

УДК 538.56:519.25

## ИНТЕРФЕРОМЕТРЫ МАЙКЕЛЬСОНА И ФАБРИ—ПЕРО В ОДНОМЕРНОЙ СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

*Ю. Н. Барабаненков, В. С. Дородных*

Метод инвариантного погружения применен к расчету параметров картин интерференции в схемах Майкельсона и Фабри—Перо со случайно-слоистой средой в рабочем плече и между отражателями, соответственно, при нормальном падении монохроматической волны. С использованием граничных условий Зоммерфельда на отражателях получены формулы для интенсивности волнового поля, а также контрастности, числа и полуширины ее максимумов в зависимости от длины базы интерферометров. Перечисленные величины выражены через амплитуду и фазу удовлетворяющего уравнению Риккати коэффициента отражения волны от слоя среды с одним отражателем и заданной реализацией диэлектрической проницаемости. Путем решения диффузионного уравнения ЭФПК в пределе высокой отражательной способности отражателей найдены контрастность максимумов и их число для средней по ансамблю интенсивности.

Оптические интерферометры с параметрами, подверженными воздействию случайно-неоднородной среды, используются для решения задач геодезии и метрологии [1, 2] по измерению расстояний с базой в диапазоне до нескольких сотен метров в приземном слое атмосферы, а также для решения задач оптики и квантовой электроники [3-5]. В геодезии и метрологии применяется схема Майкельсона (М) с продольной разверткой интерференционной картины вдоль измеряемой базы и счетом числа максимумов интенсивности ее поля непосредственно [6] или, например, путем перестройки лазера по частоте [7]. Турбулентность воздуха оказывает влияние на контрастность максимумов картины интерференции и их число. Известные оценки [8-10] воздействия турбулентности на контрастность ограничены случаем двухлучевой интерференции [11]. В оптике и квантовой электронике широкое применение находит схема интерферометра Фабри—Перо (ФП). Учет случайных неоднородностей заполняющей его среды производится в приближении геометрической оптики [3] с помощью модели случайного фазового экрана [12, 13], путем решения в борновском приближении системы параболических уравнений [5].

Последовательный расчет параметров лазерно-интерферометрических систем в случайно-неоднородной среде связан с решением краевой стохастической задачи для уравнений Максвелла. В данной работе такая задача ставится и частично решается методом инвариантного погружения [14] для схем М и ФП в случайно-слоистой среде при нормальном падении волны. В разд. 1 контрастность максимумов интенсивности поля продольной развертки картины интерференции, их число, полуширина выражаются при заданной реализации проницаемости через модуль и фазу комплексного коэффициента отражения волны от слоя среды. В разд. 2 с помощью уравнения Эйнштейна—Фоккера—Планка—Колмогорова (ЭФПК) вычисляются параметры картины интерференции, исходя из среднего по ансамблю значения интенсивности волнового поля.

### 1. ПАРАМЕТРЫ ИНТЕРФЕРЕНЦИОННОЙ КАРТИНЫ В СЛОИСТОЙ СРЕДЕ

На рис. 1 поясняется принцип действия интерферометрической схемы М и на рис. 2 — схемы ФП в слоистой среде, расположенной

в области  $0 < x < L$  прямоугольной системы координат  $x, y, z$ . Диэлектрическая вещественная проницаемость среды  $\varepsilon(x) = \bar{\varepsilon} + \tilde{\varepsilon}(x)$ , где  $\bar{\varepsilon}$  — постоянное среднее значение и  $\tilde{\varepsilon}(x)$  — флуктуирующая часть. На слой среды из области  $x > L$  в отрицательном направлении оси  $x$  падает плоская монохроматическая линейно поляризованная электромагнитная волна с вектором напряженности электрического поля, параллельным оси  $z$ , и  $E_z = \exp[-ik_L(x-L)]$ ,  $k_L = (\omega/c)\sqrt{\varepsilon_L}$ ,  $\varepsilon_L = \text{const}$ . В схеме М:  $S$  — светоделитель,  $G$  — отражатель в плоскости  $x=0$  измерительного плеча,  $G'$  — отражатель в плоскости  $y=L'$  опорного плеча; интенсивность картины интерференции регистрируется детектором  $P$ . В схеме ФП:  $G$  и  $G''$  — отражатели в плоскостях  $x=0$  и  $x=L$ ; интенсивность картины интерференции регистрируется в прошедшем свете детектором  $P$ , в области  $x < 0$  с волновым числом  $k_0 = (\omega/c)\sqrt{\varepsilon_0}$ ,  $\varepsilon_0 = \text{const}$ .

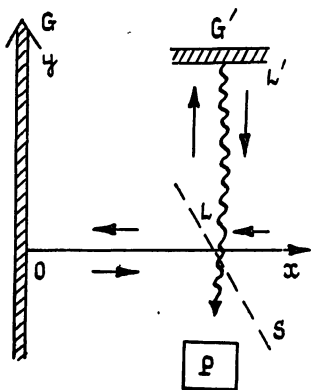


Рис. 1.

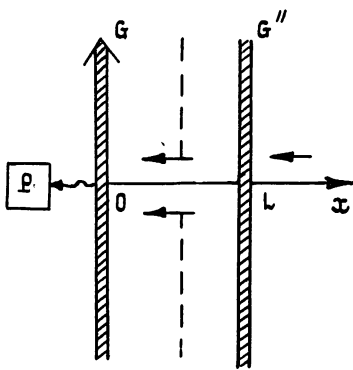


Рис. 2.

Если временно отвлечься от светоделителя  $S$  и отражателя  $G'$  в схеме М, то во всем пространстве для обеих схем у нас отличны от нуля только две компоненты  $E_z = E(x)$  и  $H_y = H(x)$  электромагнитного поля, причем внутри слоя

$$\frac{d^2 E}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(x) E = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{i\omega}{c} H. \quad (1)$$

Следуя [15], считаем, что бесконечно тонкие одинаковые отражатели  $G, G', G''$  характеризуются поверхностным коэффициентом электропроводности  $\hat{\sigma}$ , определяющим разрыв непрерывности тангенциальной составляющей магнитного поля. Как обычно, тангенциальная составляющая электрического поля всюду непрерывна. Таким образом, граничные условия на поверхности отражателя  $x=\bar{x}$  могут быть записаны в виде

$$E(\bar{x}+0) = E(\bar{x}-0) = E(\bar{x}),$$

$$dE/dx|_{x=\bar{x}+0} - dE/dx|_{x=\bar{x}-0} = -ikgE(\bar{x}), \quad (2)$$

$$k = (\omega/c)\sqrt{\varepsilon}, \quad g = 4\pi\omega\hat{\sigma}/(kc^2),$$

и достаточно сосредоточить внимание на напряженности электриче-

\* В схемах М и ФП детекторы  $P$  регистрируют интенсивности, представленные далее формулами (5) и (7), как функции длины базы  $L$  интерферометров.

ского поля. В схеме М условия (2) ставятся при  $\bar{x}=0$ , для  $\bar{x}=L$  второе из них заменяется на требование непрерывности производной напряженности электрического поля. В схеме ФП условия (2) относятся к  $x=0$  и  $x=L$ .

Выделяем внутри рассматриваемого слоя две волны с неоднородными амплитудами [14]. Обозначаем  $R(x)$  отношение напряженности электрического поля волны, распространяющейся в положительном направлении оси  $x$ , к напряженности электрического поля волны с противоположным направлением распространения. Из (1) и граничных условий (2) в плоскости  $\bar{x}=0$  приходим к задаче Коши для уравнения Риккати:

$$dR/dx = 2ikR + (ik/2\bar{\epsilon}) \tilde{\epsilon}(x) (1+R)^2, \quad (3)$$

$$R(0) = \left(1 - \frac{k_0}{k} - g\right) / \left(1 + \frac{k_0}{k} + g\right).$$

Здесь  $R(0)$  — коэффициент отражения плоской волны отражателем  $G$ . Применение граничных условий (2) в плоскости  $\bar{x}=L$ , учитывающих отражатель  $G''$ , позволяет найти коэффициент отражения волны от слоя среды

$$R_L = \frac{k_L - (1+g)k + [k_L + (1-g)k]R(L)}{k_L + (1+g)k + [k_L - (1-g)k]R(L)}. \quad (4)$$

Начальное условие (3) и равенство (4) обобщают на случай слоистой среды, ограниченной проводящими отражателями  $G$  и  $G''$ , формулы [14]. В случае проводящих отражателей ( $g \neq 0$ ) остается без изменения, что легко проверить, соотношение (см. [14], (7.1.26)), выражающее квадрат модуля напряженности поля волны на выходе  $x=0$  из слоя среды через величины  $R_L$ ,  $R(L)$ ,  $R(0)$ .

Далее, для простоты, полагаем  $k_L = k = k_0$ . Тогда в схеме М согласно (4) при  $g=0$  коэффициент отражения волны от слоя с одним отражателем  $G$  равен  $R_L = R(L)$ . Произведем учет наличия светоделиителя  $S$  и отражателя  $G'$  опорного плеча интерферометра простым путем, предполагая, что на вход детектора  $P$  поступает волна со значением напряженности электрического поля, равным сумме  $R(L) + R(0) \exp(2kL')$ . Возводя ее по модулю в квадрат и деля на квадрат модуля второго слагаемого, получаем нормированную интенсивность поля интерференционной картины на входе детектора:

$$J_M(L) = \left[1 - \frac{\rho(L)}{\rho_0}\right]^2 + 2 \frac{\rho(L)}{\rho_0} \times \quad (5)$$

$$\times \{1 + \cos[\varphi_0(L) + \varphi(L)]\}, \quad \varphi_0(L) = 2k(L - L').$$

При записи этого равенства использованы обозначения:

$$R(x) = -\rho(x) \exp\{i[2kx + \varphi(x)]\}, \quad \rho_0 = g/(g+2). \quad (6)$$

В схеме ФП тождественное преобразование упомянутого соотношения из [14] позволяет представить интенсивность поля картины интерференции, регистрируемую детектором  $P$ , в виде

$$I_{\Phi\P}(0) = |E(0)|^2 = (1 - \rho_0)^4 \frac{1 - \rho^2(L)}{1 - \rho_0^2} \times \quad (7)$$

$$\times \{1 + \rho_0^2 \rho^2(L) - 2\rho_0 \rho(L) \cos[2kL + \varphi(L)]\}^{-1}.$$

Для однородного слоя среды, когда  $\rho(L) = \rho_0$  и  $\varphi(L) = 0$ , получается известная формула Эйри [11].

При перемещении отражателя  $G$  в схемах на рис. 1 и 2 интенсивности (5) и (7) принимают свои максимальные  $I_{\max}$  и минимальные  $I_{\min}$  значения. Обозначим  $V_M$  и  $V_{\Phi\Pi}$  контрастность (видность) максимумов интенсивности в схемах  $M$  и  $\Phi\Pi$ , определяемую согласно [11] как  $(I_{\max} - I_{\min}) / (I_{\max} + I_{\min})^{-1}$ . Пусть относительное отклонение диэлектрической проницаемости от среднего значения мало по сравнению с единицей,  $|\tilde{\varepsilon}(x)/\bar{\varepsilon}| \ll 1$ . Тогда рассмотрение следующей из (3), (6) системы уравнений [14] для  $\rho(x)$  и  $\Phi(x) = 2kx + \varphi(x)$  показывает, что отношение производных этих величин порядка  $\rho'(x)/\Phi'(x) \sim \tilde{\varepsilon}(x)/\bar{\varepsilon}$  и при расчете максимумов и минимумов интенсивностей (5) и (7) вблизи заданного значения  $L$  можно пренебречь изменением  $\rho(L)$ . В результате для контрастностей получаются выражения

$$V_M = \frac{2\rho_0 \rho(L)}{\rho_0^2 + \rho^2(L)}, \quad V_{\Phi\Pi} = \frac{2\rho_0 \rho(L)}{1 + \rho_0^2 \rho^2(L)}. \quad (8)$$

Положения максимумов интенсивностей находятся путем решения уравнений

$$\varphi(L) = -\varphi_0(L) + 2\pi n \equiv a_n(L), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (9)$$

Здесь под  $\varphi_0(L)$  в схеме  $\Phi\Pi$  подразумевается величина  $2kL$ . Согласно (9) число максимумов  $N(L_1, L_2)$  строго в интервале значений длины базы  $L_1 < L < L_2$  равно для обеих рассматриваемых схем числу пересечений случайного процесса  $\varphi(L)$  с заданной функцией  $a_n(L)$  и может быть подсчитано методом [16] с помощью соотношений

$$N(L_1, L_2) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} N_n(L_1, L_2), \quad N_n(L_1, L_2) = \int_{L_1}^{L_2} dL |\varphi'(L) - a_n'(L)| \delta[\varphi(L) - a_n(L)], \quad (10)$$

где под знаком модуля выступают производные по  $L$ . В схеме  $\Phi\Pi$  максимумы интенсивности характеризуются «полушириной»  $\Delta\Phi$ . Эта величина определяется [15] как отклонение фазы  $\Phi(L)$  коэффициента  $R(L)$  (6) от ее значения (9) в максимуме интенсивности (7), приводящее к относительному уменьшению интенсивности вдвое,

$$\sin(\Delta\Phi) = \frac{1 - \rho_0 \rho(L)}{2\sqrt{\rho_0 \rho(L)}}. \quad (11)$$

## 2. ПАРАМЕТРЫ ИНТЕРФЕРЕНЦИОННОЙ КАРТИНЫ ПО СРЕДНЕЙ ИНТЕНСИВНОСТИ

При исследовании стохастического уравнения Риккати (3) в случае, когда модуль коэффициента отражения  $\rho_0$  отражателей в однородной среде близок к единице,

$$1 - \rho_0 = 2/(g+2) \ll 1, \quad (12)$$

удобно перейти от него к системе уравнений [14]

$$\frac{dq}{dx} = -k \frac{\tilde{\varepsilon}(x)}{\bar{\varepsilon}} \sin(2kx + \varphi), \quad q(0) = 0, \quad (13)$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = k \frac{\tilde{\varepsilon}(x)}{\bar{\varepsilon}} \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \rho + \frac{1}{\rho} \right) \cos(2kx + \varphi) \right], \quad \varphi(0) = 0;$$

$$1 - \rho^2 = \frac{4(1 - \rho_0^2) \exp(q)}{[1 - \rho_0 + (1 + \rho_0) \exp(q)]^2}. \quad (14)$$

Из последнего равенства, в частности, видно, что  $\rho(x) < 1$  в силу  $\rho_0 < 1$ .

Запишем систему (13), (14) кратко как векторное стохастическое уравнение  $d\tilde{\xi}/dx = \tilde{F}(\tilde{\xi}, x)$ , где двумерный вектор  $\tilde{\xi}$  задается компонентами  $\xi_1 = q(x)$ ,  $\xi_2 = \varphi(x)$ . Считаем, что флуктуирующая часть диэлектрической проницаемости  $\tilde{\varepsilon}(x)$  представляет собой телеграфный двузначный процесс [14, 17] с корреляционной функцией  $\langle \tilde{\varepsilon}(x) \tilde{\varepsilon}(x') \rangle = \bar{\varepsilon}^2 \sigma_\varepsilon^2 \exp(-\nu|x - x'|)$ ; угловые скобки, как обычно, означают среднее по ансамблю. При этом условии для плотности вероятностей  $w(\tilde{\xi}, x) = \langle \delta[\tilde{\xi} - \tilde{\xi}(x)] \rangle$  из решения стохастического уравнения получается точный результат в виде нелокального аналога уравнения ЭФПК:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial w(\tilde{\xi}, x)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \xi_j} \int_0^x dx' A_j(\tilde{\xi} | x, x') w(\tilde{\xi}, x') = \\ & = \frac{\partial^2}{\partial \xi_j \partial \xi_l} \int_0^x dx' B_{jl}(\tilde{\xi} | x, x') w(\tilde{\xi}, x'), \quad w(\tilde{\xi}, 0) = \delta(\tilde{\xi}). \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь по повторяющимся индексам подразумевается суммирование и нелокальные аналоги коэффициентов сноса и диффузии даются их ядрами:

$$A_j(\tilde{\xi} | x, x') = \left\langle \frac{\partial \tilde{F}_j(\tilde{\xi}, x)}{\partial \xi_l} \tilde{F}_l(\tilde{\xi}, x') \right\rangle, \quad (16)$$

$$B_{jl}(\tilde{\xi} | x, x') = \langle \tilde{F}_j(\tilde{\xi}, x) \tilde{F}_l(\tilde{\xi}, x') \rangle.$$

Нас интересует предельный переход от уравнения (15) к уравнению ЭФПК (см., например, [18]) с коэффициентами сноса и диффузии вида [19]

$$A_j(\tilde{\xi}) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \int_0^L dx \int_0^x dx' A_j(\tilde{\xi} | x, x'), \quad (17)$$

$$B_{jl}(\tilde{\xi}) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \int_0^L dx \int_0^x dx' B_{jl}(\tilde{\xi} | x, x').$$

В конечном итоге мы воспользуемся при расчетах упрощенным вариантом уравнения ЭФПК, коэффициенты сноса и диффузии которого находятся с учетом малого параметра (12) путем замены  $\rho \rightarrow 1$  в (17) и равны

$$\begin{aligned} A_q &= B_{qq} = \frac{\sigma_\varepsilon^2 k^2 \nu / 2}{\nu^2 + (2k)^2}, \\ A_\varphi &= -B_{q\varphi} = B_{\varphi q} = -\frac{\sigma_\varepsilon^2 k^3}{\nu^2 + (2k)^2}, \end{aligned} \quad (18)$$

$$B_{\varphi\varphi} = \frac{\sigma_\varepsilon^2 k^3}{\nu} \left[ 1 + \frac{\nu^2 / 2}{\nu^2 + (2k)^2} \right].$$

Решение уравнения ЭФПК с коэффициентами (18) имеет вид

$$\begin{aligned} \omega(\xi, x) &= \omega(q, x) \omega(\varphi, x), \\ \omega(q, x) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi B_{qq}x}} \exp\left[-\frac{(q - B_{qq}x)^2}{4B_{qq}x}\right], \\ \omega(\varphi, x) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi B_{\varphi\varphi}x}} \exp\left[-\frac{(\varphi - A_{\varphi}x)^2}{4B_{\varphi\varphi}x}\right]. \end{aligned} \quad (19)$$

Оно рассматривалось в [14, 20] для дельта-коррелированных флуктуаций проницаемости. Так как (15) является уравнением Дайсона с массовым оператором в приближении Бурре, полученным путем усреднения стохастического уравнения Лиувилля для  $\delta[\xi - \xi(x)]$ , то интересующий нас предельный переход к уравнению ЭФПК совпадает с переходом от уравнения Дайсона к кинетическому уравнению Боголюбова—Крылова согласно [21], где изложен также способ оценок погрешностей этапов такого перехода\*.

Масштаб нелокальности ядер (16) порядка  $1/\nu$ . Обозначим  $x_M$  масштаб изменения  $\omega(\xi, x)$  в зависимости от  $x$ , обратное значение которого оценивается на основании (19) наибольшей из величин коэффициентов сноса и диффузии как

$$1/x_M = \max(A_q, |A_\varphi|, B_{\varphi\varphi}). \quad (20)$$

При условии

$$1/\nu x_M \ll 1 \quad (21)$$

можно пренебречь в уравнении (15) эффектом нелокальности, вынося  $\omega(\xi, x')$  из-под знака интегралов в точке  $x' = x$ . В получающемся при этом локальном уравнении вида [22] коэффициенты зависят от  $x$  с масштабом изменения порядка  $\lambda_1 = \max(1/k, 1/\nu)$ . Если  $\lambda_1$  мало по сравнению с  $x_M$  в смысле\*\*

$$\sqrt{\lambda_1/x_M} \ll 1, \quad (22)$$

то изменения коэффициентов локализованного уравнения (15) быстрые, и оно может быть усреднено по  $x$  подобно усреднению уравнений по времени в теории нелинейных колебаний [23]. Подстановка в (20), (22) коэффициента сноса  $A_q$  из (18) дает

$$\sigma_s \sqrt{\max(\nu/k, 1)} / \sqrt{1 + (\nu^2/4k^2)} \ll 1, \quad (23)$$

что практически совпадает с условием [14, 24] применимости уравнения ЭФПК для вычисления стационарного распределения модуля коэффициента отражения волны от слабопоглощающего слоя случайно-слоистой среды. Оценка разности решений уравнения ЭФПК с коэффициентами (17) и (18) способом [21] показывает, что она мала при физически наглядном условии

$$\sigma_p = (1 - \rho_0) (e^{2\tau_q} - 1)^{1/2} \ll 1, \quad \tau_q = B_{qq}L. \quad (24)$$

Здесь  $\sigma_p^2$  — средний квадрат флуктуаций величины  $\rho = \rho(L)$  и  $\rho_0$  — ее среднее значение, вычисленное с помощью плотности вероятностей

\* Следует заметить, что уравнение Дайсона [21] имеет в отличие от (15) ограниченный по норме массовый оператор. Однако это не мешает сформулировать с помощью результатов [21] качественные условия, допускающие переход от (15) к уравнению ЭФПК, на физические параметры задачи.

\*\* Происхождение квадратного корня в (22) поясняется следующим образом [21]. Скорость сходимости предельного перехода (17) оценивается относительной погрешностью порядка  $\lambda_1/L$ . Выбирая здесь  $L = \sqrt{\lambda_1 x_M}$ , получаем при условии (22)  $\lambda_1 \ll L \ll x_M$ , что позволяет усреднить по  $x$  локализованное уравнение (15).

$\omega(q, L)$  (19) и асимптотического равенства

$$1 - \rho = (1 - \rho_0) \exp(-q) + \dots, \quad (25)$$

которое получается из (14) отбрасыванием членов второго порядка малости по (12).

Усредняем с плотностью вероятностей (19) интенсивность поля (5) интерференционной картины в схеме М. С использованием (25) получаем

$$\langle J_M(L) \rangle = 2 \left[ 1 + \frac{1}{2} \sigma_p^2 + \exp(-\tau_\varphi) \cos 2(k'L - kL') \right], \quad (26)$$

$$\tau_\varphi = B_{\varphi\varphi} L, \quad k' = k + (1/2) A_\varphi,$$

где  $k'$  совпадает с вещественной частью эффективного волнового числа в приближении Бурре [25, 26]. Контрастность максимумов средней интенсивности (26) при изменении длины базы  $L$  дается равенством

$$\tilde{V}_M = \exp(-\tau_\varphi) / (1 + (1/2) \sigma_p^2), \quad (27)$$

которое, как и (26), имеет внешнее сходство с формулами из [8, 9].

Подсчитаем число максимумов  $\tilde{N}(0, L_0)$  средней интенсивности (26). Оно находится на основании соотношений вида (9) и (10), где нужно заменить  $\varphi(L)$  на среднее  $\langle \varphi(L) \rangle = A_\varphi L$ . Пусть в измерительном и опорном плечах интерферометра укладываются целые числа полуволин для однородной среды, из них  $n_0 = kL_0/\pi$ . Тогда

$$\tilde{N}(0, L_0) = k'/k(\tilde{N}_0 + 1) - 1. \quad (28)$$

Величина в правой части предполагается целочисленной,  $\tilde{N}_0 = n_0 - 1$  — число максимумов в однородной среде. Относительное изменение числа максимумов вследствие флуктуаций проницаемости оказывается порядка  $(k'/k) - 1$ .

Переходим к усреднению интенсивности поля (7) в схеме ФП. Раскладываем правую часть этой формулы как функцию фазы  $\Phi(L)$  в ряд Фурье, что равносильно методу суммирования многократно отраженных от отражателей  $G$  и  $G''$  интерферометра волн [11, 15]. Поочленное усреднение данного ряда с плотностью вероятностей фазы  $\omega(\varphi, L)$  (19) приводит к

$$\langle I_{\text{ФП}}(0) \rangle_\varphi = \frac{(1 - \rho_0)^3 (1 - \rho^2)}{(1 + \rho_0)(1 - \rho_0^2 \rho^2)} \times \quad (29)$$

$$\times \left[ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (\rho_0 \rho)^n \exp(-n^2 \tau_\varphi) \cos(2nk'L) \right].$$

Согласно (25) записываем асимптотические равенства

$$\frac{1 - \rho^2}{1 - \rho_0^2 \rho^2} = \frac{1}{\rho_0^2 + \exp(q)} + \dots, \quad (30)$$

$$(\rho/\rho_0)^n = 1 + n(1 - \rho_0)[1 - \exp(-q)] + \dots,$$

где многоточия означают члены первого и второго порядков малости по (12). Подставляем (30) в (29) и усредняем результат с плотностью вероятностей  $\omega(q, L)$  (19). Это дает

$$\langle I_{\Phi\Pi}(0) \rangle = \frac{(1 - \rho_0)^3}{1 + \rho_0} Q_2 \left[ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (1 + n\alpha) \rho_0^{2n} \exp(-n^2 \tau_\Phi) \cos(2nk'L) \right]. \quad (31)$$

Здесь обозначено

$$\alpha = (1 - \rho_0) Q_1 / Q_2, \quad Q_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} du \exp(-u^2) \times \\ \times \frac{1 - b_{1,2} \exp(-\tau_q - 2u \sqrt{\tau_q})}{\rho_0^2 + \exp(\tau_q + 2u \sqrt{\tau_q})}, \quad b_1 = 1, b_2 = 0. \quad (32)$$

Из (31) следует важный для схемы ФП вывод о том, что вклад в среднюю интенсивность кратностей отражения волн от отражателей порядка  $n$  убывает как  $\exp(-n^2 \tau_\Phi)$ . Такой результат получен, по сути дела, в [3, 4] методом геометрической оптики с привлечением модели фазовых неоднородностей с гауссовой статистикой. Оценим контрастность максимумов средней интенсивности (31) при изменении длины базы  $L$ . Принимаем по аналогии со случаем однородной среды значения этой средней интенсивности при  $2k'L = 2m\pi$  и  $(2m+1)\pi$ ,  $m=0, \pm 1, \pm 2$ , за ее приближенные максимумы и минимумы.

Рассчитанная таким образом контрастность представляется как

$$\tilde{v}_{\Phi\Pi} = \frac{F + \alpha r \partial F / \partial r}{1 + f + \alpha r \partial f / \partial r}, \quad (33)$$

где функции  $F$  и  $f$  от  $r = \rho_0^2$  задаются рядами

$$F = 2 \sum_{n=1}^{\infty} r^{2n-1} \exp[-(2n-1)^2 \tau_\Phi], \quad (34)$$

$$f = 2 \sum_{n=1}^{\infty} r^{2n} \exp[-(2n)^2 \tau_\Phi].$$

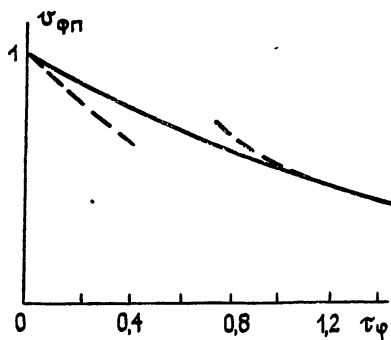


Рис. 3.

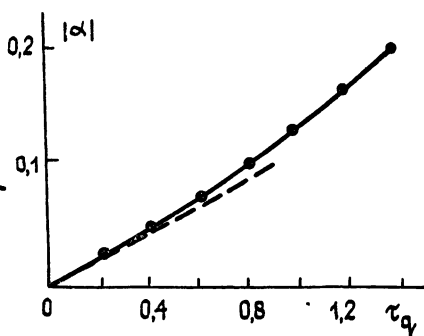


Рис. 4.

Поскольку в силу (12) и (32) величина  $\alpha$  имеет смысл малого параметра,  $|\alpha| \ll 1$ , формула (33) может быть переписана с помощью разложения Тейлора в виде

$$\tilde{v}_{\Phi\Pi} \simeq \frac{F(r')}{1 + f(r')}, \quad r' = (1 - |\alpha|)r, \quad (35)$$

где учтено проверяемое преобразованием интеграла  $Q_1$  неравенство  $\alpha < 0$ . Соотношение (35) означает, что при оценке контрастности максимумов средней интенсивности (31) эффект флуктуаций величины



$\rho(L)$  сводится к замене квадрата коэффициента отражения  $r$  отражателей в однородной среде на эффективное значение  $r' < r$ . Правая часть формулы для контрастности (35) является при заданном  $r'$  функцией от оптической толщи случайно-неоднородного слоя  $\tau_\Phi$ . Ее график с  $r' = 0,81$  изображен на рис. 3, где пунктирные линии отвечают асимптотикам при малых и больших значениях  $\tau_\Phi$  соответственно:

$$\tilde{v}_{\Phi\Pi} \simeq (1 - \tau_\Phi) \tilde{V}_{\Phi\Pi}^0, \quad \tau_\Phi \ll 1, \quad (36)$$

$$\tilde{v}_{\Phi\Pi} \simeq 2r' \exp(-\tau_\Phi), \quad \tau_\Phi \gg 1,$$

через  $v_{\Phi\Pi}^0$  обозначена контрастность (8) в случае однородного слоя с заменой  $r \rightarrow r'$ .

На рис. 4 представлен график зависимости величины  $|\alpha|$  от другой оптической толщи слоя  $\tau_q$  с  $r = 0,81$ . Пунктирная прямая при малых  $\tau_q$  соответствует асимптотике

$$|\alpha| \simeq \frac{2(1 - \sqrt{r})}{1 + r} \tau_q, \quad \tau_q \ll 1. \quad (37)$$

В заключение авторы благодарят С. М. Рытова и В. И. Татарского за плодотворные критические замечания по материалу работы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Кондрашков А. В. Интерференция света и ее применение в геодезии. — М.: Гостехиздат, 1956.
2. Прилепин М. Т., Голубев А. Н., Медовиков А. С. // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. 1982. № 4. С. 25.
3. Жиглинский А. Г., Кучинский В. В. Реальный интерферометр Фабри—Перо. — А. Машиностроение, 1983.
4. Белинский А. В., Чиркин А. С. // Квантовая электроника. 1986. Т. 13. № 5. С. 906.
5. Белинский А. В., Чиркин А. С. // Квантовая электроника. 1986. Т. 13. № 5. С. 1045.
6. Камен Х. Электронные способы измерений в геодезии. — М.: Недра, 1982.
7. Смулаковский В. М., Соловьев В. С. // Измерительная техника. 1978. № 2. С. 48.
8. Семенов А. А., Арсеньян Н. Н. Флуктуации электромагнитных волн на приземных трассах. — М.: Наука, 1978.
9. Медовиков А. С. // Геодезия и аэрофотосъемка. 1979. № 3. С. 97.
10. Prilepin M. T., Medovikov A. S. Geodetic Refraction. Effects of electromagnetic wave propagation through the atmosphere / Ed. Brunner F. K. — Berlin e. a.: Springer 1984. V. 10. P. 33.
11. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. — М.: Наука, 1970.
12. Большухин О. Г., Орлова И. Б., Шерстобитов В. Е. // Квантовая электроника. 1984. Т. 11. № 4. С. 720.
13. Бельдюгин И. М., Воротилин С. П. // Квантовая электроника. 1984. Т. 11. № 7. С. 1337.
14. Кляцкин В. И. Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах. — М.: Наука, 1980.
15. Зоммерфельд А. Оптика. — М.: ИЛ, 1953.
16. Гихонов В. И. Выбросы случайных процессов. — М.: Наука, 1970.
17. Bougret R. C., Frisch U., Pouquet A. // Physica. 1973. V. 65. № 2. P. 303.
18. Рытов С. М. Введение в статистическую радиофизику. Ч. 1. Случайные процессы. — М.: Наука, 1976.
19. Papanicolaou G. C., Varadhan S. R. S. // Commun. Pure. Appl. Math. 1973. V. 26. № 4. P. 497.
20. Абрамович Б. С., Гурбатов С. Н., Рыжов Ю. А. // Изв. вузов. Радиофизика. 1979. Т. 22. № 5. С. 566.
21. Барабаненков Ю. Н., Озрин В. Д., Калинин М. И. Асимптотический метод в теории стохастических линейных динамических систем. — М.: Энергоатомиздат, 1985.
22. Рыжов Ю. А. // Изв. вузов. Радиофизика. 1976. Т. 19. № 7. С. 1001.
23. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. — М.: Наука, 1974.
24. Кляцкин В. И., Татарский В. И. // Изв. вузов. Радиофизика. 1977. Т. 20. № 7. С. 1040.

Всесоюзный научно-исследовательский центр  
по изучению свойств поверхности и вакуума

Поступила в редакцию  
18 марта 1987 г.

## THE MICHELSON AND FABRY—PEROT INTERFEROMETERS IN ONE-DIMENSIONAL RANDOMLY INHOMOGENEOUS MEDIUM

*Yu. N. Barabanenkov, V. S. Dorodnykh*

The invariant imbedding principles is applied for calculating parameters of the interference picture in the Michelson and Fabry—Perot schemes in one-dimensional randomly inhomogeneous medium in working arm and between reflectors, respectively. Using Sommerfeld boundary conditions on the reflectors, the formulas are obtained for wave field intensity and for contrast, number, halfwidth of its maxima as dependent on interferometer base. These values are presented in terms of the amplitude and phase of wave reflection coefficient by the layer medium with one reflector and given realization of permittivity. The wave reflection coefficient obeys the Ricatty equation. By solving the diffusion equation in the limit of high-reflecting capability of the reflectors, contrast and number maxima of the ensemble average of wave field intensity are found.

### ИНСТРУКЦИЯ ПО СОСТАВЛЕНИЮ РЕФЕРАТОВ

1. В реферате кратко излагается основное содержание статьи. Реферат должен дать читателю представление о характере освещаемой работы, оригинальности постановки вопроса, методике проведения исследования и его основных результатах.

2. Реферату должно предшествовать библиографическое описание в следующем виде: название статьи, фамилия и инициалы автора, название журнала, где помещается статья. Текст реферата начинается непосредственно с изложения существа работы без повторения заголовка. Форма изложения материала не обязательно должна повторять форму изложения оригинальной статьи.

3. Если оригинал содержит большое количество цифровых данных, их следует обобщить и систематизировать.

4. Средний объем реферата 1,5—2 страницы машинописного текста, отпечатанного через два интервала на белой писчей бумаге обычного формата (30×21) в двух экземплярах с полем 4 см с левой стороны.

5. Таблицы, схемы, графики и пр. могут быть включены в том случае, если они отражают основное содержание работы или сокращают текст реферата. Сообщение о наличии в реферируемой работе таблиц, схем, графиков, фотографий, карт, рисунков необходимо давать в конце реферата. Например, табл. 2, ил. 10.

6. Формулы приводятся только в том случае, если они необходимы для понимания статьи. Громоздкие математические выражения помещать не следует. Формулы следует вписывать четко, не изменяя принятых в оригинале обозначений величин. Формулы и буквенные обозначения вписываются черными чернилами во второй экземпляр. Вписывание формул и буквенных обозначений, а также исправление замеченных опечаток в первом экземпляре не делается.

7. В конце реферата в квадратных скобках указывается название учреждения или предприятия, в котором автор реферируемой работы (если эти данные приводятся в статье) провел работу. Подпись автора и дату написания реферата следует ставить в левом нижнем углу на обоих экземплярах реферата.