ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том 32, № 2 РАДИОФИЗИКА 1989

УДК 621.372.8

КОРОТКОВОЛНОВАЯ АСИМПТОТИКА ВЫСШИХ МОД ПЛАВНОНЕРЕГУЛЯРНОГО ВОЛНОВОДА

А. Д. Авдеев

Предлагается модификация метода плавных возмущений, обобщающего концепцию Бриллюэна.

Одним из наиболее эффективных методов построения асимптотики высших мод плоских плавнонерегулярных многомодовых волноводов с отражающими стенками является разработанный Поповым метод плавных возмущений [1, 2]. В этом методе, обобщающем концепцию Бриллюэна, поле нормальной волны представляется суперпозицией двух квазиплоских волн, и задача сводится к интегрированию уравнений эйконала и переноса, решения которых строятся в виде разложений по малому параметру плавности, характеризующему медленность изменения свойств волновода.

Методом плавных возмущений в [1, 2] найдены выражения для полей высших мод с погрешностью в фазе на нерегулярном участке, пропорциональной третьей степени параметра плавности. Но для описания экспоненциально малых эффектов трансформации мод на аналитических переходах [2] в данном методе приходится применять искусственные приемы [3].

В настоящей работе, основные идеи которой были сформулированы в докладе [4], рассматривается модификация метода плавных возмущений, отличающаяся от метода Попова используемой системой криволинейных координат и способом построения решения уравнений эйконала, позволяющим легко описать экспоненциально малые эффекты трансформации мод. Выводится выражение для поля распространяющихся высших мод с погрешностью в фазе, пропорциональной пятой степени параметра плавности. Это выражение было получено в [5] более сложным методом [6], являющимся модификацией предложенного Боровиковым [7, 2] метода асимптотического интегрирования волноводных уравнений.

1. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ КООРДИНАТЫ

Рассмотрим плоский волновод с однородным заполнением, образованный гладкими кривыми L и L_1, уходящими на бесконечность, поле в котором удовлетворяет уравнению Гельмгольца и условиям Дирихле на L и L_1. Пусть n — длина нормали, опущенной на L, а s — длина L до основания нормали [8]. Кривая L_1 лежит слева от L и задана уравнением $n=h(s)>0$. Радиус кривизны $\rho(s)$ кривой L считаем положительным, если центр кривизны расположен справа от L.

Предполагаем, что функции $h(s)$ и $\rho^{-1}(s)$, полностью определяющие размеры и форму волновода, удовлетворяют условиям

$$h^{m-1}\frac{d^m h}{ds^m}=O(\varepsilon^m),\quad h^{m+1}\frac{d^m}{ds^m}\frac{1}{\rho}=O(\varepsilon^{2+m}),$$
$$\varepsilon\ll 1,\quad m=0,1,2,\ldots \tag{1.1}$$

Легко показать, что при этих условиях радиус кривизны $\rho_1(s)$ кривой L_1 связан с $\rho(s)$ следующим образом:

$$\frac{1}{\rho_1(s)}=\frac{1}{\rho(s)}-\frac{d^2 h(s)}{ds^2}+O(\varepsilon^4 h^{-1}). \tag{1.2}$$

В волноводе введем криволинейные координаты $u(s,n)$ и $v(s,n)$, являющиеся решениями уравнений Коши—Римана

$$\frac{\partial u}{\partial s}-\left(1+\frac{n}{\rho(s)}\right)\frac{\partial v}{\partial n}=0, \quad \left(1+\frac{n}{\rho(s)}\right)\frac{\partial u}{\partial n}+\frac{\partial v}{\partial s}=0 \tag{1.3}$$

с граничными условиями

$$v(s,0)=0, \quad v(s,h(s))=1, \quad u(0,0)=0.$$

Очевидно, что функция $w=u+iv$ конформно отображает исходную область, ограниченную кривыми L и L_1, на прямолинейную полосу $0\leqslant v\leqslant 1$, $-\infty<u<\infty$.

Координаты $u(s,n)$ и $v(s,n)$ ищем в виде разложений

$$u(s,n)=\sum_{m\geqslant 0} u^{(2m-1)}(s,n), \quad v(s,n)=\sum_{m\geqslant 0} v^{(2m)}(s,n), \tag{1.4}$$

предполагая, что выполняются оценки

$$\begin{gathered}\frac{\partial u^{(2m-1)}}{\partial s}=O(\varepsilon^{2m}h^{-1}), \quad \frac{\partial u^{(2m-1)}}{\partial n}=O(\varepsilon^{2m-1}h^{-1}),\\ \frac{\partial v^{(2m)}}{\partial s}=O(\varepsilon^{2m+1}h^{-1}), \quad \frac{\partial v^{(2m)}}{\partial n}=O(\varepsilon^{2m}h^{-1}).\end{gathered} \tag{1.5}$$

Подстановка разложений (1.4) в уравнения (1.3) с учетом оценок (1.5) и $h\rho^{-1}=O(\varepsilon^2)$ приводит к рекуррентной системе уравнений для $u^{(2m-1)}$ и $v^{(2m)}$, которая легко интегрируется с начальными условиями

$$u^{(2m-1)}(s,0)=\int_0^s h^{-1}(t)\, f^{(2m)}(t)\, dt, \quad v^{(2m)}(s,0)=0.$$

При этом функции $f^{(2m)}(s)=O(\varepsilon^{2m})$ определяются из условий $v^{(2m)}(s,h(s))=\delta_{0m}$, где δ_{nm} — символ Кронекера.

Ограничиваясь в разложениях (1.4) членами с $m=0,1$, получаем

$$\begin{gathered}u(s,n)=\int_0^s h^{-1}(t)\,(1+f^{(2)}(t))\, dt+\frac{1}{2}h'q^2+O(\varepsilon^3),\\ v(s,n)=q+f^{(2)}q-\frac{h}{2\rho}q^2-\frac{1}{3}h'^2q^3+\frac{1}{6}hh''q^3+O(\varepsilon^4),\\ q\equiv\frac{n}{h(s)}, \quad f^{(2)}=\frac{h}{2\rho}+\frac{1}{3}h'^2-\frac{1}{6}hh''.\end{gathered} \tag{1.6}$$

Можно показать, что в (1.4) функции $u^{(2m-1)}(s,n)$ являются полиномами от q степени $2m$ с коэффициентами порядка $O(\varepsilon^{2m-1})$ (при оценке свободных членов считаем, что $s=O(\varepsilon^{-1}h)$), а $v^{(2m)}(s,n)$ — полиномами степени $2m+1$ с коэффициентами порядка $O(\varepsilon^{2m})$.

Уравнение Гельмгольца в координатах u и v имеет вид

$$\frac{\partial^2 G}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 G}{\partial v^2}+k^2h_0^2(u)N^2(u,v)G=0, \quad G|_{v=0,1}=0. \tag{1.7}$$

Здесь $h_0^2(u)N^2(u,v)=[(\partial u/\partial n)^2+(\partial v/\partial n)^2]^{-1}$, и введено обозначение $F_0(u)\equiv F(s(u,v))|_{v=0}$.

Используя асимптотики (1.6) и соотношение [5]

$$h^2(s)=h_0^2(u)[1-h_0'^2(u)v^2+O(\varepsilon^4)],$$

находим квадрат эффективного показателя преломления

$$N^2(u,v)=1-2f_0^{(2)}(u)+\frac{2h_0(u)}{\rho_0(u)}v-h_0(u)h_0''(u)v^2+O(\varepsilon^4). \tag{1.8}$$

Оказывается, что $N^2(u,v)$ раскладывается в асимптотический ряд по четным степеням параметра плавности $\varepsilon\ll 1$, причем члены порядка $O(\varepsilon^{2m})$ являются полиномами от v степени $2m$. Явное выражение для члена $O(\varepsilon^4)$ приведено в [5].

2. АДИАБАТИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

В дальнейшем предполагаем, что параметры волновода при $|u|\to\infty$ достаточно быстро стремятся к предельным значениям $h_0^2(\pm\infty)N^2(\pm\infty,v)=\text{const}$, а нерегулярный участок имеет длину порядка $O(\varepsilon^{-1})$. Считаем также, что $kh\gg 1$, т. е. волновод многомодовый. Френелевский параметр εkh может принимать любые значения.

Решение уравнения (1.7), соответствующее задаче рассеяния моды номера m, падающей на нерегулярный участок, следуя [1], назовем нормальной волной нерегулярного волновода и обозначим $G_m(u,v)$.

В адиабатическом приближении распространяющиеся моды, падающие слева на нерегулярный участок, имеют вид

$$G_m(u,v)=\nu_m^{-1/4}(u)\exp\left(ik\int_0^u\sqrt{\nu_m(t)}\,dt\right)\psi_m(u,v), \tag{2.1}$$

$$\nu_m(u)>0,$$

где $\psi_m(u,v)$ и $\nu_m(u)$ — нормированные собственные функции и собственные значения поперечного оператора

$$\frac{\partial^2\psi_m}{\partial v^2}+k^2h_0^2(u)N^2(u,v)\psi_m=k^2\nu_m(u)\psi_m,$$

$$\psi_m|_{v=0,1}=0,\qquad \int_0^1\psi_m\psi_n\,dv=\delta_{mn},\qquad m=1,2,\ldots \tag{2.2}$$

Найдем решение задачи (2.2) для высших мод. Высшими называем моды тех номеров m, для которых при $0\leqslant v\leqslant 1$, $-\infty<u<\infty$ выполняются условия

$$h_0^2(u)N^2(u,v)>\nu_m(u),\qquad h_0^2(u)N^2(u,v)-\nu_m(u)=O(\varepsilon^{2\alpha}h^2),$$

$$\alpha<1, \tag{2.3}$$

означающие, что в задаче на собственные значения (2.2) нет точек поворота и ее решение может быть построено методом ВКБ.

В ВКБ-приближении имеем

$$\psi_m(u,v)=\frac{c_m(u)}{\sqrt[4]{h_0^2(u)N^2(u,v)-\nu_m(u)}}\sin\left(k\int_0^v\sqrt{h_0^2(u)N^2(u,t)-\nu_m(u)}\,dt\right). \tag{2.4}$$

Собственные значения $\nu_m(u)$ являются корнями уравнения

$$\int_0^1 \sqrt{h_0^2(u)N^2(u,v)-\nu_m(u)}\,dv=M, \qquad M\equiv\frac{\pi m}{k}. \tag{2.5}$$

Из этого уравнения и второго условия (2.3) следует, что распространяющимся высшим модам, не имеющим критических сечений, отвечают номера $m=O(\varepsilon^{\alpha}kh)$, $0<\alpha<1$.

Введем представление

$$h_0^2(u)N^2(u,v)=P(u)+Q(u,v),$$

$$P(u)=h_0^2(u)\int_0^1 N^2(u,v)\,dv=h_0^2\left[1-\frac{2}{3}h_0'^2+O(\varepsilon^4)\right], \tag{2.6}$$

$$Q(u,v)=h_0^2\left[\frac{2h_0}{\rho_0}\left(v-\frac{1}{2}\right)-h_0h_0''\left(v^2-\frac{1}{3}\right)+O(\varepsilon^4)\right],$$

и будем искать решение уравнения (2.5) в виде

$$\nu_m(u)=P(u)-M^2+\sum_{n\geqslant 1}\frac{d_n(u)}{M^{2n}}. \tag{2.7}$$

Подставим (2.7) в (2.5), предполагая, что $|d_n|\ll M^{2n+2}$, разложим корень в ряд и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях M. В результате получим рекуррентную систему уравнений для d_n, из которой, в частности, находим выражение

$$d_1=-\frac{1}{4}\int_0^1 Q^2\,dv=-\frac{h_0^4}{45}\left[\frac{h_0^2}{\rho_0^2}+\frac{h_0^2}{\rho_{10}^2}+\frac{7h_0^2}{4\rho_0\rho_{10}}\right]+O(\varepsilon^6h^4),$$

в котором ρ_1 определено соотношением (1.2).

Можно показать, что $d_n=O((\varepsilon h)^{2n+2})$. Поэтому (2.7) фактически является разложением по малому параметру $\varkappa=\varepsilon h/M=\varepsilon kh/\pi m=O(\varepsilon^{1-\alpha})$, равному отношению параметра плавности ε к синусу текущего угла Бриллюэна $\beta_m=\arcsin(\pi m/kh)=O(\varepsilon^{\alpha})$.

Из условия нормировки находим

$$c_m(u)=\sqrt{2M}\,[1+d_1(u)/2M^4+O(\varkappa^6)]. \tag{2.8}$$

В низшем приближении из (2.7) и (2.6) имеем формулу

$$\nu_m(u)=h_0^2(u)\left[1-\frac{2}{3}h_0'^2(u)\right]-M^2+O(\varkappa^2\varepsilon^2h^2), \tag{2.9}$$

используя которую, легко показать, что первое условие (2.3) выполняется при $m\geqslant 1$, если

$$\frac{2k^2h^2}{3\pi^2}\left(\left|\frac{h}{\rho}\right|+\left|\frac{h}{\rho_1}\right|\right)<1, \qquad -\infty<s<\infty.$$

Это есть ориентировочная оценка диапазона частот, в котором все моды волновода являются высшими.

Подставив в адиабатическое приближение (2.1) выражения (2.4), (1.8), (2.9), (2.8) и возвращаясь к переменным s и n с помощью (1.6), получим [5] представление для поля нормальной волны нерегулярного волновода, эквивалентное построенному в [1, 2] методом плавных возмущений с учетом четырех членов разложения эйконала по степеням ε.

3. МЕТОД ПЛАВНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

1. При нахождении поправок к адиабатическому приближению, обусловленных нерегулярностью волновода, от задачи (1.7), заданной в полосе $0 \leqslant v \leqslant 1$, перейдем к задаче во всем пространстве. С этой целью функцию $Q(u, v)$, введенную в (2.6), продолжим следующим образом:

$$Q(u, v) = Q(u, -v) = Q(u, v+2) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q_n(u) e^{i\pi n v},$$

$$q_0 = 0, \quad q_n = -\frac{2}{\pi^2 n^2}\left[\frac{h_0^3}{\rho_0} - (-1)^n \frac{h_0^3}{\rho_{10}} + O(\varepsilon^4 h^2)\right].$$

Пусть $G_m^0(u, v)$ — решение уравнения

$$\frac{\partial^2 G_m^0}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 G_m^0}{\partial v^2} + k^2[P(u) + Q(u, v)]\, G_m^0 = 0, \tag{3.1}$$

соответствующее задаче рассеяния плоской волны, падающей из $u = -\infty$ под углом, равным углу Бриллюэна моды номера m левого регулярного участка.

Очевидно, что $G_m^0(u, v)$ — периодическая функция v, т. е. $G_m^0(u, v+2) = G_m^0(u, v)$. Из четности по v функции $Q(u, v)$ следует, что $G_m^0(u, -v)$ удовлетворяет уравнению (3.1), и поэтому

$$G_m(u, v) = G_m^0(u, v) - G_m^0(u, -v) \tag{3.2}$$

является решением задачи (1.7).

Соотношение (3.2) есть исходная идея метода плавных возмущений, обобщающего концепцию Бриллюэна.

2. Решение уравнения (3.1), отвечающее распространяющейся высшей моде номера $m = O(\varepsilon^\alpha kh)$, $0 < \alpha < 1$, не имеющей критических сечений, будем искать в виде [8]

$$G_m^0(u, v) = e^{ik\tau(u, v)} \sum_{n>0} \frac{A_n(u, v)}{(ik)^n}, \tag{3.3}$$

предполагая выполненным начальное условие

$$G_m^0(u, v) \to \nu_m^{-1/4}(u) \exp\left[ik\left(\int_0^u \sqrt{\nu_m}\, du + Mv\right)\right], \quad u \to -\infty. \tag{3.4}$$

Эйконал τ и амплитуда A_0 определяются из уравнений [8]

$$\left(\frac{\partial \tau}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \tau}{\partial v}\right)^2 = P(u) + Q(u, v); \tag{3.5}$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial u}\frac{\partial A_0}{\partial u} + \frac{\partial \tau}{\partial v}\frac{\partial A_0}{\partial v} + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 \tau}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \tau}{\partial v^2}\right] A_0 = 0, \tag{3.6}$$

которые интегрируются с начальными условиями

$$\tau(u, v) \to \int_0^u \sqrt{\nu_m}\, du + Mv, \quad u \to -\infty; \tag{3.7}$$

$$A_0(u, v) \to \nu_m^{-1/4}(u), \quad u \to -\infty, \tag{3.8}$$

вытекающими из (3.4).

3. Пусть $\varphi_m(u, v) = \int\limits_0^v \sqrt{P(u)+Q(u,t) - \nu_m(u)}\, dt$. Введем в рассмотрение нечетную периодическую функцию

$$\chi_0(u, v) = \varphi_m(u, v) - Mv = \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \xi_n(u) e^{i\pi n v}, \tag{3.9}$$

$$\xi_n(u) = \frac{i}{\pi^3 n^3 M}\left[\frac{h_0^3}{\rho_0} - (-1)^n \frac{h_0^3}{\rho_{10}} + O(\varkappa^2 \varepsilon^2 h^2)\right] = O\left(\frac{\varkappa\varepsilon h}{n^3}\right),$$

и ее первообразные

$$\chi_p(u, v) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{\xi_n(u)}{(i\pi n)^p} e^{i\pi n v}, \quad p \geqslant 0, \tag{3.10}$$

с нулевыми средними значениями, являющиеся нечетными функциями v при $p=2q$ и четными при $p=2q+1$.

Эйконал ищем в виде

$$\tau(u, v) = \int\limits_0^u \sqrt{\nu_m}\, du + Mv + \eta(u, v),$$

где $\eta(u, v)$ — периодическая функция v. Из уравнения (3.5) и начального условия (3.7) получаем для η следующую задачу:

$$\frac{\partial\eta}{\partial u} + \mu\frac{\partial\eta}{\partial v} = \mu\frac{\partial\chi_0}{\partial u} + \frac{1}{2\sqrt{\nu_m}}\left[\left(\frac{\partial\chi_0}{\partial v}\right)^2 - \left(\frac{\partial\eta}{\partial u}\right)^2 - \left(\frac{\partial\eta}{\partial v}\right)^2\right],$$
$$\eta(-\infty, v) = 0, \tag{3.11}$$

в которой $\mu(u) = M\nu_m^{-1/2}(u) \approx \operatorname{tg}\beta_m(u) = O(\varepsilon^\alpha)$.

Решение уравнения (3.11) построим методом возмущений, заменяя формально χ_0 на $\sigma\chi_0$ и вводя разложение $\eta = \sum\limits_{n\geqslant 1} \sigma^n \eta_n$. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях σ, находим последовательность линейных уравнений

$$\frac{\partial\eta_n}{\partial u} + \mu(u)\frac{\partial\eta_n}{\partial v} = f_n(u, v), \quad \eta_n(-\infty, v) = 0, \quad n \geqslant 1,$$

с известными функциями f_n, после чего полагаем $\sigma = 1$.

Первое приближение имеет вид

$$\eta_1(u, v) = \chi_0(u, v) - \int\limits_{-\infty}^u \chi_{0t}\left(t, v - \int\limits_t^u \mu(y)\,dy\right) dt,$$

где $\chi_{0t}(t, v) \equiv (\partial/\partial t)\chi_0(t, v) = O(\varkappa\varepsilon^2 h)$.

Можно показать, что $\eta_2 = O(\varkappa^4\varepsilon h)$, поэтому

$$\tau(u, v) = \int\limits_0^u \sqrt{\nu_m}\, du + \varphi_m(u, v) - \int\limits_{-\infty}^u \chi_{0t}\left(t, v - \int\limits_t^u \mu(y)\,dy\right) dt + O(\varkappa^4\varepsilon h). \tag{3.12}$$

Интегрируя по частям, получаем

$$\tau = \int\limits_0^u \sqrt{\nu_m}\, du + \varphi_m - \frac{\sqrt{\nu_m}}{M}\frac{\partial\chi_1}{\partial u} + \frac{\sqrt{\nu_m}}{M^2}\frac{\partial}{\partial u}\sqrt{\nu_m}\frac{\partial\chi_2}{\partial u} + O(\varkappa^4\varepsilon h). \tag{3.13}$$

Это фактически асимптотическое разложение эйконала на нерегулярном участке по параметру $\varkappa = O(\varepsilon^{1-\alpha})$, так как, во-первых, в силу условий (1.1) для всех встречающихся функций F выполняются оценки $\partial F/\partial u = O(\varepsilon F)$ и, во-вторых, $M = O(\varepsilon^{\alpha} h)$ и $\nu_m = O(h^2)$.

Два первых слагаемых в (3.12) и (3.13) соответствуют адиабатическому приближению, а остальные учитывают нерегулярность волновода и пренебрежимо малы при $\varkappa^2 \varepsilon k h \ll 1$.

Явный вид входящих в (3.13) функций χ_p легко определяется из (3.10), (3.9). Например, при $0 \leqslant v \leqslant 1$

$$\chi_2(u, v) = -\frac{1}{120M}\left\{\frac{h_0^3}{\rho_0}\left[(v-1)^5 - \frac{10}{3}(v-1)^3 + \frac{7}{3}(v-1)\right] - \right.$$

$$\left. - \frac{h_0^3}{\rho_{10}}\left[v^5 - \frac{10}{3}v^3 + \frac{7}{3}v\right]\right\} + O(\varkappa^2 \varepsilon h),$$

и очевидно, что $\chi_p = \partial \chi_{p+1}/\partial v$.

4. Покажем, что амплитуда A_0 выражается через производные от эйконала τ. Вместо A_0 введем новую неизвестную

$$B(u, v) = \left(\frac{\partial \tau(u, v)}{\partial u}\right)^{1/2} A_0(u, v), \tag{3.14}$$

удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial B}{\partial u} + t(u, v)\frac{\partial B}{\partial v} + \frac{1}{2}\frac{\partial t(u, v)}{\partial v} B = 0, \quad B(-\infty, v) = 1,$$

в котором $t = (\partial\tau/\partial v)(\partial\tau/\partial u)^{-1}$ — тангенс угла наклона луча.

Рассмотрим задачу Коши

$$dv/du = t(u, v), \quad v|_{u=u_0} = v_0, \tag{3.15}$$

где $u_0 \ll -1$ принадлежит левому регулярному участку волновода. Решение этой задачи $v(u, v_0)$ является уравнением луча, выходящего из точки u_0, v_0.

Легко показать, что вдоль луча

$$B(u, v(u, v_0)) = [\partial v(u, v_0)/\partial v_0]^{-1/2}. \tag{3.16}$$

Из уравнений (3.5) и (3.15) следует, что производная $\dfrac{\partial \tau}{\partial M}$ постоянна вдоль луча, т. е.

$$\frac{\partial \tau(u, v(u, v_0))}{\partial M} = \frac{\partial \tau(u_0, v_0)}{\partial M}.$$

Продифференцируем это тождество по v_0 и, учитывая равенство

$$\frac{\partial^2 \tau(u_0, v_0)}{\partial M \partial v_0} = 1,$$

вытекающее из условия (3.7), найдем $\partial v(u, v_0)/\partial v_0$, а затем из (3.16) и (3.14) получим искомую формулу для решения задачи (3.6), (3.8)

$$A_0(u, v) = \left[\frac{\partial^2 \tau(u, v)}{\partial M \partial v}\left(\frac{\partial \tau(u, v)}{\partial u}\right)^{-1}\right]^{1/2} = \left[-\frac{\partial^2 \tau(u, v)}{\partial M \partial u}\left(\frac{\partial \tau(u, v)}{\partial v}\right)^{-1}\right]^{1/2}. \tag{3.17}$$

Второе равенство (3.17) следует из первого и уравнения (3.5).

В формулах (3.17) аргумент $v(u, v_0)$ заменен на v, что обосновано, если в каждую точку приходит один луч. Но это предположение уже неявно использовано в представлении (3.3).

Подставим в (3.17) разложение (3.13), в первом члене которого положим

$$\nu_m(u) = P(u) - M^2 + \frac{d_1(u)}{M^2} + O\left(\frac{\varepsilon^6 h^6}{M^4}\right),$$

и найдем амплитуду на нерегулярном участке

$$A_0 = \nu_m^{-1/4}\,[P+Q-\nu_m]^{-1/4} M^{1/2}\left[1+\frac{d_1}{2M^4}+O(\varkappa^6)\right][1+a],$$

$$a = \frac{\sqrt{\nu_m}}{M^2}\frac{\partial\chi_0}{\partial u} - \frac{3\sqrt{\nu_m}}{2M^3}\frac{\partial}{\partial u}\sqrt{\nu_m}\frac{\partial\chi_1}{\partial u} - \frac{\sqrt{\nu_m}}{2M}\frac{\partial}{\partial u}\frac{1}{\sqrt{\nu_m}}\frac{\partial\chi_1}{\partial u} + O(\varkappa^5). \tag{3.18}$$

Сравнивая (3.18) с амплитудным множителем в адиабатическом приближении (2.1), (2.4), (2.8), видим, что член $a(u,v)=O(\varkappa^3)$ обусловлен нерегулярностью волновода.

5. Теперь из (3.2), (3.3) и (3.18) легко находим главный по k член асимптотики поля высшей моды

$$G_m(u,v) = 2i\sqrt{M}\left(1+\frac{d_1(u)}{2M^4}+O(\varkappa^6)\right)\left(\sqrt[4]{P(u)+Q(u,v)-\nu_m(u)}\,\sqrt[4]{\nu_m(u)}\right)^{-1}\times$$

$$\times e^{ik\tau^+(u,v)}\left[(1+a^+(u,v))\sin(k\tau^-(u,v)) - ia^-(u,v)\cos(k\tau^-(u,v))\right], \tag{3.19}$$

$$\tau^\pm(u,v) = \frac{1}{2}\left[\tau(u,v)\pm\tau(u,-v)\right], \qquad a^\pm(u,v) = \frac{1}{2}\left[a(u,v)\pm a(u,-v)\right].$$

Область применимости построенного решения, структура которого была предсказана в [1], определяется погрешностью эйконала. Например, при использовании первого приближения (3.13), позволившего получить главные члены всех поправок к адиабатическому приближению, эта область задается неравенством $\varkappa^4\varepsilon kh \ll 1$. Для ее расширения необходимо получить более точные выражения для эйконала. При построении решения, применимого в диапазоне частот $\varkappa^{2p}\varepsilon kh \ll 1$, нужно знать эффективный показатель преломления $N^2(u,v)$ с погрешностью $O(\varepsilon^{2p+2})$, а собственные значения $\nu_m(u)$ — с погрешностью $O(\varkappa^{2p}\varepsilon^2 h^2)$.

Рассмотрим поле нормальной волны нерегулярного волновода при $u\to\infty$, т. е. в правом регулярном участке. Пусть

$$r_n(u) = |r_n(u)|\,e^{i\alpha_n(u)} = -i\int_{-\infty}^{u}\frac{d\xi_n(t)}{dt}\exp\left(i\pi n\int_0^t \mu(y)dy\right)dt = -r^*_{-n}(u), \tag{3.20}$$

где $\xi_n(u)$ определены в (3.9). Можно показать [5], что $r_n(\infty) = O(M\exp(-cn/\varkappa))$, $c>0$, при аналитических $h(s)$ и $\rho^{-1}(s)$.

С помощью функций (3.20) и первого приближения для эйконала (3.12) выражение (3.19) при $u\to\infty$ запишем в виде

$$G_m = \frac{2i}{\sqrt[4]{\nu_m}}\exp\left[ik\int_0^u\sqrt{\nu_m}\,du + 2ik\sum_{n\geq 1}|r_n|\sin\left(\alpha_n - \pi n\int_0^u \mu du\right)\cos\pi nv\right]\times$$

$$\times\sin\left[\pi mv + 2k\sum_{n\geq 1}|r_n|\cos\left(\alpha_n - \pi n\int_0^u \mu du\right)\sin\pi nv\right]. \tag{3.21}$$

Таким образом, нерегулярность волновода приводит к малым осцилляциям фазы и амплитуды нормальной волны на регулярном участке за переходом [9].

Удерживая в (3.21) только поправки с $n=1$ и используя производящую функцию для функций Бесселя, получаем

$$G_m=\frac{2i}{\sqrt[4]{\nu_m}}\sum_{l=-\infty}^{\infty}\exp\left[ik\int_0^u\left(\sqrt{\nu_m}-\frac{\pi(l-m)}{k}\mu\right)du+i\pi(l-m)\alpha_1\right]\times$$
$$\times J_{l-m}(2k|r_1|)\sin\pi lv. \tag{3.22}$$

Очевидно, что коэффициенты этого ряда не малы лишь при l, принадлежащих интервалу номеров

$$|l-m|\leqslant 2k|r_1|=O(m\exp(-c/\varkappa)).$$

С помощью приближенного равенства $\sqrt{\nu_m}-\pi(l-m)k^{-1}\mu=\sqrt{\nu_l}$, достаточно точного при данных l, из (3.22) находим представление поля нормальной волны нерегулярного волновода в виде суперпозиции нормальных волн регулярного волновода. Такое представление с отличными от (3.20), (3.9) функциями $r_1(u)$ было получено ранее лучевым методом [9] и методом поперечных сечений [7].

Аналогичным образом строятся нормальные волны волноводов, в которых на одной или обеих стенках вместо условия Дирихле задано условие Неймана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Попов А. В. // Радиотехника и электроника. 1977. Т. 22. № 8. С. 1577.
2. Боровиков В. А., Попов А. В. В кн.: Прямые и обратные задачи теории дифракции. — М.: ИРЭ, 1979. С. 167.
3. Попов А. В. В кн.: Распространение декаметровых радиоволн. — М.: ИЗМИРАН, 1980. С. 47.
4. Авдеев А. Д. В кн.: Волны и дифракция—85. — Тбилиси, 1985. Т. 2. С. 507.
5. Авдеев А. Д. Статья депонирована в ВИНИТИ, рег. № 6314—85. Деп. от 26 августа 1985 г.
6. Авдеев А. Д. В кн.: Волны и дифракция—85. — Тбилиси, 1985. Т. 2. С. 503.
7. Боровиков В. А. // Радиотехника и электроника. 1978. Т. 23. № 7. С. 1365.
8. Бабич В. М., Булдырев В. С. Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. — М.: Наука, 1972.
9. Кинбер Б. Е., Кравцов Ю. А. // Радиотехника и электроника, 1977. Т. 22. № 12. С. 2470.

Ленинградский государственный университет

Поступила в редакцию 10 апреля 1987 г.

SHORT WAVE ASYMPTOTICS OF HIGHER MODES OF SMOOTH IRREGULAR WAVEGUIDE

A. D. Avdeev

A modification of smooth perturbation method generalizing the Brilloin's concept is proposed.