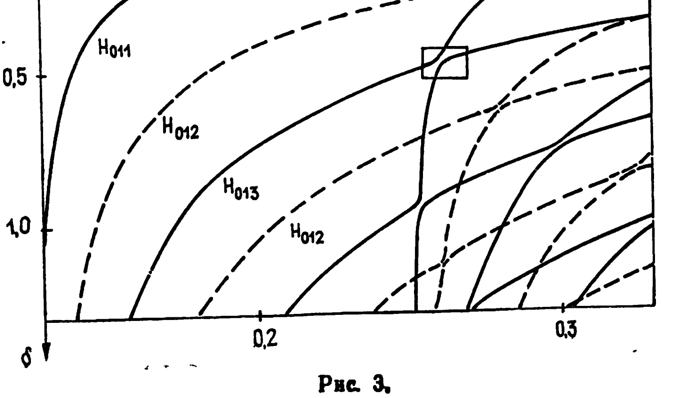


Рис. 3

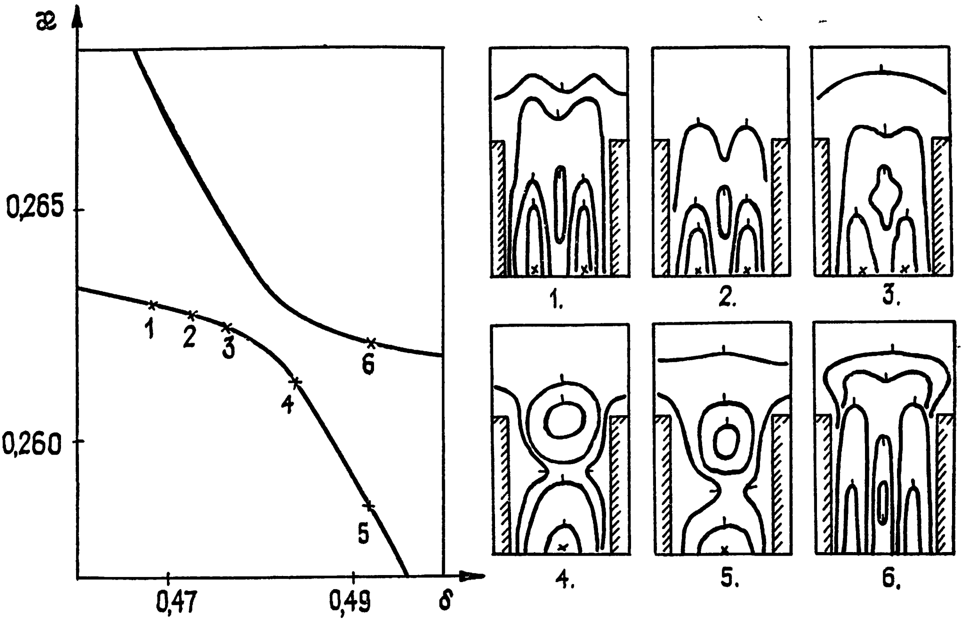


Рис. 4.

Аналогичные явления наблюдаются и при сближении условий существования (соответствующая метрика определяется варьируемыми параметрами) собственных волн с комплексными волновыми числами разных типов и одного класса симметрии. Вырождение по таким волнам является неустойчивым состоянием [12] и поэтому может реализовываться только в исключительных, «идеальных» ситуациях. Собственные волны решетки как «неидеального» электродинамического объекта (достаточно произвольные конфигурация границ и значения параметров, энергетическая связь с открытым пространством и т. п.) реагируют на приближение к неустойчивому состоянию, вступая в междутиповую связь. Она позволяет им разойтись в пространстве параметров без вырождения.

Отметим, что явление междутиповой связи позволяет осуществлять управляемое изменение конфигурации поля собственных волн открытых периодических волноводов. Это открывает ряд новых возможностей при их практическом использовании в различных устройствах СВЧ техники и электроники.

3. Эффект существования правильных собственных волн с действительными волновыми числами в решетке с открытыми каналами излучения. При анализе «взаимодействия» свободных колебаний поля в решетке волноводного типа (рис. 2) обнаружены эффекты существования сверхвысокодобротных колебаний при открытых каналах излучения в свободное пространство, т. е. в случае, когда одна (или несколько) из пространственных гармоник, составляющих (2), может уносить энергию в область $|z|>2\pi\delta$. Свободные колебания поля описываются нетривиальными решениями задачи (1)—(3) при заданном действительном Φ и в общем случае комплексной собственной частоте $\varkappa$ [1]. При $\operatorname{Im}\Phi=\operatorname{Im}\varkappa=0$ условия существования и поля свободных колебаний и собственных волн идентичны. Таким образом, факт существования сверхвысокодобротного свободного колебания (собственная частота действительная) означает в то же время, что существует и правильная волна решетки с действительными волновыми числами. Область, где открыты один или несколько каналов излучения, описывается неравенством $\varkappa>|\Phi|$ и классифицируется в литературе [2] как «запрещенная» для появления правильных действительных (медленных) волн.

Нужно отметить, что теоремы единственности (см. [1,4] и следствия 1, 2) не запрещают появления действительных правильных волн в области $\varkappa > |\Phi|$, они требуют только, чтобы в соответствующих решениях задачи (1)—(3) обращались в нуль амплитуды a_n, b_n плоских волн, уносящих энергию от решетки (n такие, что $\operatorname{Re}\Gamma_n > 0$). В этом случае область $\varkappa > |\Phi|$ не отличается от $\varkappa < |\Phi|$ в смысле энергообмена между решеткой и свободным пространством, и факт существования здесь медленной волны уже не кажется невозможным. Рассмотрим подробнее ситуации, когда такая возможность реализуется.

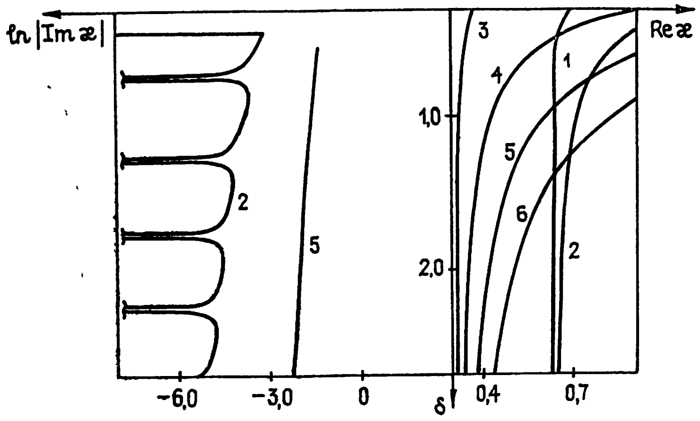


Рис. 5.

На рис. 5 представлены зависимости $\operatorname{Re}\varkappa$ и $\operatorname{Im}\varkappa$ собственных частот решетки с $\theta=0{,}8$ и $\varepsilon=3{,}89$ для $\Phi=0{,}1$. Кривые *1*, *2* отвечают второму семейству, *3*—*6* — первому. Добротность $(-\operatorname{Re}\varkappa/2\operatorname{Im}\varkappa)$ колебаний второго семейства на два-три порядка выше и становится практически бесконечной вблизи пересечения спектральных линий $\operatorname{Re}\varkappa$ колебаний разных семейств и одного класса симметрии (в данном случае симметричных относительно плоскости $z=0$). Добротности колебаний обоих семейств определяются потерями на излучение, связанными с высвечиванием из области $|z|<2\pi\delta$ как волны H_{01}, так и волны H_{02}. При разнесенных значениях $\operatorname{Re}\varkappa$ собственных частот доминируют потери на излучение, интегрально определяемые резонирующей волноводной волной (H_{01} — для первого семейства и H_{02} — для второго). При сближении значений $\operatorname{Re}\varkappa$ уровень возбуждения H_{01}- и H_{02}-волн в поле обоих колебаний подравнивается, подравниваетя и их вклад в потери на излучение. Добротность колебаний резко меняется, когда эти вклады суммируются в противофазе. Именно такой механизм, связанный с компенсацией вкладов, приводит к росту добротности колебаний второго семейства при условиях, близких к условиям существования свободных колебаний первого семейства. Отсутствие заметного изменения добротности колебаний последнего в этот момент обусловлено несоизмеримостью абсолютных величин их средних потерь на излучение с компенсирующим вкладом, обусловленным влиянием H_{02}-волны. Сделанные качественные выводы проверены численными экспериментами, в ходе которых анализировались амплитуды волноводных волн, формирующих поля свободных колебаний в области $|z|<2\pi\delta$, и дифференцировался их вклад в поле излучения на основной распространяющейся гармонике.

Аналогичные причины лежат и в основе аномального изменения добротности свободных колебаний, вступающих в междутиповое «взаимодействие» (см. рис. 6, где $\theta=0{,}8$; $\varepsilon=6{,}92$; $\Phi=0{,}1$). В результате появляется пара ($\Phi=0{,}1$, $\varkappa\approx0{,}74$) спектральных параметров, для которой решетка может поддерживать незатухающее свободное колебание и медленную волну несмотря на то, что канал излучения по основной пространственной гармонике открыт ($\operatorname{Re}\Gamma_0>0$). Отметим, что в отличие от предыдущей ситуации аномальное изменение добротности захватывает оба типа колебаний (одно из них принадлежит второму семейству, а другое — третьему). Это обусловлено тем, что их добротности в среднем одинаковы по порядку величины (условие, необходимое для реализации явления междутиповой связи колебаний).

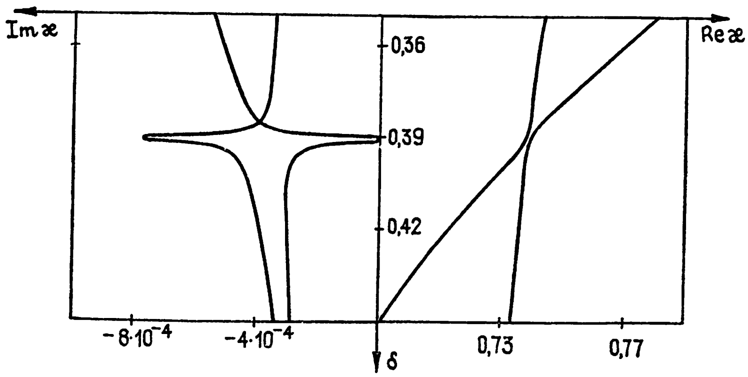


Рис. 6.

Нетрудно заметить, что условия возникновения «действительной» правильной собственной волны в области $\varkappa > |\Phi|$ гораздо жестче, чем в случае $\varkappa < |\Phi|$. Соответственно и спектр таких волн в области $\varkappa > |\Phi|$ будет гораздо реже.

Вопрос об условиях распространения волн в открытых периодических волноводах постоянно привлекает пристальное внимание специалистов, работающих в различных областях физики. Интерес к нему стимулируется в основном потребностями вакуумной и твердотельной электроники, антенной и измерительной техники. Наиболее полно в теоретическом плане соответствующие проблемы изучены в [2, 3, 13]. В данной работе получен ряд новых результатов, касающихся качественных характеристик спектров собственных волн одномерно-периодических структур.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сиренко Ю. К., Шестопалов В. П., Яцик В. В. Препринт ИРЭ АН УССР № 266. Харьков, 1985.
2. Вайнштейн Л. А. Электромагнитные волны. — М.: Сов. радио, 1957. — 581 с.
3. Вайнштейн Л. А., Маненков А. Б. Лекции по электронике СВЧ и радиофизике. — Саратов: Гос. ун-т, 1986. Кн. 1. С. 141.
4. Сиренко Ю. К., Шестопалов В. П. // ДАН СССР. 1985. Т. 285. № 2, С. 335.
5. Сиренко Ю. К, Шестопалов В. П. // ДАН СССР. 1986. Т.286. № 1. С. 85.
6. Сиренко Ю. К. // ДАН УССР. 1986. Сер. А. № 8. С. 65.
7. Сиренко Ю. К., Шестопалов В. П., Яцик В. В. // ДАН УССР. 1985. Сер. А. С. 60.
8. Санчес-Паленсия Э. Неоднородные среды и теория колебаний. — М.: Мир, 1984. — 472 с.
9. Штейншлейгер В. Б. Явление взаимодействия волн в электромагнитных резонаторах. — М.. Оборониздат, 1955. — 114 с.
10. Кошпаренок В. Н., Мележик П. Н., Поединчук А. Е., Шестопалов В. П. // ДАН СССР. 1984. Т. 279. № 5. С. 1114.
11. Свеженцев А. Е. // ДАН УССР. 1986. Сер. А. № 7. С. 58.
12. Крейн М. Г., Любарский Г. Я. // ПММ. 1961. Т. 25. Вып. 1. С. 24.
13. Сологуб В. Г. Диссертация. Харьков, 1967.

Институт радиофизики и электроники
АН УССР

Поступила в редакцию
16 марта 1987 г.

NEW RESULTS IN THE THEORY OF OPEN PERIODIC GUIDE STRUCTURES

Yu. K. Sirenko

An effect of existence of the correct surface waves in the «forbidden» band and phenomenon of the intertype connection of natural waves in open one-dimensional guide structures are described and analyzed.