ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том 32, № 2 РАДИОФИЗИКА 1989

УДК 522.2:523.164

ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ СИСТЕМЫ ИЗ ДВУХ РАДИОТЕЛЕСКОПОВ ПРИ КРОССКОРРЕЛЯЦИОННОЙ ОБРАБОТКЕ РЕГИСТРИРУЕМЫХ СИГНАЛОВ ПОСЛЕ ДЕТЕКТИРОВАНИЯ

А. А. Бочаров, Н. Я. Шапировская

Исследуется чувствительность системы из двух разнесенных радиотелескопов при кросскорреляционной обработке регистрируемых сигналов после детектирования. Получена общая формула для чувствительности и рассмотрены основные частные случаи, представляющие практический интерес. Особо выделен случай, когда основные параметры обоих радиотелескопов сильно отличаются, что типично для синхронных наблюдений с использованием космического радиотелескопа.

Ценная информация о свойствах различных космических радиоисточников может быть получена путем кросскорреляционного анализа продетектированных сигналов с двух пространственно разнесенных радиотелескопов. Например, при одновременных наблюдениях мерцаний пульсаров в двух далеко разнесенных пунктах по величине сдвига максимума кросскорреляционной функции (ККФ) можно определить собственные скорости пульсаров и межзвездной среды относительно наблюдателя. Кросскорреляция наблюдаемых потоков источников позволяет существенно ослабить роль различных помех, в частности для выявления быстрой переменности таких объектов, как квазары, центр Галактики и т. д.

Особый интерес представляют подобные наблюдения при вынесении одного из радиотелескопов в космос. Большая база между радиотелескопами, недостижимая на Земле, позволяет, в частности, разнести приемники за пределы одного дифракционного «пятна» и непосредственно измерить размер дифракционной картины мерцаний на различных частотах, что представляет большой интерес с точки зрения диагностики межзвездной и межпланетной плазмы.

В настоящей работе исследуется чувствительность системы из двух разнесенных радиотелескопов при кросскорреляционной обработке сигналов после детектирования, т. е. в радиометрическом режиме. В ходе решения поставленной задачи получено выражение для дисперсии оценки ККФ двух сигналов, определенных на конечном временном интервале и в присутствии шумов; затем на этой основе выведена общая формула для чувствительности системы по плотности потока радиоизлучения и рассмотрено несколько характерных частных случаев. Особо выделен случай, когда основные параметры обоих радиотелескопов сильно отличаются, что характерно для одновременных наземно-космических наблюдений.

1. Дисперсия оценки ККФ двух сигналов при наличии шумов. Запишем сигналы, поступающие после детектирования с выходов обоих приемников на коррелятор, в виде

$$U_1(t) = u_{c_1}(t) + u_{ш_1}(t),$$
$$U_2(t) = u_{c_2}(t) + u_{ш_2}(t), \tag{1}$$

где $u_{c_{1,2}}(t)$ — полезный сигнал, а $u_{ш_{1,2}}(t)$ — шум на выходах соответственно 1-го и 2-го приемников. Интересующая нас величина есть ККФ полезных сигналов

$$K_{c_1c_2}(\tau) = \overline{u_{c_1}(t)u_{c_2}(t+\tau)} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_0^T u_{c_1}(t)u_{c_2}(t+\tau)\,dt$$

(предполагается, что постоянная составляющая в обоих сигналах устранена).

В действительности мы получаем оценку искомой ККФ для конечного временного интервала T и в присутствии шума, т. е.

$$\hat{K}_{c_1c_2}(\tau) = \widehat{\overline{U_1(t)U_2(t+\tau)}} = \frac{1}{T}\int\limits_0^T U_1(t)U_2(t+\tau)dt, \tag{2}$$

причем согласно (1) и (2)

$$\hat{K}_{c_1c_2}(\tau) = \widehat{\overline{u_{c_1}u_{c_2}}} + \widehat{\overline{u_{c_1}u_{ш_2}}} + \widehat{\overline{u_{ш_1}u_{c_2}}} + \widehat{\overline{u_{ш_1}u_{ш_2}}}. \tag{3}$$

Полученную оценку искомой ККФ можно представить в виде

$$\hat{K}_{c_1c_2}(\tau) = K_{c_1c_2}(\tau) + N(\tau),$$

где величина $N(\tau)$ описывает случайные флуктуации или «шум» оценки ККФ. Подчеркнем, что по сути дела единственным источником ошибок при получении оценки ККФ является не наличие шумов в коррелируемых сигналах, а ограниченность интервала наблюдений T. Действительно, поскольку шумы на выходах приемников обычно можно считать некоррелированными друг с другом и с полезными сигналами, при $T\to\infty$ все слагаемые в правой части (3) за исключением первого стремятся к нулю, следовательно,

$$\lim_{T\to\infty}\hat{K}_{c_1c_2}(\tau) = K_{c_1c_2}(\tau).$$

Величина $N(\tau)$ является суммой случайных ошибок, связанных с ограниченностью интервала T, для всех четырех слагаемых в правой части (3), т. е.

$$N(\tau) = n_{c_1c_2}(\tau) + n_{c_1ш_2}(\tau) + n_{ш_1c_2}(\tau) + n_{ш_1ш_2}(\tau), \tag{4}$$

где $n_{c_1c_2}(\tau) = \widehat{\overline{u_{c_1}u_{c_2}}} - \overline{u_{c_1}u_{c_2}}$ — ошибка оценки ККФ полезных сигналов и т. д. Соответственно дисперсия «шума» получаемой оценки ККФ есть

$$\sigma_N^2 = \sigma^2_{n_{c_1c_2}} + \sigma^2_{n_{c_1ш_2}} + \sigma^2_{n_{ш_1c_2}} + \sigma^2_{n_{ш_1ш_2}}. \tag{5}$$

Пусть имеем оценку ККФ двух случайных процессов $x(t)$ и $y(t)$, полученную на конечном временном интервале T,

$$\hat{K}_{xy}(\tau) = \frac{1}{T}\int\limits_0^T x(t)y(t+\tau)dt.$$

Дисперсия ошибки для получаемой оценки ККФ определяется как [1]

$$D[\hat{K}_{xy}(\tau)] \approx \frac{1}{T}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}[K_x(t)K_y(t) + K_{xy}(t+\tau)K_{yx}(t-\tau)]dt, \tag{6}$$

где $K_x(\tau)$, $K_y(\tau)$ — автокорреляционные функции (АКФ) сигналов $x(t)$ и $y(t)$. На основе (6) можно получить следующее приближенное выражение для дисперсии оценки ККФ:

$$D[\hat{K}_{xy}(\tau)] \leqslant \frac{2}{T}\int_{-\infty}^{+\infty} K_x(t)K_y(t)dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{T}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} K_x^2(t)dt \int_{-\infty}^{+\infty} K_y^2(t)dt\right]^{1/2} - \frac{2\sigma_x^2\sigma_y^2}{T}\sqrt{\Delta\tau_x\,\Delta\tau_y}, \tag{7}$$

где $\sigma^2_{x,y}$ и $\Delta\tau_{x,y}$ — соответственно дисперсии и интервалы корреляции (характерные временные масштабы) процессов $x(t)$ и $y(t)$, определяемые как

$$\sigma^2_{x,y} = K_{x,y}(0), \quad \Delta\tau_{x,y} = \frac{1}{\sigma^4_{x,y}}\int_{-\infty}^{+\infty} K^2_{x,y}(\tau)d\tau.$$

Отметим, что для полностью некоррелированных процессов множитель «2» в (7) можно опустить, поскольку у подынтегрального выражения в правой части (6) второе слагаемое равно нулю.

С учетом (5) и (7) для искомой дисперсии «шума» оценки ККФ имеем

$$\sigma_N^2 \leqslant \frac{2\sigma^2_{c_1}\sigma^2_{c_2}}{T}\sqrt{\Delta\tau_{c_1}\,\Delta\tau_{c_2}} + \frac{\sigma^2_{c_1}\sigma^2_{ш_2}}{T}\sqrt{\Delta\tau_{c_1}\,\Delta\tau_{ш_2}} + \\ + \frac{\sigma^2_{ш_1}\sigma^2_{c_2}}{T}\sqrt{\Delta\tau_{ш_1}\,\Delta\tau_{c_2}} + \frac{\sigma^2_{ш_1}\sigma^2_{ш_2}}{T}\sqrt{\Delta\tau_{ш_1}\,\Delta\tau_{ш_2}} \tag{8}$$

(множитель «2» в (7) учтен только для первого члена в правой части (8), поскольку все остальные члены соответствуют некоррелированным процессам).

2. **Вывод общей формулы для чувствительности при двухантенном некогерентном корреляционном приеме.** После кросскорреляционной обработки сигналов с выходов двух радиотелескопов мы получаем оценку ККФ, в которой наряду с искомой величиной — ККФ исследуемых сигналов — присутствует и случайный шум, дисперсия которого определяется выражением (8). Как правило, нас интересует поведение получаемой ККФ вблизи ее максимума (например при исследовании временного сдвига между сигналами). Максимальное значение искомой ККФ полезных сигналов u_{c_1} и u_{c_2} можно записать как

$$\max K_{c_1c_2}(\tau) = \gamma\sigma_{c_1}\sigma_{c_2},$$

где $\gamma \leqslant 1$ — максимальное значение нормированной ККФ $R_{c_1c_2}(\tau) = K_{c_1c_2}(\tau)/K_{c_1c_2}(0)$. Условие достоверного обнаружения максимума ККФ представим в виде

$$\gamma\sigma_{c_1}\sigma_{c_2} \geqslant C\sigma_N, \tag{9}$$

где C — некий заданный «порог обнаружения»; обычно выбирается $C \sim 5$ [2].

Введем следующие величины, характеризующие свойства полезных сигналов и шумов на выходе обоих приемников:

$$\rho_{1,2} = \sigma_{c_{1,2}}/\sigma_{ш_{1,2}}, \quad \varkappa_{1,2} = \Delta\tau_{c_{1,2}}/\Delta\tau_{ш_{1,2}}, \tag{10}$$

т. е. $\rho_{1,2}$ есть отношение сигнал/шум, а $\varkappa_{1,2}$ — отношение характерных временных масштабов сигнала и шума. Подставляя (8) в (9) с учетом (10), получим уравнение

$$\left(\frac{\gamma^2 T}{2C^2\sqrt{\Delta\tau_{ш_1}\Delta\tau_{ш_2}}}-\sqrt{\varkappa_1\varkappa_2}\right)\rho_1^2\rho_2^2-\frac{1}{2}(\rho_1^2\sqrt{\varkappa_1}+\rho_2^2\sqrt{\varkappa_2}+1)=0\,, \qquad (11)$$

решение которого определяет нам минимальное отношение сигнал/шум на выходе приемников для достоверного выделения максимума ККФ.

Перейдем теперь к плотности потока исследуемого источника, используя известное выражение для отношения сигнал/шум на выходе радиометра [3]

$$\rho=\frac{\Delta PA}{2kT_ш}\sqrt{\Delta f\,\Delta\tau_ф}\,, \qquad (12)$$

где ΔP — плотность потока, A — эффективная площадь антенны, $T_ш$ — шумовая температура приемной системы, Δf — полоса пропускания ВЧ тракта приемника, $\Delta\tau_ф$ — постоянная времени последетекторного НЧ фильтра, $k=1{,}38\cdot10^{-23}$ Дж/град — постоянная Больцмана. (Строго говоря, в (12) должен быть включен коэффициент порядка единицы, зависящий от конкретной схемы приемника [3], но для оценочных расчетов им можно пренебречь.) Введем параметр

$$l_{1,2}=\frac{A_{1,2}}{2kT_{ш_{1,2}}}\sqrt{\Delta f_{1,2}\Delta\tau_{ф_{1,2}}}\,, \qquad (13)$$

который можно трактовать как некий обобщенный показатель «качества» радиометра. Подставляя (12) и (13) в (11), получаем следующее уравнение:

$$\alpha\Delta P^4-\Delta P^2(\sqrt{\varkappa_1}/l_2^2+\sqrt{\varkappa_2}/l_1^2)-1/l_1^2l_2^2=0\,, \qquad (14)$$

где $\alpha=(\gamma^2T/C^2\sqrt{\Delta\tau_{ш_1}\Delta\tau_{ш_2}})-2\sqrt{\varkappa_1\varkappa_2}$. Решение уравнения (14) дает нам минимальную величину плотности потока источника $\Delta P_{\min}$ для выполнения условия (9), т. е. определяет чувствительность системы при двухантенном корреляционном приеме. Из (14) имеем

$$\Delta P_{\min}=\frac{1}{\sqrt{2\alpha}}\left\{\frac{\sqrt{\varkappa_1}}{l_2^2}+\frac{\sqrt{\varkappa_2}}{l_1^2}+\left[\left(\frac{\sqrt{\varkappa_1}}{l_2^2}+\frac{\sqrt{\varkappa_2}}{l_1^2}\right)^2+\frac{4\alpha}{l_1^2l_2^2}\right]^{1/2}\right\}^{1/2}. \qquad (15)$$

Отметим сразу, что должно быть выполнено условие $\alpha>0$, иначе вообще нельзя получить достоверную оценку ККФ. Это условие определяет прежде всего требования к величине интервала наблюдения T.

3. Основные частные случаи и анализ общей формулы для чувствительности. Определенные упрощения общей формулы (15) для чувствительности при двухантенном некогерентном корреляционном приеме могут быть сделаны в ряде случаев, часто встречающихся на практике. Как правило, интервал корреляции шумов на выходах обоих приемников определяется постоянной времени последетекторных сглаживающих фильтров, т. е. $\Delta\tau_{ш_{1,2}}=\Delta\tau_{ф_{1,2}}$. Кроме того, при исследовании, например, пространственной корреляции мерцаний источника на одной частоте характерные временные масштабы регистрируемых обеими антеннами сигналов совпадают, т. е. $\Delta\tau_{c_1}=\Delta\tau_{c_2}=\Delta\tau_c$. В таком случае (15) можно преобразовать к виду

$$P_{\min}=\frac{1}{\sqrt{2\alpha_0}\sqrt[4]{\Delta\tau_c}}\{m_1+m_2+[(m_1+m_2)^2+4\alpha_0m_1m_2]^{1/2}\}^{1/2}\,, \qquad (16)$$

где

$$\alpha_0=(\gamma^2T/C^2\Delta\tau_c)-2,$$

$$m_{1,2} = \sqrt{\Delta\tau_{\Phi_{1,2}}}/l_{1,2}^2 = (4k^2\, T_{\text{ш}_{1,2}}^2)/(A_{1,2}^2\, \Delta f_{1,2} \sqrt{\Delta\tau_{\Phi_{1,2}}}).$$

Следующее упрощение может быть сделано при идентичности полос пропускания и последетекторных фильтров обоих приемников, т. е. при $\Delta f_1 = \Delta f_2 = \Delta f$, $\Delta\tau_{\Phi_1} = \Delta\tau_{\Phi_2} = \Delta\tau_\Phi$. Подчеркнем, что на практике не имеет смысла выбирать различные постоянные времени приемников, поскольку временное разрешение получаемой ККФ будет все равно определяться наибольшей из них. В данном случае из (16) получаем

$$\Delta P_{\min} = \frac{\sqrt{2}\,k}{\sqrt{\alpha_0 \Delta f}} \frac{1}{\sqrt[4]{\Delta\tau_\Phi\, \Delta\tau_c}} \sqrt{\frac{T_{\text{ш}_1} T_{\text{ш}_2}}{A_1 A_2}} \times$$
$$\times \{\delta + \delta^{-1} + [(\delta + \delta^{-1})^2 + 4\alpha_0]^{1/2}\}^{1/2}, \tag{17}$$

где параметр $\delta = A_1 T_{\text{ш}_2}/A_2 T_{\text{ш}_1}$ непосредственно характеризует различие двух приемных систем.

Поскольку (17) соответствует часто встречающейся на практике ситуации, проанализируем подробнее данное выражение. Прежде всего должно выполняться условие $\alpha_0 > 0$, т. е. $T/\Delta\tau_c > 2(C/\gamma)^2$, определяющее независимо от параметров приемных систем предел снизу на длину коррелируемых реализаций. Предположим сначала, что длина реализаций существенно превышает интервал корреляции сигнала $T \gg \Delta\tau_c$, а антенные системы не слишком отличаются по параметрам друг от друга, т. е.

$$\alpha_0 \cong \left(\frac{\gamma}{C}\right)^2 \frac{T}{\Delta\tau_c} \gg \max(\delta, \delta^{-1}). \tag{18}$$

При этом из (17) имеем

$$\Delta P_{\min} \cong \sqrt{\frac{C}{\gamma}} \frac{2k}{\sqrt[4]{\Delta\tau_\Phi T}} \frac{1}{\sqrt{\Delta f}} \sqrt{\frac{T_{\text{ш}_1} T_{\text{ш}_2}}{A_1 A_2}}. \tag{19}$$

Данное выражение с точностью до постоянного коэффициента порядка единицы эквивалентно известной формуле для чувствительности радиоинтерферометра [3] при времени накопления на один отсчет функции когерентности поля $\tau_{\text{экв}} = \sqrt{\Delta\tau_\Phi T}$. (Подчеркнем, что величина $\Delta\tau_c$ непосредственно в (19) не входит, а фигурирует только в условии (18) применимости данного выражения.)

Из (19) непосредственно следует, в частности, известная формула для чувствительности радиоинтерферометра интенсивностей [3]. Поскольку в этом случае последетекторное сглаживание сигналов отсутствует, следует положить в (19) $\Delta\tau_\Phi \approx 1/\Delta f$, откуда

$$\Delta P_{\min} \approx \sqrt{\frac{C}{\gamma}} \frac{2k}{\sqrt[4]{\Delta f T}} \sqrt{\frac{T_{\text{ш}_1} T_{\text{ш}_2}}{A_1 A_2}},$$

где величина T также имеет смысл времени накопления на один отсчет. Важно подчеркнуть существенное различие во временном разрешении рассматриваемого нами корреляционного приема, когда исследуется временная корреляция регистрируемых сигналов, и при радиоинтерферометрии, когда исследуется пространственная когерентность поля. При корреляционном приеме временное разрешение получаемой оценки ККФ определяется величиной $\Delta\tau_\Phi$, а время T характеризует область определения оценки ККФ. При радиоинтерферометрии временное разрешение определяется временем накопления T, а величина $\Delta\tau_\Phi \approx 1/\Delta f$ влияет только на чувствительность.

Важную специфику имеет другой крайний случай, когда параметры антенных систем столь различны, что выполняется условие

$$\alpha_0 \cong \left(\frac{\gamma}{C}\right)^2 \frac{T}{\Delta\tau_c} \ll \max(\delta, \delta^{-1}).$$

Данный случай представляет для нас особый интерес, поскольку он типичен для наблюдений с использованием космического радиотелескопа. Для определенности положим, что параметры хуже у второй антенны, т. е. $\delta \gg 1 \gg \delta^{-1}$. Тогда из (17) имеем

$$\Delta P_{\min} \cong \frac{2kC}{\gamma} \sqrt[4]{\frac{\Delta\tau_c}{\Delta\tau_ф}} \frac{1}{\sqrt{\Delta f T}} \frac{T_{ш_2}}{A_2}. \tag{20}$$

Видим, что чувствительность системы здесь определяется исключительно параметрами худшей антенны. Улучшение параметров первой антенны, например снижение $T_{ш_1}$, в данном случае не даст никаких результатов, т. е. недостаточно высокие параметры космического радиотелескопа не всегда могут быть скомпенсированы использованием высококачественного наземного радиотелескопа.

Повышение чувствительности путем увеличения $\Delta\tau_ф$ возможно только пока $\Delta\tau_ф < \Delta\tau_c$, иначе временное разрешение системы окажется неудовлетворительным. При максимальном значении $\Delta\tau_ф \cong \Delta\tau_c$ из (20) получаем

$$\Delta P_{\min} \cong \frac{2kC}{\gamma} \frac{1}{\sqrt{\Delta f T}} \frac{T_{ш_2}}{A_2},$$

т. е. имеем аналог формулы для чувствительности радиоинтерферометра с идентичными антеннами, эквивалентными худшей из используемых антенн.

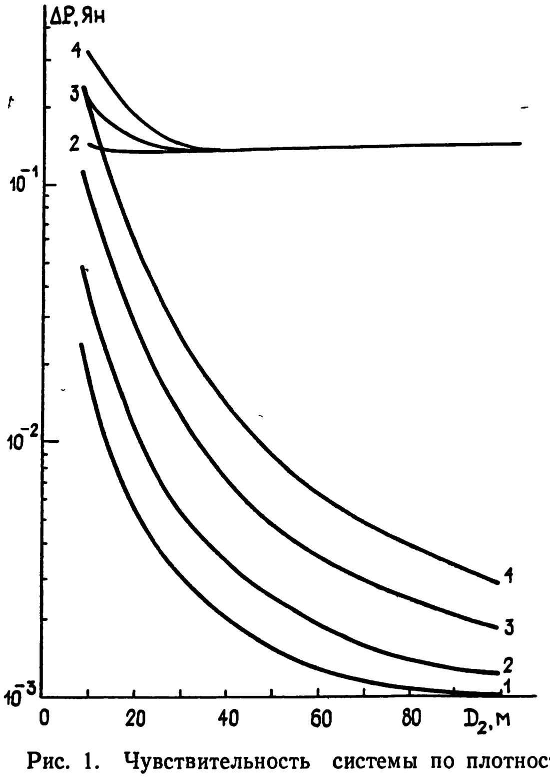

Рис. 1. Чувствительность системы по плотности потока в зависимости от параметров радиотелескопов. (Толстые линии — для радиотелескопа с параметрами $D_1 = 70$ м и $T_{ш_1} = 50$ К, тонкие — 10 м и 150 К соответственно. Цифры 1, 2, 3, 4 соответствуют шумовой температуре второго радиотелескопа $T_{ш_2} = 25$, 50, 125 и 250 К.)

Влияние различных параметров используемых радиотелескопов на чувствительность системы при двухантенном некогерентном корреляционном приеме проиллюстрировано на рис. 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бендат Дж., Пирсол А. Измерение и анализ случайных процессов. — М.: Мир, 1974.
2. Христиансен У., Хегбом И. Радиотелескопы. — М.: Мир, 1972.
3. Есепкина Н. А., Корольков Д. В., Парийский Ю. Н. Радиотелескопы и радиометры. — М.: Наука, 1973.

Институт космических исследований
АН СССР

Поступила в редакцию
16 апреля 1987 г.

THE SENSITIVITY OF THE SYSTEM OF TWO RADIO TELESCOPES WITH CROSSCORRELATION PROCESSING OF THE RECEIVED SIGNALS AFTER AMPLITUDE DETECTION

A. A. Bocharov, N. Ya. Shapirovskaya

The sensitivity of the two radio telescope system with crosscorrelation processing of signals after amplitude detection is investigated. The general expression for the sensitivity is obtained and some particular cases of practical interest are considered. The special attention is paid to the case when the main parameters of the two radio telescopes are very different that is typical of simultaneous observations with a space radio telescope.

ИНФОРМАЦИЯ О НОВЫХ КНИГАХ

Проблемы теоретической физики и астрономии: К 70-летию академика В. Л. Гинзбурга / Отд-ние общей физики и астрономии АН СССР. — М.: Наука, 1989 (IV кв.). — 54 л.

Сборник посвящен 70-летию выдающегося советского физика-теоретика, лауреата Ленинской и Государственной премий, академика Виталия Лазаревича Гинзбурга Сборник содержит статьи, охватывающие широкий круг проблем современной физики, который исследовался и продолжает исследоваться в настоящее время ученым, — общую теорию относительности, теорию твердого тела и сверхпроводимости, физику плазмы, физику элементарных частиц, различные разделы астрономии и астрофизики

Для специалистов в области физики и астрофизики.

Астрофизика космических лучей / Березинский В. С., Буланов С. В., Гинзбург В. Л., Догель В. А., Птускин В. С.; Под ред. В. Л. Гинзбурга. — 2-е изд., испр. и доп —М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989 (III кв.). — 25 л.

Посвящена астрофизике космических лучей, включая происхождение космических лучей, наблюдаемых у Земли. Обсуждены проблемы распространения и ускорения космических лучей в межзвездной среде и вообще в Галактике. Особо рассмотрены космические лучи со сверхвысокой энергией. Освещены также некоторые вопросы, связанные с космическими лучами, гамма-и рентгеновской астрономии и астрономии нейтрино с высокими энергиями. Резюмированы результаты наблюдений и экспериментов.

Второе издание (1-е — 1984 г.) переработано и дополнено с учетом всех известных авторам новых данных и, в частности, материалов XX Международной конференции по космическим лучам, прошедшей в Москве в августе 1987 г.

Для научных работников, аспирантов и студентов, специализирующихся в области астрофизики высоких энергий и физики космических лучей.

Петвиашвили В. И., Похотелов О. А. Уединенные волны в плазме и атмосфере. — М.: Энергоатомиздат, 1989 (III кв.). — 13,5 л.

Описаны математические модели уединенных волн, наблюдаемых в природе и эксперименте. Особое внимание уделено дрейфовым солитонам — вихрям, их роли в конвективном теплопереносе, последним достижениям их моделирования в лаборатории. Проведена аналогия между этими вихрями в плазме и циклонами и антициклонами в атмосфере. Исследована устойчивость уединенных волн.

Для научных работников в области физики плазмы и гидромеханики.