

УДК 621.391.822:621.3.018

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕСТАБИЛЬНОСТИ ЧАСТОТЫ ПО СПЕКТРУ ФЛУКТУАЦИЙ ФАЗЫ СИГНАЛА

С. Б. Добровольский, А. Г. Пашев, А. В. Якимов

Предложена методика расчета дисперсии приращений частоты на основе ограниченной информации о спектре фазовых флуктуаций сигнала. Формулируются требования к диапазону измерения спектра фазовых флуктуаций и к количеству отсчетов внутри исследуемого диапазона. Оценены погрешности, возникающие при несоблюдении этих требований.

Введение. Определение неустойчивости частоты и фазы является важной задачей, связанной с практическим применением различных генераторных систем [1]. При ее решении рассматривается сигнал

$$v(t) = V_0 \cos(2\pi f_0 t + \varphi(t)), \quad (1)$$

где V_0 — амплитуда, f_0 — частота, $\varphi(t)$ — флуктуации фазы.

Универсальной характеристикой неустойчивости частоты генератора является спектр фазовых флуктуаций $\langle \varphi^2 \rangle_F$, который обычно аппроксимируют выражением [2, 3]

$$\langle \varphi^2 \rangle_F = \sum_{\alpha} A_{\alpha} F^{-\alpha}, \quad \alpha = 0, 1, 2, 3, 4. \quad (2)$$

Для описания различных компонент спектра используется следующая терминология: «белые» ($\alpha=0$) и фликкерные ($\alpha=1$) флуктуации фазы, «белые» флуктуации частоты ($\alpha=2$), фликкерные ($\alpha=3$) и броуновские ($\alpha=4$) флуктуации частоты. Спектр флуктуаций фазы может быть рассчитан при помощи существующих методов, либо определен экспериментально.

В ряде приложений (доплеровская локация, хранение времени) предпочтительным оказывается определение флуктуационного ухода частоты за некоторое время T_0 , например среднеквадратической вариации частоты, квадрат которой именуется дисперсией Аллена [2]. Используется также более общая характеристика — дисперсия уходов частоты, определенная по L последовательным отсчетам. Данные характеристики могут быть определены путем непосредственного измерения [3–5] либо рассчитаны на основе измерений спектра флуктуаций фазы или частоты сигнала. В работах [4, 6–8] получены соотношения, связывающие различные характеристики неустойчивости частоты со спектром фазовых флуктуаций сигнала $\langle \varphi^2 \rangle_F$, заданным на всей области частот. На практике диапазон исследуемых частот всегда ограничен и его расширение, особенно в область низких частот, связано с определенными техническими трудностями. Поэтому использование соотношений, полученных в этих работах, не всегда представляется возможным. Не освещен также вопрос о том, насколько детально необходимо измерять форму спектра фазовых флуктуаций для корректной оценки неустойчивости частоты.

В данной работе излагается методика расчета дисперсии приращений частоты сигналов генераторов, обладающих произвольной формой спектра $\langle \varphi^2 \rangle_F$, возможная расходимость которого на низких частотах характеризуется параметром $\alpha < 5$, с учетом гармонических составляющих на фоне гладкой части спектра фазовых флуктуаций. Обсуждается

физический смысл и взаимосвязь упомянутых выше характеристик нестабильности частоты. Формулируются требования к диапазону измерения спектра флуктуаций фазы, количеству отсчетов внутри исследуемого диапазона. Приведена оценка погрешности, возникающей при несоблюдении этих требований.

1. Характеристики нестабильности частоты и фазы. Результат измерения фазы инерционным прибором с постоянной времени τ имеет вид

$$\bar{\varphi}(t) = \frac{1}{\tau} \int_{t-\tau}^t \varphi(t') dt'. \quad (3)$$

Простейшей характеристикой нестабильности фазы сигнала (1) является дисперсия усредненной фазы $\langle \bar{\varphi}^2 \rangle$, которая может быть оценена на основе серии из N неперекрывающихся измерений:

$$\langle \bar{\varphi}^2 \rangle_N = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \bar{\varphi}^2(t - kT_0). \quad (4)$$

Оценка (4) является состоятельной только для стационарных фазовых флуктуаций, т. е. для $\alpha < 1$. Если фазовые флуктуации нестационарны, то процесс $\varphi(t)$ не эргодичен. В этом случае оценка (4) характеризует лишь конкретную реализацию и не содержит информации о свойствах ансамбля.

Характеристикой нестабильности фазы сигнала, обладающего нестационарными фазовыми флуктуациями, может служить $\langle \Delta \bar{\varphi}^2 \rangle$ — дисперсия набегов фазы за время T_0 :

$$\Delta \bar{\varphi}(t) = \bar{\varphi}(t) - \bar{\varphi}(t - T_0), \quad T_0 \geq \tau, \quad (5)$$

либо дисперсия усредненных прибором частотных флуктуаций $\langle \bar{v}^2 \rangle$: $\bar{v}(t) = \Delta \bar{\varphi}(t)/T_0$. Определение этих величин означает введение привязки начальной фазы исследуемого сигнала при каждом измерении.

Оценка $\langle \bar{v}^2 \rangle_N = \langle \Delta \bar{\varphi}^2 \rangle_N / T_0^2$, определяемая аналогично (4), представляет среднее по серии из N неперекрывающихся измерений частоты. Она является состоятельной при стационарных эргодических флуктуациях частоты ($\alpha < 3$). При фликкерных либо броуновских флуктуациях частоты ($\alpha \geq 3$) в качестве характеристики нестабильности следует рассматривать дисперсию приращений частоты

$$\sigma^2(T_0, \tau) = \langle (\bar{v}(t) - \bar{v}(t - T_0))^2 \rangle. \quad (6)$$

Определение данной дисперсии подразумевает дополнительно к привязке по фазе введение привязки и по частоте.

Определение дисперсии (6) основывается на проведении серии неперекрывающихся двукратных измерений частоты сигнала $\bar{v}(t)$ и $\bar{v}(t - T_0)$. Более общей характеристикой нестабильности является $\sigma^2(L, T_0, \tau)$ — дисперсия уходов частоты, определяемая на основе серии L -кратных последовательных измерений:

$$\sigma^2(L, T_0, \tau) = \frac{1}{L-1} \left\langle \sum_{k=1}^L (\bar{v}(t - kT_0) - \langle \bar{v} \rangle_L)^2 \right\rangle, \quad (7)$$

$$\langle \bar{v} \rangle_L = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^L \bar{v}(t - kT_0),$$

Оценка $\sigma_N^2(L, T_0, \tau)$, полученная усреднением по N измерениям дисперсии, является состоятельной, т. е. сходится к (7) при $N \rightarrow \infty$, для сигналов, спектр флуктуаций фазы которых на низких частотах нарастает медленнее, чем $1/F^5$.

Стандартные преобразования приводят (7) к следующему виду:

$$\sigma^2(L, T_0, \tau) = \int_0^{\infty} G(F) \langle \varphi^2 \rangle_F dF, \quad (8)$$

$$G(F) = \frac{4L}{L-1} \frac{1}{T_0^2} \left[\sin^2(\pi F T_0) - \frac{1}{L^2} \sin^2(\pi F T) \right] \frac{\sin^2(\pi F \tau)}{(\pi F \tau)^2}.$$

Весовая функция $G(F)$ имеет следующие характерные частоты: $F_T = (\sqrt{2} \pi T)^{-1}$, $F_\tau = (\sqrt{2} \pi \tau)^{-1}$. Здесь $T = T_0 L$ — полное время обработки реализации.

2. Требования к диапазону измерения спектра. Участок спектра флуктуаций фазы $\langle \varphi^2 \rangle_F$, дающий основной вклад в дисперсию (8), определяется формой весовой функции $G(F)$. Вклад «высокочастотных» ($F > F_\tau$) флуктуаций фазы можно считать малым. Поэтому при измерении спектра фазовых флуктуаций можно ограничиться верхней частотой анализа F_B , лишь немного (допустим в два раза) превышающей частоту F_τ , т. е.

$$F_B \gtrsim 2F_\tau. \quad (9)$$

Для низкочастотной границы измерений соответственно должно выполняться условие

$$F_B \leq F_T/2. \quad (10)$$

Условие (9) легко реализуется на практике. Проведение же измерений на низких и сверхнизких частотах связано с определенными техническими трудностями. Поэтому требование, предъявляемое к нижней частоте анализа, не всегда может быть выполнено. Оценим величину возможной ошибки, связанной с нарушением неравенства (10).

Допустим, что нарастание спектра фазовых флуктуаций в низкочастотной части исследуемого диапазона ($F \gtrsim F_B$) характеризуется показателем степени α_3 . Информации о поведении спектра на частотах, меньших F_B , не имеется. Для оценки нестабильности частоты сигнала необходимо знание $\langle \varphi^2 \rangle_F$ вплоть до частот, хотя бы вдвое меньших F_T . Естественно предположить, что нарастание спектра флуктуаций фазы на частотах $F < F_B$ характеризуется тем же показателем α_3 , и, распространив таким образом результаты измерений в область более низких частот, произвести расчет искомой характеристики.

У некоторых генераторных устройств отмечается изменение характера нарастания $\langle \varphi^2 \rangle_F$ при уменьшении частоты. В этом случае величина дисперсии $\sigma_3^2(L, T_0, \tau)$, вычисленная в предположении постоянства параметра формы спектра, отличается от ее истинного значения. Такая ситуация возникает, когда на частотах, меньших F_B , доминирующей оказывается компонента $\langle \varphi^2 \rangle_F$, характеризующаяся иным параметром α_n , нежели компонента, определяющая поведение спектра вблизи нижней частоты анализа. Расчет дисперсии, проведенный при условии постоянства скорости низкочастотного нарастания, игнорирует присутствие спектральной компоненты вида $A_{\alpha_n} F^{-\alpha_n}$. Поэтому величина $\sigma_n^2(L, T_0, \tau)$, обусловленная флуктуациями, соответствующими этой спектральной компоненте, составляет абсолютную погрешность данного алгоритма. Относительная ошибка определяется выражением

$$\varepsilon(\alpha_n; \alpha_3) = \sigma_n^2(L, T_0, \tau) / \sigma_3^2(L, T_0, \tau).$$

Для оценки примем следующие значения параметров: $T = 1$ с,

$T_0 = \tau = 1$ мс, $F_H = 20$ Гц. Наибольшая ошибка допускается в случае, когда на частотах $F > F_H$ форма спектра фазовых флуктуаций указывала на наличие фликкерных флуктуаций частоты, в то время как на более низких частотах начинает преобладать компонента, соответствующая броуновским частотным флуктуациям. Значение оценки дисперсии в этом случае окажется заниженным: $\varepsilon(4; 3) = 9,8$. Если вблизи нижней частоты анализа наблюдаемая форма соответствовала белым флуктуациям частоты, то при преобладании на частотах $F < F_H$ броуновских флуктуаций частоты рассчитанное значение дисперсии также в несколько раз меньше ее истинного значения: $\varepsilon(4; 2) = 4$. При доминирующем влиянии на низких частотах фликкерных флуктуаций частоты относительная ошибка в определении дисперсии составит $\varepsilon(3; 2) = 0,4$. Такая же ошибка может возникнуть вследствие наличия на частотах ниже 20 Гц превалирующего вклада броуновских флуктуаций частоты в случае, если на более высоких частотах определяющими являются фликкерные флуктуации фазы, $\varepsilon(4; 1) = 0,4$. Относительная ошибка $\varepsilon(\alpha_H; \alpha_0)$ для других сочетаний α_H и α_0 при $\alpha_H > \alpha_0$ не превышает 10%.

В случае, когда спектр флуктуаций фазы на частотах $F < F_H$ нарастает медленнее, чем в низкочастотной части исследуемого диапазона ($\alpha_H < \alpha_0$), значение $\sigma_s^2(L, T_0, \tau)$, рассчитанное в предположении постоянства параметра формы спектра α , оказывается завышенным. Так, если на частотах $F \geq F_H$ параметр формы спектра равен четырем ($\alpha_0 = 4$), а на более низких частотах его значение уменьшается до трех ($\alpha_H = 3$), то вычисленная описанным способом дисперсия уходов частоты при принятых выше значениях параметров T, T_0, τ, F_H примерно в 14 раз превышает свое истинное значение.

3. Учет гармонической модуляции фазы. В спектре флуктуаций фазы генератора наряду с непрерывной частью вида (2) могут присутствовать дискретные линии, отражающие наличие паразитной гармонической модуляции фазы.

Оценим величину дисперсии $\sigma^2(L, T_0, \tau)$, обусловленную моногармонической модуляцией фазы с амплитудой B и частотой F_1 . Спектр флуктуаций фазы имеет вид $\langle \varphi^2 \rangle_F = (B^2/2) \delta(F - F_1)$, где $\delta(F)$ — дельта-функция Дирака.

Из (8), пренебрегая осцилляциями весовой функции, получим

$$\sigma^2(L, T_0, \tau) = B^2 / (2 + (2\pi F_1 \tau)^2). \quad (11)$$

При наличии в спектре флуктуаций фазы нескольких дискретных линий их суммарный вклад в величину дисперсии можно оценить, взяв сумму рассчитанных при помощи выражения (11) вкладов от каждой гармонической составляющей в отдельности.

4. Описание алгоритма расчета. Расчет дисперсии (7) сводится к вычислению интеграла (8). Для этого необходимо произвести измерение гладкой части спектра флуктуаций фазы $\langle \varphi^2 \rangle_F$ и определить частоты F_i и амплитуды B_i гармонических компонент в спектре. На рис. 1, приведенном в качестве примера, точками отмечены отсчеты по непрерывной части спектра, вертикальными линиями показаны дискретные составляющие. На рисунке принят двойной логарифмический масштаб.

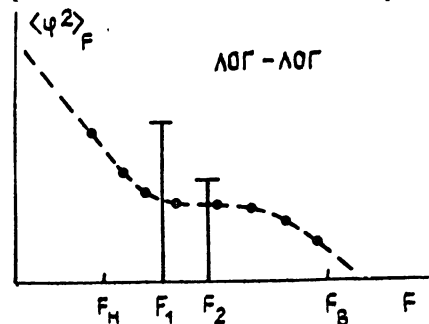


Рис. 1.

В случае нарушения требования (10), предъявляемого к диапазону измерения, и в связи с дискретностью отсчетов по частоте возникает необходимость интерполяции результатов измерений внутри исследуемого диапазона частот $[F_H; F_B]$ и их экстраполяции в область $F \ll F_H$.

Процедуру интерполяции разумно проводить по линейному алгоритму для данных, представленных в двойном логарифмическом масштабе. Экстраполяцию в область низких частот естественно проводить аналогичным образом, т. е. считать, что спектр фазовых флуктуаций на частотах, меньших F_H , имеет вид $A_0 F^{-\alpha_0}$. Величина A_0 , представляющая собой численное значение спектра флуктуаций фазы на частоте 1 ц, и параметр формы спектра α_0 определяются посредством линейной аппроксимации экспериментальных точек, расположенных вблизи нижней частоты анализа, путем использования метода наименьших квадратов. Описанные процедуры иллюстрируются на рисунке штриховой линией.

Предлагаемый алгоритм позволяет обрабатывать неэквидистантные по частоте отсчеты. Отсчеты по частоте целесообразно брать так, чтобы изменение спектра между ними не превышало 1—3 дБ. Таким образом, если в определенном диапазоне частот параметр формы спектра приблизительно постоянен, то можно ограничиться лишь двумя крайними отсчетами.

Интеграл (8) представим в виде суммы трех интегралов от непрерывной части спектра и слагаемых, характеризующих влияние гармонической модуляции фазы:

$$\sigma^2(L, T_0, \tau) = A_0 \int_0^{F_H} G(F) F^{-\alpha_0} dF + \int_{F_H}^{F_B} G(F) \langle \varphi^2 \rangle_F dF + \\ + F_B^2 \langle \varphi^2 \rangle_{F_B} \int_{F_H}^{F_B} G(F) F^{-2} dF + \sum_i \sigma_i^2.$$

Здесь σ_i^2 — вклад гармонической модуляции фазы с амплитудой B_i и частотой F_i , оцененный при помощи соотношения (11). Первый и третий интегралы, характеризующие вклад «низкочастотных» ($F < F_H$) и «высокочастотных» ($F > F_B$) флуктуаций фазы, а также интеграл по измеренной части спектра фазовых флуктуаций могут быть рассчитаны на ЭВМ при помощи стандартных методов.

В качестве примера взят спектр $\langle \varphi^2 \rangle_F = 0,5/F^3 + 0,01/F^2$. При вводе в ЭВМ значений $\langle \varphi^2 \rangle_F$ на трех частотах — 20; 50; $2 \cdot 10^3$ ц расчет привел к $\sigma_0 = 2,75$ Гц, $\alpha_0 = 2,6$. Введение дополнительно девяти промежуточных отсчетов по частоте дает $\alpha_0 = 2,67$ и $\sigma_0 = 2,1$ Гц, что отличается от исходной грубой оценки лишь на 30%.

Показано, что для корректного расчета многоотсчетной дисперсии Аллена, являющейся по существу «стандартной» оценкой дисперсии флуктуаций частоты, производимой по одной реализации, необходимо располагать информацией о спектре флуктуаций фазы сигнала в диапазоне от $F_T \sim 0,1/T$ (T — полное время обработки реализации) до $F_\tau \sim 1/\tau$ (τ — постоянная времени усредняющего устройства).

Определены ошибки, возникающие при нарушении требования, предъявляемого к низкочастотной границе измерений. Приведены примеры, показывающие, что отсутствие информации о величине спектра фазовых флуктуаций на требуемых низких частотах может привести к существенной (в несколько раз) ошибке при оценке нестабильности частоты.

Предложен алгоритм расчета, позволяющий на основе ограниченной информации о спектре фазовых флуктуаций оценить величину дисперсии уходов частоты. Простота и физическая ясность выполняемых процедур позволяют легко реализовать данный алгоритм на ЭВМ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Малахов А. Н. Флуктуации в автоколебательных системах. — М.: Наука, 1968.
2. Audoin C. // Proc. Int. School Physics Enrico Fermi. 1980. P. 169.
3. Howe D. A., Allan D. W., Barnes J. A. // Proc. 35-th Ann. Freq. Control Symp. USAERADCOM, NJ 07703, 1981.

4. Демьянченко А. Г., Кулешев В. Н. Кратковременная нестабильность частоты и методы ее измерения. — М.: МЭИ, 1978.
5. Пашев Г. П., Парфенов Г. А. // Техника средств связи, Сер. Радиозмерительная техника. 1982. Вып. 2. С. 1.
6. Wagner J. A. et al. // IEEE Trans. 1971. V. IM-20. P. 105.
7. Музычук О. В., Шепелевич Л. Г. // Изв. вузов. Радиофизика, 1974, Т. 17, № 6. С. 855.
8. Шепелевич Л. Г. Диссертация. Горький, Гос. ун-т, 1975.

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию
9 апреля 1987 г.

EVALUATION OF THE FREQUENCY NOISE VARIANCE ON THE BASIS OF THE PHASE NOISE POWER SPECTRUM

S. B. Dobrovol'skij, A. G. Pashev, A. V. Yakimov

The frequency noise variance computation method based on incomplete phase noise power spectrum data is suggested. The requirements to the analysed frequency band and to the number of spots measured within it are formulated. Errors arising due to the breach of these requirements are estimated.

ИНФОРМАЦИЯ О НОВЫХ КНИГАХ

Бек Дж., Блакуэлл Б., Сент-Клэр Ч. (мл.). Некорректные обратные задачи теплопроводности Пер. с англ. — М.: Мир, 1988 (1 кв.). — 21 л.

В книге известных специалистов из США изложены методы и вычислительные алгоритмы решения обратных задач нестационарной теплопроводности, состоящих в восстановлении тепловых граничных условий на поверхности твердого тела по данным внутренних температурных измерений. Описаны линейные и нелинейные постановки задач с привлечением для их решения аналитических соотношений и различных численных схем аппроксимации в декартовой, цилиндрической и сферической системах координат. Приведены результаты решения тестовых примеров.

Для инженеров и научных работников, а также для студентов и аспирантов соответствующих специальностей.

Квантовый эффект Холла: Пер. с англ. / Под ред. Р. Пренджа, С. Гирвина. — М.: Мир, 1989 (IV кв.). — 24 л.

Коллективная монография написана учеными, принимавшими непосредственное участие в изучении квантового эффекта Холла. В ней изложены результаты экспериментальных и теоретических исследований, делаются выводы и обобщаются задачи следующего этапа изучения этого явления. Книга включает в себя две части, посвященные соответственно целочисленному (основное внимание уделяется особенностям его экспериментального наблюдения и использования для метрологических целей) и дробному квантовому эффекту (большое внимание уделено физической природе его отличия от целочисленного эффекта).

Для специалистов по физике конденсированного состояния и смежным дисциплинам, а также для студентов и аспирантов.

Молекулярно-лучевая эпитаксия и гетероструктуры: Пер. с англ. / Под ред. Л. Ченга, К. Плога. — М.: Мир, 1989 (II кв.). — 37 л.

В коллективной монографии ведущих зарубежных ученых дано изложение физических и технологических аспектов проблемы управления электронными процессами и кристаллической структурой различных полупроводниковых материалов путем создания гетероструктур (в том числе и квантовых) методом молекулярно-лучевой эпитаксии (МЛЭ). В книге рассмотрены основные принципы МЛЭ, конкретные способы создания различных гетероструктур методом МЛЭ, электронные свойства гетероструктур, результаты по реализации приборов с гетеропереходами (гетеролазеров, фотоприемников и сверхбыстродействующих полевых транзисторов).

Для специалистов в области физики полупроводников и полупроводниковой электроники.