

УДК. 537.868:531

МНОГОЧАСТОТНАЯ ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ГЕНЕРАЦИЯ В ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИХ РЕЗОНАНСНЫХ СИСТЕМАХ. I. МЯГКОЕ И ЖЕСТКОЕ ВОЗБУЖДЕНИЕ

Г. В. Белокопытов, В. А. Чистяев

Рассмотрено параметрическое возбуждение одночастотных упругих и многочастотных электромагнитных колебаний в электромеханических системах, обусловленное силами стрикционного типа. Получена система уравнений для амплитуд и фаз спектральных составляющих, предложены эффективный способ ее численного решения. Проведен расчет характеристик параметрической генерации, результаты которого находятся в согласии с данными эксперимента по стрикционному возбуждению в сегнетоэлектрических резонаторах.

В кристаллах виртуального сегнетоэлектрика tantalата калия было обнаружено явление стрикционного параметрического возбуждения [1–3]. В силу малой диссипации при гелиевых температурах кристаллы КTaO₃ являются высокодобротными резонаторами для электромагнитных СВЧ колебаний и для упругих колебаний мегагерцевого диапазона. Обладая высокой диэлектрической проницаемостью и достаточно большими константами электрострикции, они обеспечивают эффективную нелинейную связь между акустическими и СВЧ колебаниями. Воз действие электромагнитной накачки может приводить к регенерации упругих колебаний в такой системе, а при превышении определенного порога — к параметрическому возбуждению. Описанный эффект можно рассматривать как более низкочастотный аналог известного в оптике явления вынужденного рассеяния Мандельштама—Бриллюэна, отличающийся весьма низким порогом возбуждения (напряженность поля $\sim 1 \text{ В/см}$, мощность накачки $\sim 10^{-5} \text{ Вт}$ [1]).

Родственные явления, но обусловленные магнитострикцией, имеют место при возбуждении магнитостатических волн в ферритах [4–6]. Известен и ряд других электромеханических колебательных систем, в которых электрические и упругие колебания, независимые в линейном приближении, оказываются нелинейно связанными благодаря пондеромоторным силам электромагнитного поля. В них также наблюдались явления параметрической регенерации, которые проявляются как автомульяция колебаний в полых (в том числе сверхпроводящих) резонаторах [7, 8] или как регенерация и неустойчивость в емкостных датчиках малых смещений [9, 10].

Основное внимание в [1–10] уделялось выяснению физического механизма неустойчивости и модельным оценкам порога ее возникновения. В настоящей работе исследуются прежде всего спектр колебаний, область их существования и характер возбуждения.

В потенциальной энергии перечисленных выше систем имеется характерное для стрикционных сил слагаемое, квадратичным образом зависящее от напряженности электромагнитного поля и линейным — от механического смещения или деформации. Обозначив нормальные электромагнитные координаты резонатора как A_i , а механические — как B_k , можем записать для этих систем функцию Лагранжа в виде

$$L = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\dot{A}_i^2 - \omega_i^2 A_i^2) + \frac{1}{2} \sum_k M_k (\dot{B}_k^2 - \Omega_k^2 B_k^2) - \sum_{i,j,k} G_{ijk} A_i A_j B_k. \quad (1)$$

Соответственно, принимая во внимание лишь линейную диссипацию, получим уравнения движения при воздействии сторонних сил F_f^m и F_k^m :

$$\ddot{A}_f + \omega_f^2 A_f = -(\omega_f/\theta_f) \dot{A}_f - \sum_{a,r} I_{far}^* A_a B_r - F_f^m, \quad (2)$$

$$\ddot{B}_w + \Omega_w^2 B_w = -(\Omega_w/Q_w) \dot{B}_w - \sum_{a,b} I_{wab} A_a A_b - F_w^m,$$

где $f, a, b, w, r = 1, 2, \dots$, Q_f и Q_w — добротности соответствующих мод, а величины коэффициентов I_{far}^* и I_{wab} зависят как от механизма взаимодействия, так и от пространственного распределения полей взаимодействующих мод. Для случая стрикционного параметрического возбуждения анализ коэффициентов I^* и I был проведен в [2].

Другой общей чертой рассматриваемых электромеханических систем является то, что пондеромоторное, или стрикционное, параметрическое возбуждение является результатом взаимодействия лишь двух степеней свободы — одной электромагнитной и одной упругой. Хотя полная система (2) и содержит бесконечное число уравнений колебаний, однако процесс параметрического преобразования энергии эффективно происходит лишь в резонансных условиях, когда сторонняя сила $F_f^m = 4\pi J_h I_f \cos \omega_f t$ возбуждает колебания на частоте $\omega_n \approx \omega_f$. В результате их взаимодействия с упругими (с частотой $\Omega_a \approx \Omega_w$) возникают электромагнитные комбинационные частоты $\omega_n \pm \Omega_a$. Собственные частоты упругих осцилляций на несколько порядков ниже, чем электромагнитных ($\Omega_w \ll \omega_f$), так что при не слишком больших добротностях Q_f комбинационные частоты попадают в ту же полосу резонанса, что и ω_n . Более того, в полосе резонанса (или вблизи нее) оказываются и комбинационные частоты высших порядков $\omega_n = \omega_n + n\Omega_a$ ($n = \pm 1, \pm 2, \dots$).

С учетом этого будем искать решение системы (2), представляя механические и электромагнитные колебания в виде

$$B_w = X \cos(\Omega_a t + \varphi_a), \quad A_f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \cos(\omega_n t + \varphi_n). \quad (3)$$

Уравнения гармонического баланса, получаемые в результате подстановки (3) в (2), приобретают наиболее простую форму после следующей нормировки: $z = (I^*/2\omega_w^2) Q_f X$, $Y_k = (II^* Q_f Q_a / 4\Omega_w^2 \omega_f^2)^{1/2} x_k$, $E = (4\pi J_h Q_f / \omega_f) (II^* Q_f Q_a / 4\Omega_w^2 \omega_f^2)^{1/2}$, $v = (1 - \Omega_w^2 / \Omega_a^2) Q_a$, $\xi_m = (1 - \omega_f^2 / \omega_m^2) Q_f$. В результате для описания параметрической генерации имеем цепочку уравнений:

$$z = \sum_{k=-\infty}^{\infty} Y_k Y_{k+1} \sin \alpha_{k+1}; \quad (4a)$$

$$vz = \sum_{k=-\infty}^{\infty} Y_k Y_{k+1} \cos \alpha_{k+1}; \quad (4b)$$

$$Y_m = z(Y_{m-1} \sin \alpha_m - Y_{m+1} \sin \alpha_{m+1}) + E \delta_{0m} \sin \varphi_0; \quad (4b)$$

$$\xi_m Y_m = z(Y_{m-1} \cos \alpha_m + Y_{m+1} \cos \alpha_{m+1}) + E \delta_{0m} \cos \varphi_0, \quad (4c)$$

где $\alpha_m = \varphi_m + \varphi_a - \varphi_{m+1}$, δ_{0m} — символ Кронекера, а $k, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Строго говоря, рассматривая бесконечное множество комбинационных частот, но учитывая лишь два уравнения системы (2), мы допускаем непоследовательность, поскольку комбинационные частоты высших порядков могут более эффективно возбуждаться на иных, чем

накачка, модах. Однако реально другие электромагнитные моды могут оказаться существенными лишь в условиях, близких к вырождению с модой накачки (режим с преобразованием моды, [2, 11]). В остальных случаях амплитуды Y_k весьма быстро убывают с ростом $|k|$, так что распространение суммирования на бесконечные пределы не ведет к заметным ошибкам. Действительно, как следует из (4г):

$$|\zeta_m/z| \ll (Y_{m+1} + Y_{m-1})/Y_m. \quad (5)$$

Для спектральных компонент с достаточно большими номерами, такими, что $|\zeta_m/z| > 2$, из (5) следует $Y_k < (1/2)(Y_{k-1} + Y_{k+1})$, а это значит, что амплитуды Y_m убывают с ростом $|m|$ монотонно. Но тогда из (5) имеем

$$Y_{m\mp 1}/Y_m > |\zeta_m/z| - 1 \quad (6)$$

(верхний знак для $m > 0$, нижний — для $m < 0$). Величина ζ_m с ростом m неограниченно возрастает, при $\Omega_a \ll \omega_n$

$$\zeta_m = \zeta_0 + m\Delta, \quad (7)$$

где $\Delta = 2Q_f\Omega_a/\omega_n$, поэтому неравенство (6) означает, что Y_m для больших номеров убывают весьма быстро — быстрее, чем члены геометрической прогрессии.

При отыскании порога неустойчивости можно на первых порах принимать во внимание лишь четыре гармонических составляющих — исходные ω_n , Ω_a и комбинационные $\omega_{\pm 1} = \omega_n \pm \Omega_a$, в которые идет непосредственное преобразование энергии накачки. В этом приближении для порога параметрического возбуждения получим

$$E^2 = (1 + \zeta_0^2)(1 + \zeta_{-1}^2)(1 + \zeta_1^2)/(1 + \zeta_{-1}^2). \quad (8)$$

Формула (8) с учетом (7) совпадает с результатом [8].

Ясно, однако, что такой подход правомерен лишь для определения границы возбуждения, когда амплитуда упругих колебаний исчезающе мала ($z \rightarrow 0$). Для нахождения границы срыва генерации при жестком возбуждении и определения спектра параметрических колебаний необходимо решать полную систему (4). Для численного решения системы (4) построен специфический алгоритм, который позволяет радикально ускорить расчет по сравнению с известными методами. Кроме того, в отличие от методов покоординатного или градиентного спуска [12] при его использовании не возникают проблемы задания начального приближения в области сходимости и полноты отыскания решений.

В основе алгоритма лежат соотношения, которые следуют из уравнений (4) и факта быстрого убывания Y_m при $|m| \rightarrow \infty$. Домножив каждое из уравнений (4в) на Y_m и проведя их последовательное сложение, получим

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} Y_m^2 = Y_0 E \sin \varphi_0, \quad z^{-1} \sum_{m=k}^{\infty} Y_m^2 = Y_k Y_{k-1} \sin \alpha_k \quad (k > 0),$$

$$z^{-1} \sum_{m=-\infty}^k Y_m^2 = -Y_{k+1} Y_k \sin \alpha_{k+1} \quad (k < 0). \quad (9)$$

Аналогично, умножим на $(-1)^m Y_m$ каждое из уравнений (4г) и произведем сложение:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m \zeta_m Y_m^2 = Y_0 E \cos \varphi_0,$$

$$z^{-1} \sum_{m=k}^{\infty} (-1)^m \zeta_m Y_m^2 = (-1)^{k+1} Y_k Y_{k-1} \cos \alpha_k \quad (k > 0), \quad (10)$$

$$z^{-1} \sum_{m=-\infty}^k (-1)^m \xi_m Y_m^2 = (-1)^{k+1} Y_{k+1} Y_k \cos \alpha_{k+1} \quad (k < 0).$$

Возведем каждое из уравнений (9) и (10) в квадрат и сложим их попарно. Получим

$$E^2 = Y_0^{-2} \left[\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} Y_m^2 \right)^2 + \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m \xi_m Y_m^2 \right)^2 \right]; \quad (11a)$$

$$Y_{k-1}^2 = (z Y_k)^{-2} \left[\left(\sum_{m=-k}^{\infty} Y_m^2 \right)^2 + \left(\sum_{m=-k}^{\infty} (-1)^m \xi_m Y_m^2 \right)^2 \right] \quad (k > 0); \quad (11b)$$

$$Y_{k+1}^2 = (z Y_k)^{-2} \left[\left(\sum_{m=-\infty}^k Y_m^2 \right)^2 + \left(\sum_{m=-\infty}^k (-1)^m \xi_m Y_m^2 \right)^2 \right] \quad (k < 0). \quad (11c)$$

Подобным образом из (4в), (4г) найдем

$$z \sum_{m=-\infty}^{\infty} Y_m Y_{m+1} \sin \alpha_{m+1} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} m Y_m^2,$$

$$z \sum_{m=-\infty}^{\infty} Y_m Y_{m+1} \cos \alpha_{m+1} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \xi_{2m+1} Y_{2m+1}^2$$

и с учетом (4а), (4б) имеем

$$z^2 = \sum_{m=-\infty}^{\infty} m Y_m^2; \quad (12)$$

$$z^2 v = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \xi_{2m+1} Y_{2m+1}^2. \quad (13)$$

Перейдем теперь от бесконечных рядов к конечным суммам, т. е. будем полагать $Y_k = 0$ при $k > s$ и при $k < -p$ ($s, p > 0$). В этом случае, зная амплитуды крайних спектральных компонент Y_s и Y_{-p} , можно найти все остальные амплитуды с помощью рекуррентных формул (11б), (11в). Однако, поскольку значения Y_s и Y_{-p} заранее неизвестны, на первом этапе, задав z , вычислим относительные величины $\gamma_k = Y_k^2 / Y_{-p}^2$ ($k < 0$), $\gamma'_k = Y_k^2 / Y_s^2$ ($k > 0$). По определению $\gamma_{-p} = 1$, $\gamma'_s = 1$, а остальные коэффициенты находятся в соответствии с формулами (11б), (11в). Проведя вычисления до конца, получим $\gamma_0 = Y_0^2 / Y_{-p}^2$ и $\gamma'_0 = Y_0^2 / Y_s^2$. Поскольку $Y_s^2 / Y_{-p}^2 = \gamma_0 / \gamma'_0$, то теперь можно определить γ_k и для случая $k > 0$:

$$\gamma_k = \gamma'_k (\gamma_0 / \gamma'_0). \quad (14)$$

Зная все γ_k ($-p \leq k \leq s$), из (12) получим

$$Y_{-p}^2 = z^2 / \sum_{m=-p}^s m \gamma_m. \quad (15)$$

После этого легко найти нормированные амплитуды комбинационных частот, мощность накачки E^2 из (11а), расстройку механических колебаний v из (13), а также с помощью (9), (10) фазы ϕ_k и α_k .

Существенным является вопрос о том, какое число комбинационных частот необходимо учитывать в численных расчетах. Для получения оценки сверху можно воспользоваться тем, что согласно (6) при $\xi_k/z > 3$ отношение $Y_{k+1}/Y_k < 1/2$. С учетом этого можем принять

$$p = (3z + \xi_0)/\Delta - \ln \eta / \ln 2, \quad s = (3z - \xi_0)/\Delta - \ln \eta / \ln 2, \quad (16)$$

что гарантирует учет в вычислениях всех комбинационных частот, амплитуда которых составляет η от максимальной.

В соответствии с изложенной процедурой была составлена программа и проведен расчет на ЭВМ характеристик параметрической генерации. Ниже в качестве примера представлены результаты, соответствующие $\Delta=3$. На рис. 1 приведены зависимости амплитуд Y_k и z , фазы ϕ и расстройки v от мощности накачки при расстройке $\xi_0=3$. Номера комбинационных частот указаны рядом с кривыми. Для этого же случая получены зависимости от ξ_0 характеристик параметрических колебаний при фиксированной мощности накачки $E^2=100$ (рис. 2). Эти зависимости имеют немонотонный характер, причем амплитуды комбинационных частот достигают максимальных значений при $\xi_0=k\Delta$, т. е. в условиях, когда комбинационная частота ω_k совпадает с собственной частотой ω_f .

Все характеристики параметрической генерации однозначно определяются тремя нормированными параметрами: расстройкой частоты накачки ξ_0 , амплитудой механических смещений z и параметром Δ , представляющим расстояние между соседними частотами электромагнитного спектра, выраженное в единицах ширины полосы резонанса ($\Delta=-2\Omega_a/\delta\omega_f$, где $\delta\omega_f=\omega_f/Q_f$). Напротив, при заданной мощности накачки может существовать несколько состояний колебаний, которые различаются амплитудами механических осцилляций z и комбинационных частот Y_k . Нетрудно показать, что если время установления электромагнитных колебаний пренебрежимо мало по сравнению с временем установления механических колебаний ($\omega_f/Q_f \gg \Omega_a/Q_a$), то состояния, для которых $dE^2/dz^2 < 0$, будут неустойчивыми. По аналогии с другими колебательными системами можно ожидать, что этот вывод будет справедлив и при иных соотношениях между временами релаксации.

Рис. 3 иллюстрирует возможные типы зависимости между мощностями колебаний накачки и упругих колебаний. Если $\xi_0 \approx k\Delta$, то зависимость $E^2(z^2)$ немонотонна и изменение мощности накачки может приводить к скачкообразной смене режима генерации (сплошная кривая, рис. 3, $\xi_0=3$, $\Delta=3$). В случае, когда $\xi_0 \approx (k+1/2)\Delta$, зависимость $E^2(z^2)$ состоит из отдельных ветвей. При этом одним изменением мощности накачки нельзя достичнуть перехода системы в состояние, соответствующее другой ветви (пунктирная кривая, $\xi_0=4, 5$, $\Delta=3$). Между изолированными ветвями обнаружены «запрещенные» зоны z , где вычисление дает $E^2 < 0$, что физически бессмысленно. Однако если наряду с расстройкой $\xi_0 > 0$ рассматривать $\bar{\xi}_0 = -\xi_0$, то имеем $\xi_k = -\xi_0 + k\Delta = -\xi_{-k}$ и в соответствии с (11) получим $\gamma'_{k-1} = \gamma_{-k+1}$, $\gamma_{k+1} = -\gamma'_{-k-1}$, а в конечном итоге, применяя описанный алгоритм, $E^2(z, \bar{\xi}_0) = -E^2(z, \xi_0)$. Таким образом, расчет показывает, что параметрическое электромеханическое возбуждение возможно не только при

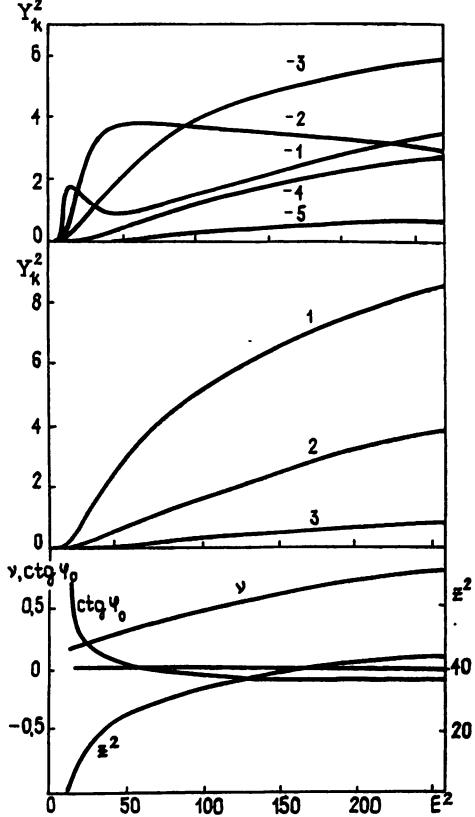


Рис. 1. Зависимости характеристик параметрической генерации от нормированной мощности накачки: $\xi_0=3$, $\Delta=3$.

положительных, но и при отрицательных расстройках $\zeta_0 \simeq (k+1/2)\Delta$. Однако для реализации параметрической генерации в таком режиме, а также в режиме на изолированных ветвях необходимо каким-либо образом на начальном этапе возбуждения создать в системе механические осцилляции довольно большой амплитуды.

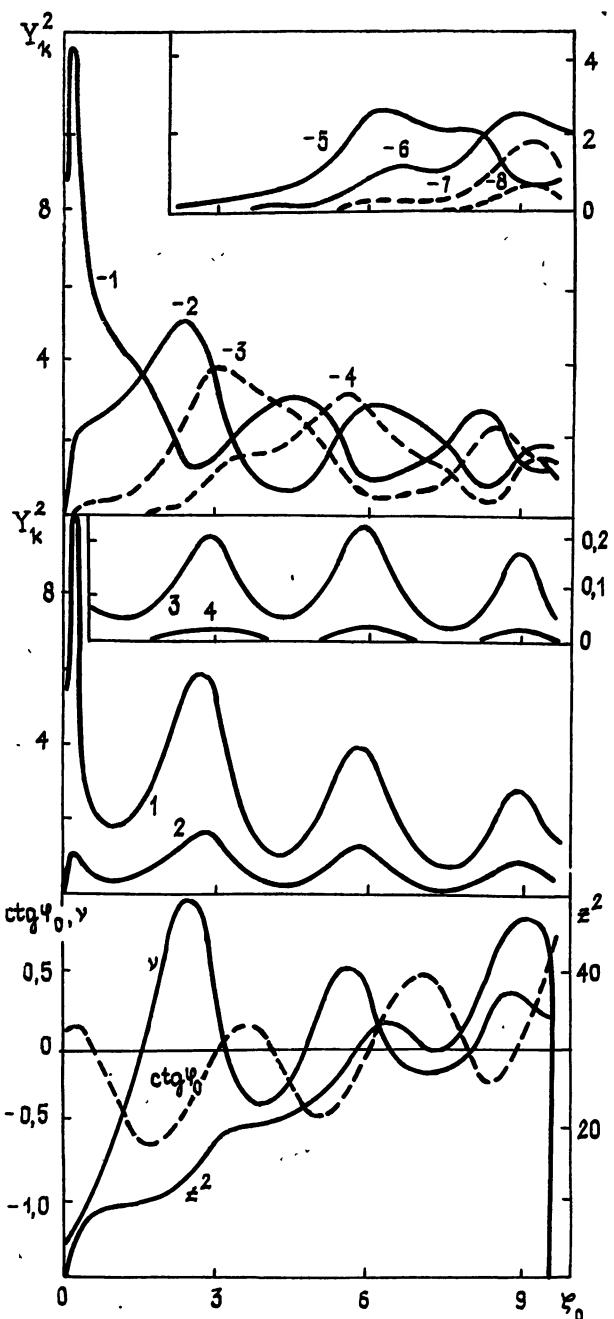


Рис. 2. Зависимости характеристик параметрической генерации от нормированной расстройки частоты накачки при $E^2=100$, $\Delta=3$. Номера комбинационных частот указаны рядом с кривыми.

Для $\Delta=1.45$ и $\Delta=3$ рассчитанные границы области возбуждения представлены на рис. 4. Параметрическая генерация возникает, как только мощность накачки превышает порог (8) (кривая 1 — $\Delta=1.45$ и 2 — $\Delta=3$). При небольших расстройках амплитуда z плавно возрас-

тает от нуля с увеличением мощности накачки (мягкое возбуждение). В случае больших расстроек при превышении порога возбуждения амплитуды колебаний скачком принимают конечное значение, а срыв параметрической генерации происходит при меньшей интенсивности накачки (жесткое возбуждение, порог срыва для $\Delta=1,45$ — кривая 3 на рис. 4, для $\Delta=3$ — 4). При небольших значениях Δ пороговая мощность срыва монотонно растет с увеличением расстройки, при больших Δ зависимость становится немонотонной, причем локальные минимумы достигаются при $\zeta_0 \approx k\Delta$, а максимумы — при $\zeta_0 \approx (k+1/2)\Delta$.

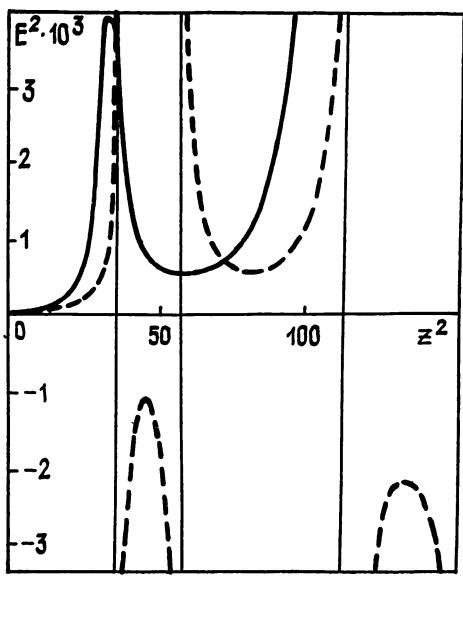


Рис. 3.

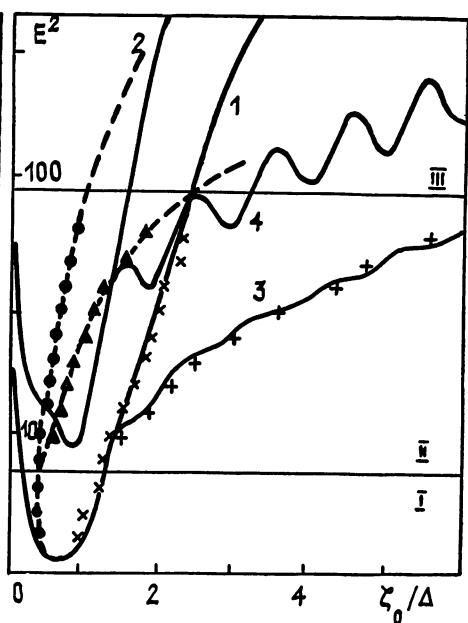


Рис. 4.

Рис. 3. Зависимости между нормированными мощностями накачки E^2 и акустических колебаний z^2 при $\Delta=3$: сплошная линия — $\zeta_0=3$, пунктир — $\zeta_0=4,5$.

Рис. 4. Расчетные границы областей возбуждения (кривые 1, 2) и срыва (3, 4) параметрической генерации при $\Delta=1,45$ (1, 3) и $\Delta=3$ (2, 4). Значки у кривых — результаты эксперимента при $\Delta=1,45$: (\times), (\blacktriangle) — границы возбуждения, (+), (—) — границы срыва. При перестройке частоты в области I границы возбуждения и срыва совпадают, в областях II и III не совпадают, причем в области III параметрическая генерация возбуждается только при понижении частоты накачки.

Соответствие между теорией и экспериментом подвергалось проверке при исследовании стрикционного возбуждения в диэлектрических резонаторах из танталата калия [3]. На рис. 4 приведены экспериментальные точки границы возбуждения и срыва генерации. В эксперименте, проводившемся при 4,2 К, параметры имели следующие значения: $\omega_f/2\pi=8,7$ ГГц, $Q_f=2 \cdot 10^8$, $\Omega_w/2\pi=3,16$ МГц, т. е. $\Delta=1,45$. Порог возбуждения при оптимальной настройке составлял ~ 30 мкВт ($Q_a=-500$), что хорошо согласуется с оценками [2]. Соответствие между расчетом и экспериментом в нахождении границы области параметрического возбуждения оказалось вполне удовлетворительным со стороны высоких частот накачки, но при малых расстройках ухудшалось, что вызвано нелинейностью резонанса электромагнитных колебаний.

Нелинейные расстройки электрического, теплового и стрикционного происхождения можно учесть путем перенормировки $\zeta_i^{\Phi} = \zeta_i + \sum_j \Gamma_{ij} x_j^2$ [2]. Вблизи порога возбуждения существенную роль играет только слагаемое $\Gamma_{i0} x_0^2$. По мере возрастания мощности накачки нелинейные расстройки сначала ведут к искажению границы параметрического возбуждения (область I, рис. 4). Затем, в области II появляется дополнительная зона жесткого возбуждения со стороны низких частот. Это происходит тогда, когда кривая нелинейного резо-

нанса становится неоднозначной. Пока настройка соответствует левому склону резонансной кривой ($\zeta_0^{\text{фф}} < 0$), самопроизвольное возникновение параметрической генерации невозможна. При перестройке в сторону увеличения $\zeta_0^{\text{фф}}$ генерация скачком возникает при переходе на правую ветвь кривой нелинейного резонанса. При обратной перестройке частоты накачки срыв генерации происходит при меньшем значении расстройки вследствие колебательного гистерезиса.

Наконец, при еще больших уровнях накачки (область III) возбуждение и срыв генерации при перестройке обнаруживают еще одну особенность. При возрастании $\zeta_0^{\text{фф}}$ скачок амплитуды вынужденных колебаний на другую ветвь кривой нелинейного резонанса происходит уже за пределами области возбуждения и параметрическая генерация не возникает. Если же систему перестраивать так, что $\zeta_0^{\text{фф}}$ уменьшается, то в области III рис. 4 генерацию можно возбудить. Такого рода «анизотропия» возбуждения по отношению к перестройке наблюдалась в экспериментах по магнитоакустическому резонансу [6]. Отметим, что в [6] было реализовано только жесткое возбуждение параметрической генерации. Это свидетельствует о том, что в условиях эксперимента [6] нелинейность резонанса магнитостатических колебаний была настолько значительной, что область электромеханического возбуждения целиком лежала в области III (рис. 4).

Было проведено также сравнение результатов расчета спектров параметрической генерации с результатами их наблюдения в резонаторах из КТаO₃ [3]. Суммируя полученные результаты, можно заключить, что развитый в работе подход с поправками на нелинейные расстройки дает адекватное количественное описание параметрических эффектов в электромеханических резонаторах.

Авторы выражают благодарность И. В. Иванову за полезные дискуссии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Белокопытов Г. В., Иванов И. В., Решетников М. Е., Чистяев В. А. // Письма в ЖТФ. 1984. Т. 10. № 19 С 1210
2. Белокопытов Г. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 1987. Т. 30. № 9. С 1121
3. Чистяев В. А., Белокопытов Г. В. Статья депонирована в ВИНИТИ, №ег. № 7525-В86. Деп. от 3 ноября 1986 г.
4. Spence E G., Le Cgaw R. C. // Phys. Rev. Lett. 1958. V. 1. № 7. P 241.
5. Л-е-Кроу Р., Комсток Р. В кн.: Физическая акустика / Ред. У. Мэсон, Р. Терстон — М.: Мир, 1968. Т. 3. Ч. Б. С. 156.
6. Бурков В. Д., Вашковский А. В., Кильдишев В. Н. // ФТТ. 1968. Т. 10. № 2. С. 605.
7. Карлинен М. М., Шапиро В. Е., Шехтман И. А. // ЖТФ. 1966. Т. 36. № 11. С. 2017.
8. Диценко А. Н. Сверхпроводящие волноводы и резонаторы. — М.: Сов. радио, 1973. — 256 с.
9. Брагинский В. Б., Минакова И. И. // Вестник Моск. ун-та. Сер. III. Физика, астрон. 1964. Т. 5. № 1 С 83
10. Руденко В. Н., Гусев А. В. // Радиотехника. 1981. Т. 36. № 6. С. 3.
11. Иванов И. В., Чистяев В. А. // ЖТФ. 1986. Т. 56. № 9. С 1832.
12. Бахвалов Н. С. Численные методы. — М.: Наука, 1973. — 632 с.

Московский государственный
университет

Поступила в редакцию
23 апреля 1987 г.

MULTIFREQUENCY PARAMETRIC OSCILLATION IN ELECTROMECHANICAL RESONANCE SYSTEMS. 1. SOFT AND RIGID EXITATION

G. V. Belokopytov, V. A. Chistyaeu

Parametric excitation of harmonic elastic and poliharmonic electromagnetic oscillations due to striction type forces in electromechanical systems is considered. A set of equations for spectral components amplitudes and phases is obtained, and an efficient method of its numerical solution is proposed. Parametric oscillation characteristics are calculated, the results of calculations are in agreement with experimental data for striction-excitation in ferroelectric resonators.