

УДК 537.876 23

МЕТОД ПОГРУЖЕНИЯ И РЕШЕНИЕ ОБРАТНЫХ ВОЛНОВЫХ ЗАДАЧ В СЛОИСТЫХ СРЕДАХ

А. Г. Бугров, В. И. Кляцкин

Рассматривается одномерная нестационарная задача о падении волны на слой неоднородной среды. Показано, что амплитуда (скачок) волнового поля как в среде, так и на отражающих границах в момент прихода волны определяется локальным значением скорости распространения волны. Исходя из замкнутого нелинейного уравнения для обратнорассеянного поля строится процедура решения обратной задачи (нахождение скорости распространения волны в среде по заданному обратнорассеянному полю). Получены аналитические решения обратной задачи для обратнорассеянного поля в виде линейной и экспоненциальной функций времени.

1. Обратные задачи теории распространения волн на протяжении десятилетий привлекают к себе внимание, поскольку восстановление параметров среды по значениям поля в ней является одной из важных проблем радиофизики, акустики, геофизики и т. д. В последние годы были развиты и выделены в отдельную группу так называемые «быстрые» дифференциальные методы решения обратных задач, основанные на использовании метода распространения сингулярностей [1] и «послойном» восстановлении профиля неоднородностей по мере прохождения в глубь среды пробного временного импульса (см. обзор [2] и библиографию к нему). Одним из наиболее распространенных дифференциальных методов является SCHUR-алгоритм, при помощи которого в [3, 4], например, исследована в наиболее полной постановке обратная задача для уравнений акустики. В рамках вышеупомянутого метода и родственных ему в качестве рабочих уравнений используется обычно двухкомпонентная система динамических уравнений для прямой и обратной волн в среде. Вследствие этого при восстановлении профиля неоднородностей на каждом шаге приходится решать прямую задачу для поля внутри неоднородной среды, что можно отнести к недостаткам такого подхода.

Вычисление поля внутри среды не является, однако, необходимым элементом решения обратной задачи, и эту процедуру можно заменить более простой, используя метод погружения. Разработанный в монографии [5] и цикле оригинальных работ (см. библиографию к [5]) для решения задач теории распространения волн метод погружения позволяет сформулировать краевую волновую задачу в виде задачи с начальными условиями. В частности, уравнение для обратнорассеянного поля на границе слоя имеет замкнутый вид. Использование этого уравнения в обратной задаче и позволяет восстановить профиль неоднородностей, не интересуясь полем внутри слоя, которое с точки зрения решения обратной задачи содержит излишнюю информацию.

Применительно к прямой и обратной задачам акустики идеи метода погружения использовались ранее в [6] для восстановления скорости звука в слое неоднородной среды при отсутствии скачков скорости звука и плотности на границах слоя, что эквивалентно задаче о пространстве с согласованной границей.

В действительности, большинству физических ситуаций соответствует задача, когда на границах неоднородного слоя имеют место скачки

параметров среды, играющие часто определяющую роль в решении. Рассмотрению обратной задачи в такой более полной постановке и посвящена настоящая работа.

2. Пусть слой неоднородной среды занимает часть пространства $L_0 \leq x \leq L$, и справа из области $x > L$ на него падает волна $\varphi(x + c_2 t)$, где c_2 — скорость распространения волны в свободном пространстве $x > L$. Тогда в области $x \geq L$ волновое поле определяется равенством $u(x, t) = \varphi(x + c_2 t) + R(x - c_2 t)$, где $R(x - c_2 t)$ — отраженная от слоя волна. В области $x \leq L_0$ имеем проходящую волну $u(x, t) = T(x + c_1 t)$, где c_1 — скорость распространения волны в свободном пространстве $x < L_0$. Имея в виду рассмотрение задачи о распространении электромагнитных волн двух возможных поляризации, запишем волновое уравнение в слое среды $L_0 \leq x \leq L$ в виде

$$\frac{1}{c^2(x)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\rho'(x)}{\rho(x)} \frac{\partial}{\partial x} \right) u(x, t) = 0, \quad (1)$$

где $\rho'(x) = d\rho(x)/dx$, а диэлектрическая проницаемость среды $\varepsilon(x)$ (магнитную проницаемость среды считаем равной единице) определяется скоростью распространения волны в слое среды $\varepsilon(x) = c_0^2 c^{-2}(x)$. При $\rho(x) = 1$ $u(x, t)$ описывает электрическое поле (E -волна), при $\rho(x) = \varepsilon(x)$ — магнитное (H -волна) (в задаче о наклонном падении волны случаи $\rho(x) = 1$ и $\rho(x) = \varepsilon(x)$ отвечают различным поляризациям падающей волны: вектор электрического поля перпендикулярен плоскости падения и параллелен соответственно). Отметим, что уравнение (1) описывает и распространение акустических волн. В этом случае величина $u(x, t)$ описывает звуковое давление в волне, а $\rho(x)$ — плотность среды.

Краевыми условиями для уравнения (1) являются условия непрерывности величин $u(x, t)$ и $\rho^{-1}(x) \partial u(x, t) / \partial x$ на границах слоя $x = L_0, L$, которые можно записать в виде

$$\left(\frac{\Omega_2}{\rho(x)} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} \right) u(x, t) \Big|_{x=L} = 2 \frac{\partial}{\partial t} \varphi(L + c_2 t), \quad (2)$$

$$\left(\frac{\Omega_1}{\rho(x)} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial t} \right) u(x, t) \Big|_{x=L_0} = 0,$$

где $\Omega_1 = \rho_1 c_1$, $\Omega_2 = \rho_2 c_2$.

Перепишем уравнение (1) в виде системы уравнений

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = -\rho(x) c^2(x) \frac{\partial}{\partial x} w(x, t), \quad \frac{\partial}{\partial t} w(x, t) = -\frac{1}{\rho(x)} \frac{\partial}{\partial x} u(x, t). \quad (3)$$

Тогда краевыми условиями для нее, согласно (2), будут условия

$$u(L, t) - \Omega_2 w(L, t) = 2\varphi(L + c_2 t), \quad u(L_0, t) + \Omega_1 w(L_0, t) = 0. \quad (4)$$

Перейдем к функции Грина для задачи (3), (4). Функция Грина в свободном пространстве $x > L$

$$g(x - x_0, t - t_0) = \frac{1}{2c_2} \theta \left(t - t_0 - \frac{|x - x_0|}{c_2} \right),$$

и, следовательно, падающая волна порождает на границе $x = L$ распределение источников $f(t_0)$, такое что

$$\varphi(L + c_2 t) = \frac{1}{2c_2} \int dt_0 \theta(t - t_0) f(t_0), \quad f(t_0) = 2c_2 \frac{\partial}{\partial t_0} \varphi(L + c_2 t_0).$$

Тогда волновое поле внутри среды представимо в виде

$$u(x, t) = \frac{1}{2c_2} \int dt_0 G(x, L; t-t_0) f(t_0),$$

$$w(x, t) = \frac{1}{2c_2} \int dt_0 W(x, L; t-t_0) f(t_0),$$

где функции G и W описываются краевой задачей

$$\frac{\partial}{\partial t} G(x, L; t-t_0) = -\rho(x) c^2(x) \frac{\partial}{\partial x} W(x, L; t-t_0),$$

$$\frac{\partial}{\partial t} W(x, L; t-t_0) = -\frac{1}{\rho(x)} \frac{\partial}{\partial x} G(x, L; t-t_0),$$

$$G(L, L; t-t_0) - \Omega_2 W(L, L; t-t_0) = 2\theta(t-t_0),$$

$$G(L_0, L; t-t_0) + \Omega_1 W(L_0, L; t-t_0) = 0. \quad (5)$$

Краевая задача (5) описывает распространение скачка $\varphi = \theta(t-t_0)$ в неоднородной среде. Это прямая задача. Обратная задача, которая и будет рассматриваться ниже, состоит в определении величины $c(x)$ при известной временной зависимости $G(L, L; t-t_0)$, описывающей поле на границе слоя $x=L$, т. е. отраженную от слоя волну.

Для постоянных значений параметров среды $\rho(x) \equiv \rho$, $c(x) \equiv c$ с помощью преобразования Фурье легко написать решение краевой задачи (5). А именно, для поля на границе слоя $x=L$ получаем выражение (далее считаем $t_0 = 0$)

$$G_L(t) \equiv G(L, L; t) = -\frac{1+R_2}{2\pi i} \int \frac{d\omega}{\omega+i0} e^{-i\omega t} \frac{1+R_1 \exp\{2i\omega\tau_{L_0}\}}{1+R_1 R_2 \exp\{2i\omega\tau_{L_0}\}} =$$

$$= (1+R_2) [\theta(t) + R_1(1-R_2)\theta(t-2\tau_{L_0}) + \dots], \quad (6)$$

где $\tau_{L_0} = (L-L_0)/c$ — время прохождения волной слоя среды, а через величины R_i обозначены коэффициенты отражения плоской гармонической волны от границ $x=L$ и $x=L_0$ соответственно:

$$R_2 = (\Omega - \Omega_2) / (\Omega + \Omega_2), \quad R_1 = (\Omega_1 - \Omega) / (\Omega_1 + \Omega) \quad (\Omega = \rho c).$$

Из равенства (6) видно, что при $L \rightarrow L_0$, когда толщина слоя стремится к нулю,

$$G_{L_0}(t) = \frac{(1+R_1)(1+R_2)}{1+R_1 R_2} \theta(t) = \frac{2\Omega_1}{\Omega_1 + \Omega_2} \theta(t), \quad (7)$$

и необходимо учитывать все многократные переотражения от границ слоя. Значение же $G_L(t=+0)$ определяется только границей $x=L$:

$$G_L(+0) = 1+R_2 = 2\Omega / (\Omega + \Omega_2). \quad (8)$$

При $t = 2\tau_{L_0} + 0$, т. е. в момент прихода на границу $x=L$ волны, отраженной от границы $x=L_0$, имеем

$$G_L(2\tau_{L_0} + 0) = (1+R_2) [1+R_1(1-R_2)]. \quad (9)$$

Таким образом, если мы знаем зависимость $G_L(t)$, то с точки зрения решения обратной задачи величины $G_L(+0)$ и $G_L(2\tau_{L_0} + 0)$ определяют параметры среды как в самом слое, так и в полупространстве $x < L_0$.

Аналогичным образом для волнового поля внутри слоя получаем выражение

$$G(x, L; t) = (1+R_2) [\theta(t-\tau_x) + R_1\theta(t-2\tau_{L_0}+\tau_x) + \dots],$$

где $\tau_x = (L-x)/c$ — время прихода волны в точку x , откуда в частности следует, что

$$G(x, L; \tau_x + 0) = \frac{2\Omega}{\Omega + \Omega_2}, \quad T_L(\tau_{L_0} + 0) = \frac{4\Omega\Omega_1}{(\Omega + \Omega_1)(\Omega + \Omega_2)}, \quad (10)$$

где $T_L(t) = G(L_0, L; t)$ — проходящая через слой волна. Ниже будет показано, что формулы (8)–(10) легко обобщаются на случай неоднородной среды.

3. Как указывалось выше, метод погружения позволяет переформулировать краевую волновую задачу (5) в задачу с начальными условиями по параметру «погружения» — L , положению границы слоя, на которую падает волна. Для получения уравнений метода следует продифференцировать динамические уравнения и краевые условия к ним (5) по параметру L . Сопоставление полученной краевой задачи для величин $\partial G(x, L; t)/\partial L$ и $\partial W(x, L; t)/\partial L$ с краевой задачей (5) позволяет установить существование линейной зависимости

$$\left(\frac{\partial}{\partial L} + \frac{\rho(L)}{\Omega_2} \frac{\partial}{\partial t} \right) G(x, L; t) = \frac{\rho(L)}{2\Omega_2} \left(1 - \frac{\Omega_2^2}{\Omega^2(L)} \right) \int dt_1 \frac{\partial G(x, L; t-t_1)}{\partial t} \frac{\partial G_L(t_1)}{\partial t_1}, \quad (11)$$

которую можно рассматривать как интегродифференциальное уравнение с «начальным» условием $G(x, L; t)|_{L=x} = \bar{G}_x(t)$.

Для величины $G_L(t)$ имеем

$$\frac{\partial}{\partial L} G_L(t) = \frac{\partial}{\partial x} G(x, L; t) \Big|_{x=L} + \frac{\partial}{\partial L} G(x, L; t) \Big|_{x=L}$$

и, следовательно, с учетом (5) и (11) получаем замкнутое нелинейное интегродифференциальное уравнение

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial L} + \frac{2\rho(L)}{\Omega_2} \frac{\partial}{\partial t} \right) G_L(t) &= \frac{2\rho(L)}{\Omega_2} \delta(t) + \\ &+ \frac{\rho(L)}{2\Omega_2} \left(1 - \frac{\Omega_2^2}{\Omega^2(L)} \right) \int dt_1 \frac{\partial G_L(t-t_1)}{\partial t} \frac{\partial G_L(t_1)}{\partial t_1} \end{aligned} \quad (12)$$

с «начальным» условием (7), соответствующим отсутствию неоднородностей среды, т. е. $G_{L_0}(t) = 2\Omega_1/(\Omega_1 + \Omega_2)\theta(t)$.

Полагая в (11) $x=L_0$, получаем уравнение для выходящей из слоя волны

$$\left(\frac{\partial}{\partial L} + \frac{\rho(L)}{\Omega_2} \frac{\partial}{\partial t} \right) T_L(t) = \frac{\rho(L)}{2\Omega_2} \left(1 - \frac{\Omega_2^2}{\Omega^2(L)} \right) \int dt_1 \frac{\partial T_L(t-t_1)}{\partial t} \frac{\partial G_L(t_1)}{\partial t_1}, \quad (13)$$

$$T_{L_0}(t) = \frac{2\Omega_1}{\Omega_1 + \Omega_2} \theta(t).$$

Отметим, что ранее уравнения (11)–(13) были получены в работе [7] (см. также [5]) для случая $\rho(x) = \rho_1 = \rho_2 = 1$, $c_1 = c_2$, исходя из интегрального уравнения, эквивалентного исходной краевой задаче (1), (2).

Решение уравнения (12) имеет структуру

$$G_L(t) = H_L(t)\theta(t). \quad (14)$$

При подстановке (14) в (12) возникают две группы членов, содержа-

щих $\delta(t)$ и $\theta(t)$. Приравняв нулю коэффициент при δ -функции, что соответствует методу сингулярностей, получаем равенство

$$H_L(+0) = 2\Omega(L)/(\Omega(L) + \Omega_2). \quad (15)$$

Данное равенство очевидно (см. (8)) и выражает ту особенность, что в момент прихода волны к границе $x=L$ отражение осуществляется только за счет скачка величины $\Omega(x)$ на границе слоя $x=L$. Поэтому равенство (15) можно было бы взять за основу с самого начала, и тем самым мы получаем оправдание метода сингулярностей. Уравнение же для функции $H_L(t)$ при $t > 0$ принимает вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial L} + \frac{2}{c(L)} \frac{\partial}{\partial t}\right) H_L(t) = \frac{\rho(L)}{2\Omega_2} \left(1 - \frac{\Omega_2^2}{\Omega^2(L)}\right) \int_0^t dt_1 \frac{\partial H_L(t-t_1)}{\partial t} \frac{\partial H_L(t_1)}{\partial t_1}. \quad (16)$$

Уравнение (16) имеет структуру, позволяющую последовательно вычислить коэффициенты разложения функции $H_L(t)$ в ряд Тейлора в окрестности $t=0$. Так, полагая в (16) $t=0$, получаем

$$\left.\frac{\partial H_L(t)}{\partial t}\right|_{t=0} = -\frac{c(L)}{2} \frac{\partial}{\partial L} H_L(0) = -\frac{\Omega_2 c(L) \Omega'(L)}{(\Omega(L) + \Omega_2)^2}. \quad (17)$$

Дифференцируя далее (16) по t и полагая $t=0$, получаем величину $\partial^2 H_L(t)/\partial t^2|_{t=0}$, определяющую $\Omega''(L)$ и т. д.

Поле внутри слоя среды описывается уравнением (11) и имеет структуру

$$G(x, L; t) = H(x, L; t) \theta(t - \tau_x(L)), \quad (18)$$

где $\tau_x(L)$ — время прихода волны в точку x от границы $x=L$. Подставляя (18) в (11) и приравнявая к нулю коэффициент при $\delta(t - \tau_x(L))$, получаем соответствующее уравнение для величины $\tau_x(L)$, из которого следует

$$\tau_x(L) = \int_x^L \frac{d\xi}{c(\xi)}. \quad (19)$$

При $t > \tau_x(L)$ функция $H(x, L; t)$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial L} + \frac{2}{c(L)} \frac{\partial}{\partial t}\right) H(x, L; t) &= \frac{\rho(L)}{2\Omega_2} \left(1 - \frac{\Omega_2^2}{\Omega^2(L)}\right) H(x, L; \tau_x(L)) \times \\ &\times \frac{\partial H_L(t - \tau_x(L))}{\partial t} + \frac{\rho(L)}{2\Omega_2} \left(1 - \frac{\Omega_2^2}{\Omega^2(L)}\right) \int_0^{t - \tau_x(L)} dt_1 \frac{\partial H(x, L; t - t_1)}{\partial t} \frac{\partial H_L(t_1)}{\partial t_1} \end{aligned} \quad (20a)$$

с начальным условием $H(x, L; t)|_{L=x} = H_x(t)$. Уравнение (20a) не замкнуто относительно функции $H(x, L; t)$ из-за присутствия в правой части величины $H(x, L; \tau_x(L))$. Для определения ее положим в (20a) $t = \tau_x(L)$. В результате, с учетом равенств (19) и (17), получаем уравнение

$$\frac{\partial}{\partial L} H(x, L; \tau_x(L)) = -\frac{\Omega'(L)}{2\Omega(L)} \frac{\Omega(L) - \Omega_2}{\Omega(L) + \Omega_2} H(x, L; \tau_x(L)), \quad (21)$$

решение которого с начальным условием $H(x, L; \tau_x(L))|_{L=x} = H_x(0) = 2\Omega(x)/(\Omega(x) + \Omega_2)$ имеет вид

$$H(x, L; \tau_x(L)) = 2\sqrt{\Omega(x)\Omega(L)}/(\Omega(L) + \Omega_2). \quad (22)$$

Следовательно, уравнение (20а) можно переписать в окончательном виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial L} \tilde{H}(x, L; t) &= \sqrt{\frac{\Omega(x)}{\Omega(L)} \frac{\Omega(L) - \Omega_2}{\Omega_2 c(L)}} \frac{\partial H_L(t)}{\partial t} + \\ &+ \frac{\rho(L)}{2\Omega_2} \left(1 - \frac{\Omega_2^2}{\Omega^2(L)}\right) \int_0^t dt_1 \frac{\partial \tilde{H}(x, L; t-t_1)}{\partial t} \frac{\partial H_L(t_1)}{\partial t_1}. \end{aligned} \quad (20б)$$

$$H(x, L; t) = \exp\left\{-\tau_x(L) \frac{\partial}{\partial t}\right\} \tilde{H}(x, L; t).$$

Аналогичным образом и для величины $T_L(\tau_{L_0}(L))$, описывающей выходящую из слоя волну, получаем дифференциальное уравнение (полагая в (21) $x=L_0$)

$$\frac{d}{dL} T_L(\tau_{L_0}(L)) = -\frac{\Omega'(L)}{2\Omega(L)} \frac{\Omega(L) - \Omega_2}{\Omega(L) + \Omega_2} T_L(\tau_{L_0}(L)),$$

начальным условием для которого является равенство (10) при $L \rightarrow L_0$:

$$T_L(\tau_{L_0}(L))|_{L \rightarrow L_0} = \frac{4\Omega(L_0)\Omega_1}{(\Omega(L_0) + \Omega_1)(\Omega(L_0) + \Omega_2)}.$$

Следовательно,

$$T_L(\tau_{L_0}(L)) = \frac{4\Omega_1 \sqrt{\Omega(L_0)\Omega(L)}}{(\Omega(L_0) + \Omega_1)(\Omega(L) + \Omega_2)}. \quad (23)$$

Таким образом, амплитуда (скачок) волнового поля в момент прихода волны определяется локальным значением величины $\Omega(x)$ в этой точке и не зависит от предыстории процесса распространения волны.

Полученные выше уравнения справедливы только для интервала времени t , в течение которого отсутствует отраженная от границы $x=L_0$ волна. Так функция $G_L(t)$ описывается уравнением (16) только при $0 \leq t < 2\tau_{L_0}(L)$. При $0 \leq t < 4\tau_{L_0}(L)$ функция $G_L(t)$ имеет структуру

$$G_L(t) = H_L(t)\theta(t) + F_L(t)\theta(t-2\tau_{L_0}(L)), \quad (24)$$

т. е. в момент времени $t=2\tau_{L_0}(L)+0$ осуществляется скачок, связанный с приходом волны, отраженной от границы $x=L_0$. Подставляя (24) в уравнение (12), получаем уравнение для функции $F_L(t)$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial L} + \frac{2}{c(L)} \frac{\partial}{\partial L}\right) F_L(t) &= \frac{\rho(L)}{\Omega_2} \left(1 - \frac{\Omega_2^2}{\Omega^2(L)}\right) F_L(2\tau_{L_0}) \frac{\partial H_L(t-2\tau_{L_0})}{\partial t} + \\ &+ \frac{\rho(L)}{\Omega_2} \left(1 - \frac{\Omega_2^2}{\Omega^2(L)}\right) \int_{2\tau_{L_0}}^t dt_1 \frac{\partial F_L(t_1)}{\partial t_1} \frac{\partial H_L(t-t_1)}{\partial t}, \end{aligned} \quad (25)$$

которое, однако, не замкнуто из-за наличия в правой части величины $F_L(2\tau_{L_0})$. Полагая в (25) $t=2\tau_{L_0}$, получаем с учетом равенства (19) уравнение для $F_L(2\tau_{L_0})$

$$\frac{d}{dL} F_L(2\tau_{L_0}(L)) = -\frac{\Omega'(L)}{\Omega(L)} \frac{\Omega(L) - \Omega_2}{\Omega(L) + \Omega_2} F_L(2\tau_{L_0}),$$

начальным условием для которого является равенство (9) при $L \rightarrow L_0$:

$$F_L(2\tau_{L_0})|_{L \rightarrow L_0} = F_{L_0} = \frac{4\Omega_2\Omega(L_0)(\Omega_1 - \Omega(L_0))}{(\Omega(L_0) + \Omega_1)(\Omega(L_0) + \Omega_2)^2}.$$

Следовательно,

$$F_L(2\tau_{L_0}) = \frac{4\Omega_2\Omega(L)(\Omega_1 - \Omega(L))}{(\Omega(L) + \Omega_1)(\Omega(L) + \Omega_2)^2}, \quad (26)$$

и величина скачка рассеянного назад поля в момент прихода отраженной от границы $x=L_0$ волны определяется локальными характеристиками $\Omega(x)$ в окрестностях отражающих границ. Все полученные выше формулы являются обобщением формул (8)–(10) для однородной среды на неоднородный случай.

4. Полученные выше соотношения и уравнения позволяют решить обратную задачу о восстановлении скорости распространения волны $c(x)$ по известной временной зависимости рассеянного назад поля. В самом деле, рассеянное назад поле описывается функцией $H_L(t)$, разложение которой в ряд Тейлора в окрестности $t=0$ определяет значения $c(L)$, $c'(L)$ и т. д. Если теперь рассматривать уравнение (16) как вспомогательное и переписать его в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{2}{c(x)}\frac{\partial}{\partial x}\right)H_x(t) = \frac{\rho(x)}{2\Omega_2}\left(1 - \frac{\Omega_2^2}{\Omega^2(x)}\right) \int_0^t dt_1 \frac{\partial H_x(t-t_1)}{\partial t} \frac{\partial H_x(t_1)}{\partial t_1} \quad (27a)$$

с «начальным» условием $H_x(t)|_{x=L} = H_L(t)$, то по известному поведению $c(x)$ ($\Omega(x)$) в окрестности $x=L$ можно, решив уравнение (27a), найти $H_x(t)$ при $x=L-\delta$. По найденному значению $H_x(t)$ снова находим $c(x)$, $c'(x)$ и т. д. по формулам

$$H_x(0) = \frac{2\Omega(x)}{\Omega(x) + \Omega_2}, \quad \frac{\partial H_x(t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = -\frac{\Omega_2 c(x)\Omega'(x)}{(\Omega(x) + \Omega_2)^2}, \dots \quad (27b)$$

Наконец, по значению $G_L(2\tau_{L_0}) = H_L(2\tau_{L_0}) + F_L(2\tau_{L_0})$, согласно формуле (26), определяется величина Ω_1 , характеризующая полупространство $x \leq L_0$.

Описанная схема решения обратной задачи допускает два аналитических решения: для экспоненциальной и линейной по времени функций $H_L(t)$.

В самом деле, если

$$H_L(t) = \alpha e^{\beta t}, \quad (28)$$

то величины α и β определяют значения $\Omega(L)$ и $\Omega'(L)$. В этом случае решение уравнения (27a) также является экспоненциальной функцией времени, т. е. согласно (27b)

$$H_x(t) = \alpha(x) e^{\beta(x)t}, \quad \alpha(x) = \frac{2\Omega(x)}{\Omega(x) + \Omega_2}, \quad \beta(x) = -\frac{\Omega_2\Omega'(x)}{2\rho(x)(\Omega(x) + \Omega_2)}. \quad (29)$$

Подставляя (29) в (27a), получаем дифференциальное уравнение второго порядка для $\Omega(x)$

$$\Omega''(x) - \frac{(\Omega'(x))^2}{2\Omega(x)} - \frac{\rho'(x)}{\rho(x)}\Omega(x) = 0 \quad (30)$$

с начальными условиями $\Omega'(x)|_{x=L} = \Omega'(L)$, $\Omega(x)|_{x=L} = \Omega(L)$.

Рассмотрим два вида поляризации падающего поля. Для E -волны $\rho(x) \equiv 1$, $\Omega(x) \equiv c(x)$, и уравнение (30) принимает вид

$$c''(x) - (c'(x))^2/2c(x) = 0. \quad (31)$$

Решение этого уравнения имеет две ветви:

$$c(x) = c(L) \left(1 \mp \frac{\xi}{2} \right)^2, \quad \xi = \frac{|c'(L)|}{c(L)} (L - x), \quad (32)$$

где верхний знак относится к случаю $c'(L) > 0$, а нижний — $c'(L) < 0$. Интересной особенностью решения (32) для $c'(L) > 0$ является тот факт, что время прихода волны в точку $\xi_0 = 2$, в которой $c(x) = 0$, оказывается бесконечным. В этом случае падающая волна полностью отражается от слоя, проходя внутрь лишь на конечную глубину $L - x_0 = 2c(L)/c'(L)$.

Для H -волны $\rho(x) \equiv c_2^2 c^{-2}(x)$, $\Omega(x) \equiv c_2^2 c^{-1}(x)$, и, следовательно, (30) переходит в уравнение

$$c''(x) + (c'(x))^2 / 2c(x) = 0, \quad (33)$$

решение которого также имеет две ветви:

$$c(x) = c(L) \left(1 \mp \frac{3}{2} \xi \right)^{2/3}. \quad (34)$$

Если же исходная волновая задача описывает распространение акустических волн в среде с заданной зависимостью плотности среды $\rho(x)$, то вид решения уравнения (30) следующий:

$$\Omega(x) = \Omega(L) \left[1 \mp \frac{|\Omega'(L)|}{2\rho(L)\Omega(L)} \int_x^L d\xi \rho(\xi) \right]^2.$$

Аналогичным образом можно получить аналитическое решение и для линейной по времени функции

$$H_L(t) = \alpha + \beta t. \quad (35)$$

Тогда в соответствии с (27б)

$$H_x(t) = \alpha(x) + \beta(x)t, \quad \alpha(x) = \frac{2\Omega(x)}{\Omega(x) + \Omega_2}, \quad \beta(x) = -\frac{\Omega_2 c(x) \Omega'(x)}{(\Omega(x) + \Omega_2)^2}, \quad (36)$$

а подстановка (36) в уравнение (27а) приводит к дифференциальному уравнению следующего вида:

$$\Omega''(x) - \frac{1}{2\Omega(x)} \frac{\Omega(x) - \Omega_2}{\Omega(x) + \Omega_2} (\Omega'(x))^2 - \frac{\rho'(x)}{\rho(x)} \Omega'(x) = 0. \quad (37)$$

Для обеих поляризаций падающей электромагнитной волны из (37) получается следующее уравнение, описывающее скорость распространения волны в слое:

$$c''(x) - \frac{1}{2c(x)} \frac{c(x) - c_2}{c(x) + c_2} (c'(x))^2 = 0. \quad (38)$$

Решение уравнения (38) легко находится из трансцендентного уравнения вида

$$\begin{aligned} \arctg \sqrt{\frac{c(x)}{c_2}} - \sqrt{\frac{c(x)}{c_2}} - \arctg \sqrt{\frac{c(L)}{c_2}} + \sqrt{\frac{c(L)}{c_2}} = \\ = \pm \sqrt{\frac{c(L)}{c_2}} \frac{|c'(L)|}{c(L) + c_2} (L - x) \end{aligned} \quad (39)$$

(где, как и ранее, верхний знак соответствует значениям $c'(L) > 0$, а

нижний — $c'(L) < 0$) и зависит теперь от величины скачка скорости распространения волны на границе L . Время прихода волны в точку x , например, для $c'(L) < 0$ определяется в этом случае выражением

$$\tau_x(L) = \frac{2(c(L) + c_2)}{\sqrt{c_2 c(L)} |c'(L)|} \left(\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{c(x)}{c_2}} - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{c(L)}{c_2}} \right).$$

Связь между двумя найденными аналитическими решениями легко заметить, если рассмотреть в (38) предельные случаи $c(x) \gg c_2$ и $c(x) \ll c_2$. Так при $c(x) \gg c_2$ всюду в слое уравнение (38) переходит в (31), а при $c(x) \ll c_2$ — в уравнение (33). Необходимо подчеркнуть только, что при решении прямой задачи в случае $c'(L) < 0$ эти предельные переходы могут привести к неустойчивости, связанной с тем, что функция $H_L(t)$, соответствующая решениям (31) и (33), растет экспоненциально, в то время как для точного решения (38) рост $H_L(t)$ линейный.

На рис. 1 представлены зависимости $c(x)$ (32), (34) и (39) при $c_2 = c(L)$ от расстояния от границы L . Интересной особенностью профилей $c(x)$ для значений $c'(L) > 0$ является их волноводный характер.

Отметим, что для приведенных решений обратной задачи, когда поле на границе описывается выражениями (28) и (35), поле внутри среды также является экспоненциальной и линейной функциями времени соответственно.

5. Выше была рассмотрена задача о распространении в неоднородной среде плоской волны, падающей нормально к границам слоя. Если же падающая волна является наклонной плоской волной

$$G_{\text{пад}}(x, y; t) = \Rightarrow \theta(t + c_2^{-1}(x-L) \cos \gamma_2 + c_2^{-1}y \sin \gamma_2)$$

где γ_2 — угол падения, то волновое поле $G(x, y; t)$ внутри неоднородного слоя можно представить в виде

$$G(x, y; t) = \exp \left\{ c_2^{-1} y \sin \gamma_2 \frac{\partial}{\partial t} \right\} \tilde{G}(x, t),$$

где функция $\tilde{G}(x, t)$ удовлетворяет краевой задаче

$$\frac{1}{\tilde{c}^2(x)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \tilde{G}(x, t) - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\rho'(x)}{\rho(x)} \frac{\partial}{\partial x} \right) \tilde{G}(x, t) = 0,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\tilde{\Omega}_2}{\rho(x)} \frac{\partial}{\partial x} \right) \tilde{G}(x, t) \Big|_{x=L} = 2\delta(t), \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\tilde{\Omega}_1}{\rho(x)} \frac{\partial}{\partial x} \right) \tilde{G}(x, t) \Big|_{x=L_0} = 0,$$

$$\tilde{\Omega}_1 = \frac{\Omega_1}{\cos \gamma_1}, \quad \tilde{c}(x) = \frac{c(x)}{\cos \gamma(x)}, \quad \cos^2 \gamma(x) = 1 - \frac{c^2(x)}{c_2^2} \sin^2 \gamma_2,$$

$$\cos^2 \gamma_1 = 1 - \frac{c_1^2}{c_2^2} \sin^2 \gamma_2.$$

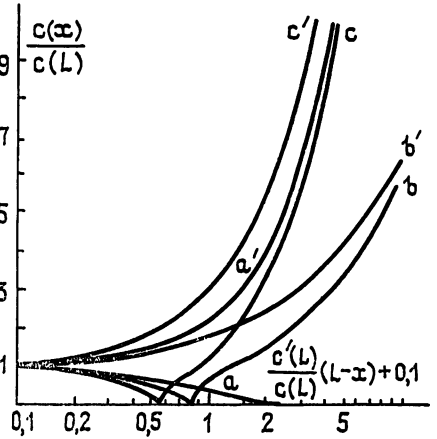


Рис. 1. Профили зависимости $c(x)/c(L)$ от нормированного расстояния от границы L , соответствующие экспоненциальной (кривые a, a' — E -волна, кривые b, b' — H -волна) и линейной (кривые c, c') зависимостям $H_L(t)$. Кривые a, b, c соответствуют $c'(L) > 0$, кривые a', b', c' — $c'(L) < 0$.

Таким образом, все результаты, полученные для случая нормального падения, и, в частности, полученные выше аналитические решения обратной задачи, остаются в силе и для наклонного падения плоской волны.

В заключение отметим, что и для трехмерных (стационарных и нестационарных) задач имеются замкнутые уравнения для обратнорассеянного поля, обобщающие уравнение (12) (см. [5]), поэтому развитая выше методика может быть полезна и для решения более сложных многомерных обратных волновых задач.

Авторы благодарны Л. Я. Любавину за полезные обсуждения постановок обратных волновых задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. Burridge R. // Wave Motion, 1980. V. 2. P. 305.
2. Bruckstein A. M., Levy B. C., Kailath T. // SIAM. J. Appl. Math. 1985. V. 45. № 2. P. 312.
3. Yagle A. E., Levy B. C. // J. Acoust. Soc. Am. 1984. V. 76. № 1. P. 301.
4. Yagle A. E., Levy B. C. // J. Acoust. Soc. Am. 1985. V. 78. № 2. P. 729.
5. Кляцкин В. И. Метод погружения в теории распространения волн. — М: Наука, 1986 Гл. 6.
6. Coronos J. P., Davison M. E., Krueger R. J. // J. Acoust. Soc. Am. 1983. V. 74. № 5. P. 1535.
7. Бабкин Г. И., Любавин Л. Я., Кляцкин В. И. // Акуст. журн. 1982. Т. 28. № 1. С. 1.

Тихоокеанский океанологический институт
ДВО АН СССР

Поступила в редакцию
1 сентября 1987 г.

IMBEDDING METHOD AND INVERSE PROBLEMS FOR A LAYERED MEDIA

A. G. Bugrov, V. I. Klyatskin

The one-dimensional nonstationary problem of wave incidence on a layer of inhomogeneous medium is considered. The wave field amplitude (the jump) at a moment of wave arrival is shown to be governed by the local value of wave propagation velocity. The inversion procedure (determination of wave propagation velocity using the given back-scattering field) is developed from analysis of separate nonlinear equation for the back-scattering field. The exact analytical solutions of the inverse problems for linear and exponential time dependences of back-scattering field are given.
