

УДК 517.9

СКРУЧЕННЫЙ ВИХРЬ В ВОЗБУДИМОЙ СРЕДЕ

П. К. Бражник, В. А. Давыдов, А. С. Михайлов

В рамках кинематического подхода рассмотрена динамика сложной трехмерной автоволновой структуры — скрученного вихря в возбудимой среде. Установлено увеличение его частоты вращения по сравнению с нескрученным свитком. Исследовано распространение вдоль оси вихря нелинейных волн «скрученности».

В последнее время значительный интерес вызывают явления, происходящие в распределенных активных средах. Активная среда состоит из связанных между собой автоколебательных, триггерных или возбудимых элементов, к каждому из которых подводится энергия от внешнего источника, благодаря чему происходит компенсация диссипативных процессов. Энергия может быть также запасена в среде. При этом среда остается активной до тех пор, пока не будет исчерпан энергетический запас.

Активные среды описываются уравнениями

$$\dot{\mathbf{u}} = F(\mathbf{u}) + \hat{D}\Delta\mathbf{u}, \quad (1)$$

где $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ — векторное поле, характеризующее состояние физически малых элементов среды, нелинейные функции $F(\mathbf{u})$ описывают процессы («реакции») в пределах отдельно взятого элемента, \hat{D} — матрица коэффициентов диффузии или теплопроводности. К уравнениям типа (1) сводятся модели активных сред, рассмотренные в [1–4], описывающие, в частности, процессы в газоразрядной или электронно-дырочной плазме [1–3] или среде с химической реакцией Белоусова—Жаботинского [4]. Компоненты вектора \mathbf{u} при этом имеют смысл локальной температуры среды либо концентраций носителей заряда или химических реагентов.

Особый интерес представляет исследование автоволновых процессов в возбудимых средах. В возбудимой среде имеется единственное однородное состояние покоя, устойчивое относительно достаточно малых возмущений. Возмущения большей интенсивности приводят к генерации в среде бегущего импульса, после прохождения которого среда возвращается к исходному состоянию покоя. В возбудимой среде могут циркулировать спиральные волны — устойчивые образования с ненулевым топологическим зарядом.

Исследование автоволновых структур в активных средах сводится к решению системы (1) нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. Существующие к настоящему времени аналитические методы расчета автоволновых режимов, особенно в двумерных и трехмерных случаях, достаточно сложны и имеют весьма ограниченную область применимости.

В работах [5, 6] предложен кинематический подход к описанию автоволновых процессов в активных средах, во многих случаях существенно упрощающий расчеты характеристик автоволн в двумерных и трехмерных средах. Ниже кинематический подход будет применен к исследованию динамики сложной трехмерной автоволновой структуры — скрученного вихря.

При кинематическом описании автоволновых процессов в двумерных возбудимых средах автоволна полностью задается указанием кривой ее фронта. Каждый участок фронта смещается с течением времени по нормали со скоростью V , зависящей от геодезической кривизны k на этом участке. При малых кривизнах зависимость скорости V от кривизны фронта k линейна: $V = V_0 - Dk$, где V_0 — скорость плоского фронта. Помимо смещения в нормальном направлении свободный конец волны, возникающий вследствие возможного обрыва волнового фронта, может сокращаться или «прорастать» со скоростью C , зависящей от кривизны фронта $k(0)$ при подходе к свободному концу. Имеется критическое значение кривизны фронта $k(0) = k_{кр}$, при котором свободный конец не сокращается и не «прорастает». При кривизнах, близких к $k_{кр}$, скорость прорастания $C = \gamma(k_{кр} - k(0))$. Форма фронта на двумерной поверхности может быть задана натуральным уравнением $k = k(l)$, связывающим геодезическую кривизну k линии фронта и длину дуги l , которую удобно отсчитывать от свободного конца волны. При распространении фронта его кривизна зависит также от времени t . Зависимость $k(l, t)$ описывается уравнением [6]

$$\frac{\partial k}{\partial t} \left[\int_0^l kV dl + C \right] + \frac{\partial k}{\partial t} + k^2 V + \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -KV, \quad (2)$$

где K — гауссова кривизна поверхности, по которой распространяются автоволны. Уравнение (2) является основным уравнением кинематической модели и позволяет проследить различные режимы движения автоволновых фронтов.

Стационарным решением уравнения (2) на плоскости ($K=0$) является спиральная волна. В случае, когда возбудимость среды невелика (в кинематической модели это означает, что $Dk_{кр} \ll V_0$), частота вращения спиральной волны равна

$$\omega_0 = \xi (DV_0)^{1/2} k_{кр}^{3/2}, \quad (3)$$

где $\xi \approx 0,685$. Волна вращается вокруг круглого ядра радиуса $R_0 \approx V_0/\omega_0$, внутри которого среда не возбуждается.

Кинематический подход может быть обобщен на случай трехмерных возбудимых сред. Как и в двумерном случае, пренебрежем толщиной автоволнового фронта, считая, что последний описывается искривленной поверхностью в трехмерном пространстве. Каждый участок фронта смещается по нормали со скоростью V , зависящей от средней кривизны фронта H . Для слабо искривленных поверхностей эта зависимость линейна, $V = V_0 - 2DH$.

Поверхность фронта может быть оборвана по некоторой линии. Участки поверхности, непосредственно примыкающие к обрыву, испытывают также тангенциальное смещение со скоростью C . Скорость прорастания C описывается следующим выражением [12]:

$$C = \gamma_1(k_{кр} - 2H(0)) + \gamma_2\kappa, \quad (4)$$

где $H(0)$ — средняя кривизна фронта при подходе к обрыву, κ — геодезическая кривизна линии обрыва.

Автоволновые структуры в трехмерных активных средах чрезвычайно разнообразны. Простейшей из них является прямой цилиндрический свиток, который образуется, если продолжить спиральную волну, вращающуюся на плоскости, вдоль прямой, перпендикулярной этой плоскости. Роль ядра (т. е. области, где активная среда находится в состоянии покоя) у свитка играет цилиндр, ось которого называется нитью вихря. Угловая скорость вращения прямого свитка такая же, как и у спиральной волны на плоскости, и описывается выражением (3). Нить свитка может быть деформирована и, в частности, замкнута в окружность. Вихревое кольцо, которое при этом образуется, исследо-

валось в численных экспериментах [7]. Оно оказывается неустойчивым, и его динамика хорошо объясняется в рамках кинематического описания [12].

Введем систему координат с осью z , совпадающей с нитью прямого свитка, а положительное направление которой определяется вектором угловой скорости ω_0 . Линия обрыва волнового фронта для прямого свитка — прямая, лежащая на поверхности цилиндра-ядра и параллельная его нити (т. е. оси z).

Если линия обрыва фронта не прямая, а представляет собой винтовую линию, намотанную на цилиндр-ядро, мы получим так называемый «скрученный вихрь» (см. рис. 1), «скрученность» которого можно характеризовать параметром $\mu = 2\pi/h$, где h — шаг винтовой линии. Для неоднородно скрученных вихрей более удобным является следующее определение $\mu(z) = d\alpha/dz$, где α — азимутальный угол, определяющий положение соответствующего участка винтовой линии обрыва на цилиндре-ядре. В зависимости от того, является ли винтовая линия обрыва правой или левой, скрученность μ будет соответственно либо положительной, либо отрицательной.

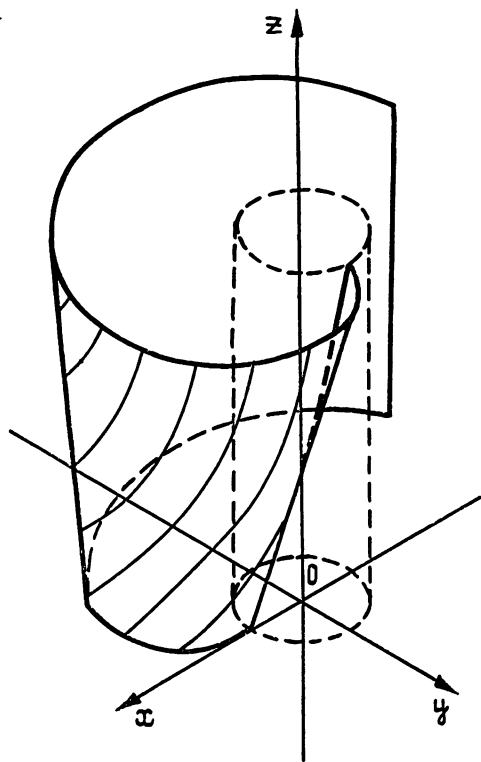


Рис. 1.

Рассмотрим вначале динамику однородно скрученного вихря ($\mu = \text{const}$). В теории поверхностей такого типа структуры носят название геликоида — фигуры, образованной некоторой линией (профилем), вращающейся около оси z и одновременно поступательно движущейся в направлении этой оси, причем скорости этих движений пропорциональны.

Очевидно, что для полного описания поверхности геликоида достаточно задать форму профиля и скрученность μ (или, что то же самое, шаг h винтовой линии обрыва).

Ниже мы будем рассматривать слабо скрученные вихри, ограничиваясь исследованиями линейных по μ эффектов.

Рассмотрим сечение вихря плоскостью $z = \text{const}$. Линия в этом сечении представляет собой профиль геликоида. Очевидно эволюция профиля описывается уравнением (2) при $K = 0$, где k — кривизна линии профиля, а скорость V в нашем приближении слабо скрученного вихря не зависит от μ (первая поправка к скорости за счет скрученности пропорциональна μ^2).

Поскольку $\mu = \text{const}$, форма профиля в сечении $z = \text{const}$ не зависит от времени. Поэтому задача об определении угловой скорости вращения скрученного вихря (в линейном по μ приближении) свелась к исследованному ранее вопросу о вращении спиральной волны на плоскости. Таким образом, частота вращения скрученного вихря дается выражением (3), в котором $k_{\text{кр}}$ заменено на $k(0)$, где $k(0)$ — кривизна линии профиля при подходе к ядру вихря. Кривизну $k(0)$ найдем из условия равенства нулю скорости прорастания S . Используя стандартные методы теории поверхностей [8], получим, что средняя кривизна геликоида при подходе к ядру равна $H(0) = (1/2)k(0)$, а тангенциальная кривизна винтовой линии обрыва $-\kappa = |\mu|$. Подставляя

полученные кривизны в (4) и приравнявая C к нулю, получим кривизну линии профиля $k(0)$

$$k(0) = k_{кр} + \frac{\gamma_2}{\gamma_1} |\mu|. \quad (5)$$

Отсюда с учетом (3) получим выражение для угловой скорости вращения скрученного вихря

$$\omega = \omega_0 \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \frac{1}{k_{кр}} |\mu| \right) \quad (6)$$

и радиус ядра

$$R = R_0 \left(1 - \frac{3}{2} \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \frac{1}{k_{кр}} |\mu| \right). \quad (7)$$

Таким образом, угловая скорость вращения скрученного вихря оказывается выше, чем у простого свитка. Увеличение частоты вращения наблюдалось в численных экспериментах [9], однако объяснения, которые давались этому явлению, без оснований предполагали, что радиус ядра скрученного вихря такой же, как и у нескрученного, и приводили не к линейной, а к квадратичной зависимости ω от μ .

Перейдем теперь к исследованию динамики неоднородно скрученных вихрей. Пусть в начальный момент времени $\mu = F(z)$. Как следует из (6), участки вихря с различными значениями μ будут вращаться с разными угловыми скоростями, что приведет к изменению скрученности. Используя (6), нетрудно получить уравнение, описывающее зависимость μ от координаты z и времени t :

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} = u \operatorname{sgn}(\mu) \frac{\partial \mu}{\partial z}, \quad (8)$$

где $u = \frac{3}{2} \frac{\gamma_2 \omega_0}{\gamma_1 k_{кр}}$. Это своеобразное нелинейное уравнение, относящееся к классу уравнений, описывающих так называемые кинематические волны [10], имеет следующее решение:

$$\mu = F(z + \operatorname{sgn}(\mu) ut). \quad (9)$$

Рассмотрение решения (9) показывает, что если в начальный момент времени вихрь скручен неоднородно, то по нему побегут «волны скрученности». Начальные возмущения скрученности, имеющие разные знаки, распространяются вдоль вихря в противоположных направлениях со скоростью u , и при их столкновениях образуются разрывы (или ударные волны).

В заключение отметим, что динамика однородно скрученного вихря в модели Ринцеля — Келлера рассматривалась в [11], где также было показано, что угловая скорость его вращения увеличивается.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кернер Б. С., Осипов В. В. // ЖЭТФ. 1978. Т. 74. № 5. С. 1675; 1980. Т. 79. № 6. С. 2218.
2. Кернер Б. С., Осипов В. В. // Микроэлектроника. 1981. Т. 10. № 5. С. 407.
3. Балкарей Ю. И., Никулин М. Г., Елинсон М. И. // Сб.: Автоволновые процессы в системах с диффузией. — Горький: ИПФ АН СССР, 1981. С. 117.
4. Жаботинский А. М. Концентрационные автоколебания. — М.: Наука, 1974. — 250 с.
5. Давыдов В. А., Михайлов А. С. // Сб. «Нелинейные волны». — М.: Наука. 1987. С. 261.
6. Бражник П. К., Давыдов В. А., Михайлов А. С. // ТМФ. 1988. Т. 74. № 3. С. 440.
7. Панфилов А. В., Руденко А. Н., Кринский В. И. // Биофизика. 1986. Т. 31. Вып. 5. С. 850.

8. Каган В. Ф. Основы теории поверхностей. — М.: ОГИЗ, 1948. Т. 1.
9. Кринский В. И., Медвинский А. Б., Панфилов А. В. Эволюция автоволновых вихрей. — М.: Знание, 1986.
10. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. — М.: Мир, 1977. — 622 с.
11. Mikhailov A. S., Panfilov A. V., Rudenko A. N. // Phys. Lett. 1985. V. 109A. P. 246.
12. Бражник И. К., Давыдов В. А., Зыков В. С., Михайлов А. С. // ЖЭТФ. 1987. Т. 93. № 11. С. 1725.

Московский государственный
университет

Поступила в редакцию
22 мая 1987 г.

SCROLL VORTEX IN EXCITABLE MEDIA

P. K. Brazhnik, V. A. Davydov, A. S. Mikhailov

In the framework of the kinematic approach we consider a dynamics of twisted scroll in excitable media. The increase of its frequency as compared with untwisted scroll is established. The propagation of nonlinear «twist wave» along the vortex axis is investigated.

ИНФОРМАЦИЯ О НОВЫХ КНИГАХ

Никольский В. В., Никольская Т. И. Электродинамика и распространение радиоволн: Учеб. пособие. — 3-е изд., перераб. и доп. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989 (1 кв.). — 35 л.

Излагается теория электромагнетизма с акцентом на радиотехническую электродинамику и анализ волновых процессов. Рассматриваются отражение и преломление волн, излучение, дифракция, процессы в полых и диэлектрических волноводах, резонаторах, периодических, квазиоптических и иных структурах, в интегральных схемах СВЧ и пр. Обсуждаются методы математического моделирования в электродинамике, опирающиеся на ЭВМ. Отличительной особенностью книги является большое число картин электромагнитных полей, рассчитанных и построенных на ЭВМ.

2-е изд. — 1978 г.

Для студентов радиотехнических специальностей, а также инженеров—радиотехников и радиофизиков.

Черные дыры: Мембранный подход: Пер. с англ. / Под ред. К. Торна, Р. Прайса, Д. Мак-Доналда. — М.: Мир, 1989 (1 кв.). — 26 л.

В книге подробно изложен так называемый мембранный подход к анализу физических свойств и астрофизических проявлений «черных дыр». В этом подходе «черная дыра» рассматривается как обычное тело, границей которого является горизонт «черной дыры», наделенный такими физическими свойствами, как электропроводность, индуктивность и т. д. В результате удается описать явления в гравитационном поле «черной дыры» на языке магнитной гидродинамики и физики плазмы.

Для специалистов в области теоретической физики, астрофизики, прикладной математики, физики плазмы и магнитной гидродинамики, а также аспирантов и студентов.