

УДК 537.86:519.2

ОБНАРУЖЕНИЕ ПРОТЯЖЕННОГО РАДИОИСТОЧНИКА С НЕИЗВЕСТНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ЯРКОСТИ

В. И. Костылев

Обобщенным методом максимума правдоподобия синтезируется алгоритм обнаружения протяженного источника случайного радиоизлучения, не требующий априорного знания распределения яркости по излучающей поверхности. Исследуется возможность аналитического и численного расчета характеристик обнаружения полученного алгоритма.

Обнаружение протяженного источника случайного некогерентного радиоизлучения в присутствии пространственно-временного белого шума исследовалось в [1]. Было получено, что синтезированный методом отношения правдоподобия алгоритм обнаружения требует априорного знания пространственного распределения энергетической яркости (ПРЭЯ) по излучающей поверхности источника, что значительно ограничивает область его применения. Существенно, что в отличие от случая неизвестных параметров источника (например, координат его центра [1]) неопределенность ПРЭЯ не может быть преодолена простым введением многоканальности в структуру алгоритма обнаружения.

В данной статье обобщенным методом максимума правдоподобия синтезируется алгоритм обнаружения источника случайного радиоизлучения с неизвестным ПРЭЯ и исследуются характеристики обнаружения источника по этому алгоритму.

1. Алгоритм обнаружения. Синтезированный в [1] алгоритм обнаружения протяженного источника радиоизлучения после несложных преобразований может быть представлен в виде

$$Y_z = \int_{\Pi} B_e(\mathbf{R}) V_z(\mathbf{R}) d\Omega \stackrel{H_1}{\cong} h, \quad (1)$$

где $B_e(\mathbf{R})$ — ПРЭЯ по излучающей поверхности Π источника [2]; $d\Omega$ — элементарный телесный угол, под которым из начала координат 0 видна элементарная окрестность вектора $\mathbf{R} \in \Pi$ (рис. 1);

$$V_z(\mathbf{R}) = \int_{-T/2}^{T/2} \int_L \int_L \dot{z}(t_1, \rho_1) \dot{z}(t_2, \rho_2) \dot{I}(\rho_1) \dot{I}(\rho_2) \times \quad (2)$$

$$\times \dot{k}(t_1 - t_2) \exp[-j2\pi(|\mathbf{R} - \rho_1| - |\mathbf{R} - \rho_2|)/\lambda] \times \\ \times dt_1 dt_2 d\rho_1 d\rho_2 / N_0^2 - 2TS_s / N_0$$

— выходной сигнал оптимального устройства приема излучения от малоразмерного источника с координатами \mathbf{R} ; $\dot{z}(t, \rho)$ — комплексный обрабатываемый пространственно-временной сигнал, представляющий собой либо сумму полезного сигнала, сформированного из принятого радиоизлучения источника, и пространственно-временного белого шума (гипотеза H_1), либо только пространственно-временной белый шум (гипотеза H_0); $[-T/2, T/2]$ — интервал времени обработки сигнала

$\dot{z}(t, \rho)$; L — область пространства, занимаемого приемной антенной, $\rho \in L$ (рис. 1); $\dot{I}(\rho)$ — комплексная функция раскрытия антенны (апертурная функция); $\dot{k}(\tau)$ — комплексная нормированная ($\dot{k}(0) = 2$) временная корреляционная функция полезного сигнала; λ — длина волны; N_0 — спектральная плотность пространственно-временного белого шума; $S_0 = \int_L |\dot{I}(\rho)|^2 d\rho$ — эффектив-

ная площадь приемной антенны [3]. Учитывая эрмитовость временной корреляционной функции $\dot{k}(\tau)$ [4], нетрудно убедиться, что функция $V_z(R)$ вещественна.

В соответствии с (1), если случайная величина Y_z превышает пороговый уровень h , принимается решение в пользу гипотезы H_1 (излучение источника присутствует), в противном случае — в пользу гипотезы H_0 (излучение источника отсутствует). Алгоритм обнаружения (1) предполагает априорное знание функции ПРЭЯ $B_e(R)$ и поэтому не пригоден для обнаружения источников с неизвестным ПРЭЯ.

Синтезируем алгоритм обнаружения, инвариантный к виду $B_e(R)$. Воспользуемся обобщенным методом максимума правдоподобия [5], сущность которого применительно к рассматриваемой задаче состоит в подстановке в выражение (1) вместо неизвестной функции ПРЭЯ $B_e(R)$ ее статистической оценки. Требуемая оценка ПРЭЯ получена в [2] и имеет вид

$$\hat{B}_e(R) = \frac{\sigma_N^4}{2n_i} \sum_{i=1}^n v_i 1(\sigma_i^2 - h_i^2) \varphi_i(R) / v_i, \quad (3)$$

где $\sigma_N^2 = N_0 \Delta f$ — средняя мощность шума; Δf — ширина энергетического спектра обрабатываемого сигнала; $n_i = 2T \Delta f$ — число временных степеней свободы полезного сигнала;

$$n = \text{entier}(2n_L) + 1, \quad (4)$$

$n_L = \Omega / \delta\Omega$ — число пространственных степеней свободы полезного сигнала; Ω — телесный угол, под которым из начала координат 0 видна излучающая поверхность Π ; $\delta\Omega$ — рэлеевский элемент разрешения приемной антенны по телесному углу [3];

$$v_i = \int_{\Pi} V_z(R) \varphi_i(R) d\Omega, \quad i = \overline{1, n} \quad (5)$$

— коэффициенты разложения функции $V_z(R)$ в ряд по системе собственных функций, определяемых уравнением

$$v_i \varphi_i(R_i) = \int_{\Pi} |\dot{\Psi}_L(R_i, R)|^2 \varphi_i(R) d\Omega, \quad i = \overline{1, n}, \quad (6)$$

где

$$\dot{\Psi}_L(R_i, R) = \int_L |\dot{I}(\rho)|^2 \exp[j2\pi(|R_i - \rho| - |R - \rho|)/\lambda] d\rho,$$

$\{v_i\}_{i=\overline{1, n}}$ и $\{\varphi_i(R)\}_{i=\overline{1, n}}$ — соответственно собственные числа и соб-

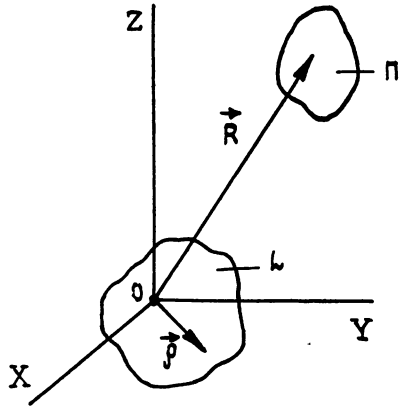


Рис. 1.

ственные функции, причем предполагается, что собственные числа упорядочены: $v_i \geq v_{i+1}$, $i = \overline{1, n}$, а собственные функции ортонормированы: $\int_{\Pi} \varphi_i^2(\mathbf{R}) d\Omega = 1$, $i = \overline{1, n}$; $\{h_i^2\}_{i=\overline{1, n}}$ — пороговые уровни, которые можно варьировать с целью улучшения качества оценки (3) [2];

$$1(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \text{ — единичная функция Хэвисайда.}$$

Подставляя в (1) вместо истинного значения ПРЭЯ $B_e(\mathbf{R})$ его оценку $\hat{B}_e(\mathbf{R})$ из (3), получим алгоритм обнаружения источника радиоизлучения с неизвестным ПРЭЯ:

$$\hat{Y}_z = \frac{\sigma_N^4}{2n_i} \sum_{i=1}^n \frac{v_i^2 1(v_i^2 - h_i^2)}{v_i} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} h. \quad (7)$$

Он включает

— преобразование обрабатываемого пространственно-временного сигнала $\hat{z}(t, \rho)$ в конечный набор параметров $\{V_i^2\}_{i=\overline{1, n}}$ в соответствии с формулами (2), (4) — (6);

— сравнение полученных параметров $\{V_i^2\}_{i=\overline{1, n}}$ с определенными пороговыми уровнями $\{h_i^2\}_{i=\overline{1, n}}$ и весовое суммирование тех из них, которые превысили свой пороговый уровень;

— сравнение полученной суммы с пороговым уровнем h и принятие решения в пользу одной из гипотез H_1 или H_0 .

2. Аналитический расчет характеристик обнаружения. Предложенный алгоритм (7) имеет достаточно сложную структуру, что вызывает определенные трудности при расчете характеристик обнаружения по этому алгоритму.

Можно показать [6], что случайные коэффициенты $\{V_i\}_{i=\overline{1, n}}$ некоррелированы между собой, приближенно описываются (причем тем точнее, чем больше произведение $n_i n_L$) гауссовым законом распределения вероятности, имеют одинаковую дисперсию по гипотезам H_1 и H_0 :

$$\begin{aligned} \overline{V_i^2 | H_1} - \overline{V_i | H_1}^2 &= \overline{V_i^2 | H_0} - \overline{V_i | H_0}^2 = \\ &= 2n_i v_i \sigma_N^4 \equiv \sigma_i^2, \quad i = \overline{1, n}, \end{aligned} \quad (8)$$

отличаясь по этим двум гипотезам только средними значениями:

$$\overline{V_i | H_1} = 2n_i v_i b_i / \sigma_N^4, \quad \overline{V_i | H_0} = 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad (9)$$

где $b_i = \int_{\Pi} B_e(\mathbf{R}) \varphi_i(\mathbf{R}) d\Omega$ — коэффициент разложения $B_e(\mathbf{R})$ в ряд.

Как и в [2], будем полагать, что $h_i = h_0 \sigma_i$, $i = \overline{1, n}$.

В целях удобства расчета характеристик обнаружения преобразуем алгоритм обнаружения (7) к виду

$$\hat{Y}_z = \sum_{i=1}^n v_i^2 1(v_i^2 - h_0^2) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} h, \quad (10)$$

где $\{v_i\}_{i=\overline{1, n}} = \{V_i / \sigma_i\}_{i=\overline{1, n}}$ — случайные гауссовы величины, первые два момента которых с учетом (8), (9) есть

$$\overline{v_i | H_0} = 0, \quad \overline{v_i | H_1} = \sqrt{2n_i v_i b_i} / \sigma_N^2 \equiv m_i, \quad (11)$$

$$\overline{v_i^2 | H_0} - \overline{v_i | H_0}^2 = \overline{v_i^2 | H_1} - \overline{v_i | H_1}^2 = 1, \quad i = \overline{1, n}.$$

Эффективность алгоритма (7) характеризуется вероятностью правильного обнаружения $D = \text{Pr}\{\check{Y}_z > h | H_1\}$ и вероятностью ошибки первого рода (вероятностью ложной тревоги) $F = \text{Pr}\{\check{Y}_z > h | H_0\}$, которые легко вычисляются, если $h_0^2 \geq h$. В этом случае для превышения величиной \check{Y}_z порогового уровня h необходимо и достаточно, чтобы хотя бы один из параметров $\{v_i^2\}_{i=1, \dots, n}$ превысил пороговый уровень h_0^2 . Учитывая гауссовость коэффициентов $\{v_i\}_{i=1, \dots, n}$ и используя простейшие теоремы теории вероятности, нетрудно показать, что

$$F = 1 - [2\Phi(h_0) - 1]^n, \quad (12)$$

$$h_0^2 \geq h,$$

$$D = 1 - \prod_{i=1}^n [\Phi(h_0 + m_i) + \Phi(h_0 - m_i) - 1],$$

где $\Phi(x) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^x \exp(-y^2/2) dy$ — интеграл вероятности.

Вероятности F и D можно аналитически определить еще в одном частном случае, а именно при $h_0 = 0$. Нетрудно убедиться, что при $h_0 = 0$ величина Y_z имеет распределение хи-квадрат по гипотезе H_0 и нецентральное распределение хи-квадрат по гипотезе H_1 [7]. Можно показать, что [8]

$$F = 1 - P(h|n) = \frac{2^{-n/2}}{\Gamma(n/2)} \int_0^{\infty} x^{n/2-1} \exp(-x/2) dx, \quad h_0 = 0, \quad (13)$$

$$D = 1 - P(h|n, m) = 1 - m^{1-n/2} \times$$

$$\times \int_0^{\sqrt{h}} x^{n/2} I_{n/2-1}(mx) \exp[-(x^2 + m^2)/2] dx,$$

где $\Gamma(x)$ — гамма-функция [7]; $m = (\sum_{i=1}^n m_i^2)^{1/2}$ — параметр нецентральности; $P(\chi^2|v)$ и $P(\chi^2|v, \mu)$ — функции распределения хи-квадрат соответственно центрального и нецентрального. Для вычисления F и D можно воспользоваться таблицами функций $P(\chi^2|v)$ и $P(\chi^2|v, \mu)$ (см. гл. 26 в [7] и библиографию к ней) либо рассчитать входящие в (13) интегралы на ЭВМ.

В общем случае, когда $h_0 \neq 0$ и $h > h_0^2$, характеристики обнаружения по алгоритму (7) аналитически вычислить не удастся. Можно лишь указать границы для вероятностей правильного обнаружения и ошибки первого рода:

$$0 < F < 1 - P(h|n), \quad (14)$$

$$\Phi\left(\frac{Q-h/Q}{2}\right) < D \leq \Phi[Q + \Phi^{-1}(F)].$$

Здесь $\Phi^{-1}(x)$ — функция, обратная к интегралу вероятности;

$$Q = (\bar{Y}_z|H_1 - \bar{Y}_z|H_0) / (\bar{Y}_z^2|H_0 - \bar{Y}_z|H_0)^{1/2} =$$

$$= \frac{2n_2}{\sigma_A^2} \iint_{\Omega} B_e(R_1) B_e(R_2) |\Psi_L(R_1, R_2)|^2 d\Omega_1 d\Omega_2 \quad (15)$$

— отношение сигнал-шум для величины Y_z , определенной в (1) [1].

3. Численный расчет характеристик обнаружения. В тех случаях, когда характеристики обнаружения по алгоритму (7) не удается определить аналитически, они могут быть рассчитаны численно на ЭВМ методом имитационного моделирования. Однако вычисление таким способом очень малых вероятностей связано с большими затратами машинного времени, которые тем больше, чем меньше вероятность. Вместе с тем, именно малые вероятности ошибки первого рода представляют основной практический интерес. Поэтому, по возможности, целесообразно использовать для расчета вероятности ошибки первого рода детерминистские численные методы.

В отсутствие источника (гипотеза H_0) правая часть формулы (10) может быть преобразована:

$$\check{Y}_z = \sum_{i=1}^l \eta_i, \quad (16)$$

где l — дискретная случайная величина, описываемая биномиальным законом распределения [4],

$$P(l) = C_n^l f_0^l (1 - f_0)^{n-l}, \quad l = \overline{0, n}, \quad (17)$$

где $f_0 = \text{Pr}\{v_i^2 > h_0^2 | H_0\} = 2\Phi(h_0) - 2$; C_n^l — число сочетаний из n по l ; $\{\eta_i\}_{i=\overline{1, n}}$ — независимые одинаково распределенные непрерывные случайные величины, описываемые плотностью вероятности

$$W_1(\eta_i) = \begin{cases} \frac{\exp(-\eta_i/2)}{2\sqrt{2\pi}\eta_i[1 - \Phi(h_0)]}, & h_0^2 < \eta_i \leq \infty \\ 0, & \eta_i \leq h_0^2 \end{cases}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (18)$$

которая при $h_0 = 0$ совпадает с плотностью вероятности квадрата гауссовой случайной величины.

Используя формулу полной вероятности [4] и учитывая (17), вероятность ошибки первого рода можно записать в виде

$$F = 1 - (1 - f_0)^n - \sum_{l=1}^k C_n^l f_0^l (1 - f_0)^{n-l} d_l, \quad (19)$$

$$k = \min [n, \text{entier}(h/h_0^2)],$$

где $d_l = \text{Pr}\{\check{Y}_z < h | H_0, l\}$ — условная (при заданном l) вероятность неперевышения порога h величиной \check{Y}_z , определенной в (16). Нетрудно убедиться, что при $h \leq h_0^2$ (19) переходит в первую из формул (12). Обозначим через $W_l(\check{Y}_z)$ условную (при заданном l) плотность вероятности величины \check{Y}_z . В соответствии с (16) при $l=1$ она совпадает с плотностью вероятности, определенной в (18). При $l > 1$ плотность вероятности $W_l(\check{Y}_z)$ может быть вычислена по рекуррентной формуле:

$$W_l(\check{Y}_z) = \begin{cases} \int_{(l-1)h_0^2}^{\check{Y}_z - h_0^2} W_{l-1}(x) W_1(\check{Y}_z - x) dx, & lh_0^2 < \check{Y}_z \leq \infty \\ 0, & \check{Y}_z \leq lh_0^2 \end{cases}. \quad (20)$$

Можно показать, что коэффициент d_l определяется через $W_{l-1}(\check{Y}_z)$:

$$d_1 = \begin{cases} \int_{(l-1)h_0^2}^{h-h_0^2} \frac{\Phi(\sqrt{h-x}) - \Phi(h_0)}{1 - \Phi(h_0)} W_{l-1}(x) dx, & h > lh_0^2 \\ 0, & h \leq lh_0^2 \end{cases} \quad (21)$$

В частности, из (21) с учетом (18) и (20) получаем

$$d_1 = \frac{\Phi(\sqrt{h}) - \Phi(h_0)}{1 - \Phi(h_0)}; \quad (22)$$

$$d_2 = \int_{2h_0^2}^h \arcsin\left(1 - \frac{2h_0^2}{x}\right) \frac{\exp(-x/2)}{4\pi[1 - \Phi(h_0)]^2} dx; \quad (23)$$

$$d_3 = \int_{2h_0^2}^{h-h_0^2} \arcsin\left(1 - \frac{2h_0^2}{x}\right) \frac{\Phi(\sqrt{h-x}) - \Phi(h_0)}{4\pi[1 - \Phi(h_0)]^3} \exp(-x/2) dx. \quad (24)$$

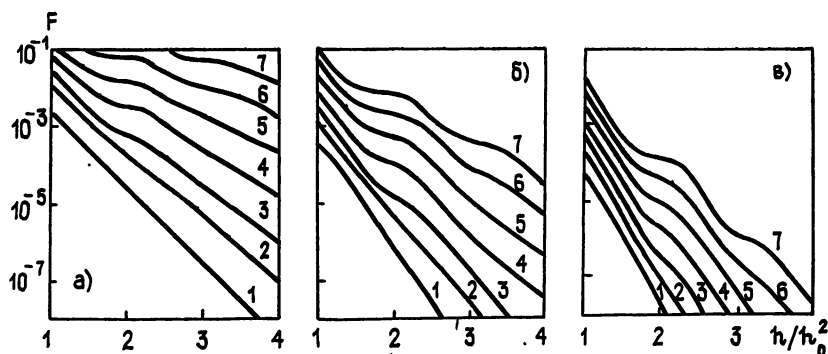


Рис. 2.

На рис. 2 изображены рассчитанные на ЭВМ ЕС-1060 по формулам (19), (22)–(24) зависимости вероятности ошибки первого рода F от величины относительного порогового уровня h/h_0^2 (при расчетах использовалась подпрограмма численного интегрирования QUANC8, опубликованная в [9]). Рис. 2а, б и в построены, соответственно, для $h_0=3$; 3,5 и 4. Кривые 1–7 рассчитаны для $n_L=0$; 2; 10; 15; 35; 75 и 150. Согласно рис. 2 вероятность ошибки первого рода при обнаружении по алгоритму (7) убывает с увеличением h (при фиксированных n и h_0) и с уменьшением n_L (при фиксированных h и h_0).

В отличие от вероятности ошибки первого рода вероятность правильного обнаружения по алгоритму (7) зависит от свойств источника излучения и приемной антенны. Для примеров, описанных в [2], она была рассчитана на ЭВМ ЕС-1060 методом имитационного моделирования. Зависимости вероятности правильного обнаружения D от параметра $q_0 = 2\sigma_s^2 \sqrt{\bar{n}_t}/\sigma_N^2$ (здесь σ_s^2 — средняя мощность полезного сигнала) показаны на рис. 3. Рис. 3а соответствует равномерному ПРЭЯ источника, а рис. 3б — ПРЭЯ, спадающему от центра источника к его краям [2]. Расчеты проводились для заданных вероятности ошибки первого рода $F=10^{-4}$ и числа пространственных степеней свободы $n_L = 5$ ($n=11$) и различных пороговых уровней h_0 (кривые 1–4 соответствуют $h_0 = 0$; 3; 3,5 и 4). Величина порогового уровня h однозначно определяется выбранными F , n_L и h_0 .

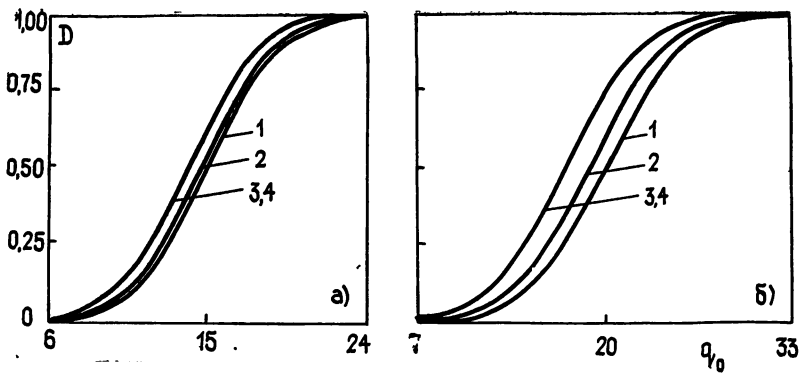


Рис. 3.

Как следует из проведенных расчетов, характеристики обнаружения по алгоритму (7) улучшаются при увеличении h_0 от нуля до 3,5 и практически не изменяются при дальнейшем увеличении до 4. Это находится в соответствии с результатами работы [2], согласно которым для данных примеров и для рассматриваемых значений параметра q_0 точность оценки (3), использованной при синтезе алгоритма обнаружения (7), также улучшается при изменении h_0 от нуля примерно до 3,5 и остается постоянной при дальнейшем увеличении h_0 .

В заключение отметим, что характеристики обнаружения по алгоритму (7) хуже, чем характеристики обнаружения по алгоритму (1) [1, 8], поскольку в алгоритме (1) используется дополнительная информация об истинном виде ПРЭЯ обнаруживаемого источника радионизлучения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кремер И. Я., Костылев В. И., Потапов Н. А. // Изв. вузов. Радиофизика. 1985. Т. 28. № 3. С. 330.
2. Кремер И. Я., Костылев В. И. // Изв. вузов. Радиофизика. 1988. Т. 31. № 1. С. 10.
3. Кремер И. Я., Кремер А. И., Петров В. М и др. Пространственно-временная обработка сигналов / Под. ред. И. Я. Кремера.—М.: Радио и связь, 1984.
4. Тихонов В. И. Статистическая радиотехника.—М.: Радио и связь, 1982.
5. Тихонов В. И. Оптимальный прием сигналов.—М.: Радио и связь, 1983.
6. Костылев В. И. Статья депонирована в ВИНТИ, рег. № 4899-85. Деп. от 8 июля 1985 г.
7. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Пер. с англ.—М.: Наука, 1979.
8. Кремер И. Я., Костылев В. И. // Радиотехника и электроника. 1987. Т. 32. № 5. С. 962.
9. Форсайт Дж., Малькольм М., Моулдер К. Машинные методы математических вычислений / Пер. с англ.—М.: Мир, 1980.

Поступила в редакцию
29 апреля 1987 г.

DETECTION OF AN EXTENDED RADIO SOURCE WITH UNKNOWN RADIANCE DISTRIBUTION

V. I. Kostylev

The algorithm for detection of an extended source of stochastic radiation is synthesized by means of generalized maximum likelihood method. This algorithm does not need a priori information about radiance distribution along the source surface. A possibility of analytical and numerical computation of the obtained algorithm detection characteristics is investigated.