

УДК 621.391:519.217

ОПТИМАЛЬНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ МОМЕНТА СКАЧКООБРАЗНОГО ИЗМЕНЕНИЯ СТАТИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

А. А. Мальцев, А. М. Силаев

Методами марковской теории нелинейной фильтрации решена задача оптимального оценивания момента скачкообразного изменения свойств случайных процессов, наблюдаемых на фоне белых гауссовых шумов. Показано, что оптимальная в среднеквадратическом смысле оценка момента скачка может быть представлена в виде суммы двух условных оценок, которые вычисляются в текущем времени с помощью системы взаимосвязанных дифференциальных уравнений совместно с апостериорной вероятностью отсутствия скачка и условными плотностями вероятностей информационного сигнала. В качестве примера рассмотрен алгоритм формирования оптимальной оценки и апостериорной дисперсии момента разладки для винеровского процесса со скачком среднего значения в случайный момент времени.

Во многих приложениях статистической радиофизики возникает следующая задача: по наблюдаемой реализации y_0^t векторного случайного процесса

$$y(t) = s(x, \tau, t) + \eta(t) \quad (t > 0), \quad (1)$$

где

$$s(x, \tau, t) = \begin{cases} s_0(x, t), & t \leq \tau \\ s_1(x, t), & t > \tau \end{cases}$$

оптимальным образом оценить момент времени τ скачкообразного изменения свойств этого процесса. Здесь предполагается, что $s_0(x, t)$, $s_1(x, t)$ — некоторые заданные функции времени t и информационного сигнала $x(t)$; $\eta(t)$ — вектор белых гауссовых шумов с нулевыми средними значениями и матрицей интенсивностей $N(t)$; $\eta(t)$ статистически не зависит от τ и $x(t)$; $d\tau/dt = 0$, т. е. τ — неизвестная постоянная величина. Данная задача представляет, например, значительный интерес для радио- и гидролокации, радиосвязи, сейсмологии и некоторых других областей науки и техники.

По проблеме оптимального оценивания моментов скачкообразного изменения свойств случайных процессов, а также по близким задачам оптимального обнаружения скачков к настоящему времени опубликовано большое число работ (см., например, монографии [1, 2] и обзоры [3, 4]). Для решения поставленной задачи используются различные методы. Например, в [3, 4] рассматриваются процедуры оценивания моментов скачков, осуществляемые после окончания наблюдений. При этом для оценивания моментов скачкообразного изменения свойств случайных процессов используется метод максимального правдоподобия или байесовский подход (если задана априорная плотность вероятностей моментов скачков). Однако в случае сложных многокомпонентных процессов или при широком диапазоне возможных значений моментов скачков реализация подобных процедур апостериорного анализа требует слишком большого объема вычислений.

Более удобными для реализации представляются последовательные статистические методы анализа, когда обработка наблюдаемого

случайного процесса проводится в текущем времени по мере поступления новой информации. В ряде работ [1, 2, 5-7] подобный подход был применен к задачам оптимального обнаружения скачкообразных изменений свойств случайных процессов. Было показано, что в результате решения задач обнаружения скачков можно получать «первичные» оценки их моментов появления [2]. Однако для уточнения полученных оценок приходится вновь использовать апостериорные методы анализа.

В настоящей работе задача оптимального оценивания момента скачкообразного изменения τ свойств случайного процесса решается методами марковской теории нелинейной фильтрации [8-13]. Последовательное развитие подхода, предложенного ранее в работах авторов [12, 13], показало, что в рамках марковской теории нелинейной фильтрации можно получать алгоритмы оптимального оценивания момента τ непосредственно в текущем времени.

Постановка задачи. Информационный случайный векторный процесс $\mathbf{x}(t)$ будем считать марковским (при фиксированном значении τ) с уравнением для априорной условной плотности вероятностей вида

$$\partial P(\mathbf{x}, t|\tau)/\partial t = \begin{cases} L_0 P(\mathbf{x}, t, \tau), & t \leq \tau \\ L_1 P(\mathbf{x}, t, \tau), & t > \tau \end{cases} \quad (2)$$

$(t > 0).$

Здесь для общности предполагается, что в момент времени τ одновременно со скачком статистических характеристик наблюдаемого процесса (1) могут также происходить и скачкообразные изменения параметров самого сигнала $\mathbf{x}(t)$. Это учитывается в (2) путем «переключения» операторов $L_i(\cdot)$, определяющих эволюцию плотности вероятностей процесса $\mathbf{x}(t)$ до и после момента скачка τ .

Будем считать, что в начальный момент времени $t=0$ задана априорная плотность вероятностей $P_\tau(\tau)$ случайной величины τ и условная плотность вероятностей начального значения сигнала $\mathbf{x}(t)$ при фиксированном моменте τ :

$$P(\mathbf{x}|\tau) = \begin{cases} P_0(\mathbf{x}), & \tau \geq 0 \\ P_1(\mathbf{x}), & \tau < 0 \end{cases}.$$

Здесь предполагается, что скачок может влиять на начальную плотность вероятностей процесса $\mathbf{x}(t)$ (при этом $\tau < 0$ соответствует случаю, когда скачок произошел до начала наблюдений $t=0$). Для общности будем рассматривать задачу оптимального в среднеквадратическом смысле оценивания величины произвольной функции $f(\tau)$ по наблюдениям на интервале времени $(0, t)$ реализации векторного случайного процесса $\mathbf{y}(t)$, описываемого уравнениями (1), (2).

Уравнения алгоритма оптимального оценивания. Оптимальная в среднеквадратическом смысле оценка $\hat{f}_\tau(t)$ величины $f(\tau)$ находится путем усреднения данной функции по апостериорной плотности вероятностей $W_\tau(\tau, t) \equiv P(\tau|y_0^t)$ случайного момента скачка

$$\hat{f}_\tau(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) W_\tau(\tau, t) d\tau. \quad (3)$$

На основании результатов теории нелинейной фильтрации условных марковских процессов [8-13] для апостериорной плотности вероятностей $W_{x\tau}(\mathbf{x}, \tau; t) \equiv P(\mathbf{x}, \tau; t|y_0^t)$ марковской совокупности $\{\mathbf{x}, \tau\}$ запишем уравнение Стратоновича

$$\begin{aligned} \partial W_{x\tau}(\mathbf{x}, \tau; t)/\partial t = & L W_{x\tau}(\mathbf{x}, \tau; t) + \\ & + [F(\mathbf{x}, \tau; t) - \langle F(\mathbf{x}, \tau; t) \rangle_{x\tau}] W_{x\tau}(\mathbf{x}, \tau; t) \quad (t > 0) \end{aligned} \quad (4)$$

с начальным условием $W_{x\tau}(\mathbf{x}, \tau; t)|_{t=0} = P(\mathbf{x}|\tau) P_{\tau}(\tau)$.
Здесь $L(\cdot)$ — тот же оператор, что и в уравнении (2):

$$L(\cdot) = \begin{cases} L_0(\cdot), & t \leq \tau \\ L_1(\cdot), & t > \tau \end{cases} \quad (5)$$

а функция $F(\mathbf{x}, \tau; t)$ равна

$$F(\mathbf{x}, \tau; t) = \begin{cases} F_0(\mathbf{x}, t), & t \leq \tau \\ F_1(\mathbf{x}, t), & t > \tau \end{cases}, \quad (6)$$

$$F_i(\mathbf{x}, t) \equiv s_i^T(\mathbf{x}, t) N^{-1}(t) [y(t) - s_i(\mathbf{x}, t)/2] \quad (i = 1, 2),$$

$$\langle F(\mathbf{x}, \tau; t) \rangle_{x\tau} \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \int F(\mathbf{x}, \tau; t) W_{x\tau}(\mathbf{x}, \tau; t) d\mathbf{x} d\tau,$$

где «т» — знак транспонирования; $N^{-1}(t)$ — матрица, обратная матрице интенсивностей $N(t)$ шумов наблюдений в модели (1).

Представим плотность вероятностей $W_{x\tau}(\mathbf{x}, \tau; t)$ в виде произведения одномерной $W_{\tau}(\tau, t)$ и условной $W_{x/\tau}(\mathbf{x}/\tau; t)$ плотностей:

$$W_{x\tau}(\mathbf{x}, \tau; t) = W_{\tau}(\tau, t) W_{x/\tau}(\mathbf{x}/\tau; t). \quad (7)$$

Проинтегрируем уравнение (4) по \mathbf{x} . В результате получим уравнение Стратоновича для плотности вероятностей $W_{\tau}(\tau, t)$:

$$\partial W_{\tau}(\tau, t)/\partial t = [\langle F(\mathbf{x}, \tau; t) \rangle_{x/\tau} - \langle F(\mathbf{x}, \tau; t) \rangle_{x\tau}] W_{\tau}(\tau, t) \quad (t > 0), \quad (8)$$

$$W_{\tau}(\tau, t)|_{t=0} = P_{\tau}(\tau),$$

где

$$\langle F(\mathbf{x}, \tau; t) \rangle_{x/\tau} \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} F(\mathbf{x}, \tau; t) W_{x/\tau}(\mathbf{x}/\tau; t) d\mathbf{x}. \quad (9)$$

Решение данного уравнения имеет вид

$$W_{\tau}(\tau, t) = P_{\tau}(\tau) \exp \left\{ \int_0^t [\langle F(\mathbf{x}, \tau; t') \rangle_{x/\tau} - \langle F(\mathbf{x}, \tau; t') \rangle_{x\tau}] dt' \right\} \quad (10)$$

$$(t \geq 0).$$

Отсюда следует, что оптимальное оценивание величины $f(\tau)$ в принципе можно реализовать непосредственно по формулам (3), (10) с помощью устройства, состоящего из совокупности параллельных фильтров [11], «настроенных» на различные значения параметра τ , и схемы суммирования откликов этих фильтров. Условные оценки $\langle F(\mathbf{x}, \tau; t) \rangle_{x/\tau}$ при этом должны вычисляться для всех возможных значений τ . Поэтому при широком диапазоне априорных значений момента скачка τ , когда требуется слишком большое число элементарных оценщиков, подобное устройство обработки становится трудно реализуемым.

Покажем, что оптимальную в среднеквадратическом смысле оценку $\hat{f}_{\tau}(t)$ величины $f(\tau)$ можно находить в виде суммы всего лишь двух слагаемых, которые могут быть вычислены в текущем времени путем решения системы взаимосвязанных дифференциальных уравнений. Введем обозначения

$$R_{0f}(t) \equiv \int_t^{\infty} f(\tau) W_{\tau}(\tau, t) d\tau, \quad (11)$$

$$R_{1f}(t) \equiv \int_{-\infty}^t f(\tau) W_{\tau}(\tau, t) d\tau \quad (t \geq 0).$$

Тогда оптимальная оценка (3) запишется в виде

$$\hat{f}_{\tau}(t) = R_{0f}(t) + R_{1f}(t). \quad (12)$$

Введем также вспомогательные плотности вероятностей $W_{0f}(\mathbf{x}, t)$, $W_{1f}(\mathbf{x}, t)$ векторного процесса $\mathbf{x}(t)$ с помощью соотношений*

$$W_{0f}(\mathbf{x}, t) \equiv \int_t^{\infty} f(\tau) W_{x\tau}(\mathbf{x}, \tau; t) d\tau / R_{0f}(t), \quad (13)$$

$$W_{1f}(\mathbf{x}, t) \equiv \int_{-\infty}^t f(\tau) W_{x\tau}(\mathbf{x}, \tau; t) d\tau / R_{1f}(t) \quad (t \geq 0).$$

Продифференцируем выражения (11), (13) по времени. В результате с учетом уравнений (4), (8) и соотношений (5)–(7) получим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dR_{0f}(t)}{dt} &= -f(t) W_{\tau}(t, t) + [\langle F_0(\mathbf{x}, t) \rangle_{0f} - \langle F(\mathbf{x}, \tau; t) \rangle_{x\tau}] R_{0f}(t), \\ \frac{dR_{1f}(t)}{dt} &= f(t) W_{\tau}(t, t) + [\langle F_1(\mathbf{x}, t) \rangle_{1f} - \langle F(\mathbf{x}, \tau; t) \rangle_{x\tau}] R_{1f}(t), \\ \frac{\partial W_{0f}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} &= L_0 W_{0f}(\mathbf{x}, t) - \frac{f(t) W_{\tau}(t, t)}{R_{0f}(t)} [W_{x/\tau}(\mathbf{x}/t; t) - W_{0f}(\mathbf{x}, t)] + \\ &\quad + [F_0(\mathbf{x}, t) - \langle F_0(\mathbf{x}, t) \rangle_{0f}] W_{0f}(\mathbf{x}, t), \\ \frac{\partial W_{1f}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} &= L_1 W_{1f}(\mathbf{x}, t) + \frac{f(t) W_{\tau}(t, t)}{R_{1f}(t)} [W_{x/\tau}(\mathbf{x}/t; t) - W_{1f}(\mathbf{x}, t)] + \\ &\quad + [F_1(\mathbf{x}, t) - \langle F_1(\mathbf{x}, t) \rangle_{1f}] W_{1f}(\mathbf{x}, t) \quad (t > 0). \end{aligned} \quad (14)$$

Начальные условия

$$\begin{aligned} R_{0f}(t)|_{t=0} &= \int_0^{\infty} f(\tau) P_{\tau}(\tau) d\tau, \quad R_{1f}(t)|_{t=0} = \int_{-\infty}^0 f(\tau) P_{\tau}(\tau) d\tau, \\ W_{0f}(\mathbf{x}, t)|_{t=0} &= P_0(\mathbf{x}), \quad W_{1f}(\mathbf{x}, t)|_{t=0} = P_1(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (15)$$

В уравнениях (14) приняты обозначения

$$\begin{aligned} \langle F_0(\mathbf{x}, t) \rangle_{0f} &\equiv \int_{-\infty}^{+\infty} F_0(\mathbf{x}, t) W_{0f}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}, \\ \langle F_1(\mathbf{x}, t) \rangle_{1f} &\equiv \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(\mathbf{x}, t) W_{1f}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (16)$$

Чтобы система уравнений (14) стала замкнутой, необходимо опре-

* Заметим, что плотности вероятностей $W_{0f}(\mathbf{x}, t)$, $W_{1f}(\mathbf{x}, t)$ имеет смысл вводить, если функции $R_{0f}(t)$, $R_{1f}(t)$ отличны от нуля.

делить значение апостериорной плотности вероятностей $W_{\tau}(t, t) \equiv W_{\tau}(\tau, t) |_{\tau=t}$ появления скачка в момент времени $\tau=t$, условную плотность вероятностей сигнала $\mathbf{x}(t)$ в этот же момент времени $W_{x|\tau}(\mathbf{x}/t; t) \equiv W_{x|\tau}(\mathbf{x}/\tau; t)|_{\tau=t}$ и среднее значение $\langle F(\mathbf{x}, \tau; t) \rangle_{x\tau}$. Выражения для этих функций получим, воспользовавшись результатами работ [12, 13]:

$$W_{\tau}(t, t) = \nu_0(t) p_0(t), \quad W_{x|\tau}(\mathbf{x}/t; t) = W_0(\mathbf{x}, t), \quad (17)$$

$$\langle F(\mathbf{x}, \tau; t) \rangle_{x\tau} = p_0(t) \langle F_0(\mathbf{x}, t) \rangle_0 + p_1(t) \langle F_1(\mathbf{x}, t) \rangle_1.$$

Здесь приняты обозначения

$$\nu_0(t) \equiv P_{\tau}(t) / \int_{-\infty}^{\infty} P_{\tau}(\tau) d\tau,$$

$$\langle F_0(\mathbf{x}, t) \rangle_0 \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} F_0(\mathbf{x}, t) W_0(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}, \quad (18)$$

$$\langle F_1(\mathbf{x}, t) \rangle_1 \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(\mathbf{x}, t) W_1(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x},$$

а также введены новые вспомогательные функции

$$p_0(t) \equiv \int_{-\infty}^t W_{\tau}(\tau, t) d\tau, \quad p_1(t) \equiv \int_{-\infty}^t W_{\tau}(\tau, t) d\tau \equiv 1 - p_0(t) \quad (19)$$

и плотности вероятностей

$$W_0(\mathbf{x}, t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} W_{x\tau}(\mathbf{x}, \tau; t) d\tau / p_0(t), \quad (20)$$

$$W_1(\mathbf{x}, t) \equiv \int_{-\infty}^t W_{x\tau}(\mathbf{x}, \tau; t) d\tau / p_1(t).$$

Заметим, что $p_0(t)$ и $p_1(t)$ имеют смысл апостериорных вероятностей непоявления ($t \leq \tau$) и появления ($t > \tau$) скачкообразного изменения к моменту времени t , а $W_0(\mathbf{x}, t)$ и $W_1(\mathbf{x}, t)$ — соответствующие условные плотности вероятностей вектора $\mathbf{x}(t)$ при отсутствии и при появлении скачка к моменту времени t .

Дифференциальные уравнения для функций $p_0(t)$, $W_0(\mathbf{x}, t)$ и $W_1(\mathbf{x}, t)$ имеют вид [12, 13]

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = -\nu_0(t) p_0(t) + [\langle F_0(\mathbf{x}, t) \rangle_0 - \langle F(\mathbf{x}, \tau; t) \rangle_{x\tau}] p_0(t),$$

$$\frac{\partial W_0(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = L_0 W_0(\mathbf{x}, t) + [F_0(\mathbf{x}, t) - \langle F_0(\mathbf{x}, t) \rangle_0] W_0(\mathbf{x}, t), \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_1(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = & L_1 W_1(\mathbf{x}, t) + \frac{\nu_0(t) p_0(t)}{p_1(t)} [W_0(\mathbf{x}, t) - W_1(\mathbf{x}, t)] + \\ & + [F_1(\mathbf{x}, t) - \langle F_1(\mathbf{x}, t) \rangle_1] W_1(\mathbf{x}, t) \quad (t > 0) \end{aligned}$$

с начальными условиями

$$p_0(t)|_{t=0} = \int_0^{\infty} P_{\tau}(\tau) d\tau, \quad W_0(\mathbf{x}, t)|_{t=0} = P_0(\mathbf{x}), \quad W_1(\mathbf{x}, t)|_{t=0} = P_1(\mathbf{x}). \quad (22)$$

Сравнивая выражения (11), (13) и (19), (20), несложно заметить, что функции $R_{0f}(t)$, $R_{1f}(t)$, $W_{0f}(x, t)$, $W_{1f}(x, t)$ при $f(\tau) \equiv 1$ непосредственно переходят в функции $p_0(t)$, $p_1(t)$, $W_0(x, t)$, $W_1(x, t)$. Как видно из (15) и (22), плотности вероятностей $W_{0f}(x, t)$ и $W_0(x, t)$ совпадают в начальный момент времени $t=0$. Сопоставляя уравнения (14) и (21) для данных плотностей вероятностей и учитывая соотношения (17), получим, что эти функции равны $W_{0f}(x, t) \equiv W_0(x, t)$ при всех $t \geq 0$. При этом для $R_{0f}(t)$, $R_{1f}(t)$, $W_{1f}(x, t)$ уравнения (14) принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{dR_{0f}(t)}{dt} &= -f(t) \nu_0(t) p_0(t) + [\langle F_0(x, t) \rangle_0 - \langle F(x, \tau; t) \rangle_{x\tau}] R_{0f}(t), \\ \frac{dR_{1f}(t)}{dt} &= f(t) \nu_0(t) p_0(t) + [\langle F_1(x, t) \rangle_{1f} - \langle F(x, \tau; t) \rangle_{x\tau}] R_{1f}(t), \\ \frac{\partial W_{1f}(x, t)}{\partial t} &= L_1 W_{1f}(x, t) + \frac{f(t) \nu_0(t) p_0(t)}{R_{1f}(t)} [W_0(x, t) - W_{1f}(x, t)] + \\ &+ [F_1(x, t) - \langle F_1(x, t) \rangle_{1f}] W_{1f}(x, t) \quad (t > 0). \end{aligned} \quad (23)$$

Система взаимосвязанных дифференциальных уравнений (21), (23) с начальными условиями (15), (22) и обозначениями (5), (6), (12), (16)—(18) образует искомый алгоритм оптимального (в среднеквадратическом смысле) оценивания величины функции $f(\tau)$ в текущем времени. Поскольку функция $f(\tau)$ была выбрана произвольной, то с помощью данного алгоритма можно вычислять различные одномоментные апостериорные статистические характеристики случайной величины момента скачка τ . Как видно из уравнений (12), (21), (23), для оптимального оценивания момента скачка τ в отличие от схем, использующих большое число параллельных фильтров, достаточно формировать лишь две условные оценки $R_{0f}(t)$ и $R_{1f}(t)$, а также вспомогательные функции $p_0(t)$, $W_0(x, t)$, $W_1(x, t)$, $W_{1f}(x, t)$ в текущем времени.

Алгоритм (21), (23) можно несколько упростить, заметив, что вспомогательная функция $p_0(t)$ связана с условной оценкой $R_{0f}(t)$ соотношением пропорциональности

$$R_{0f}(t) = \frac{\int_0^{\infty} f(\tau) P_{\tau}(\tau) d\tau}{\int_0^{\infty} P_{\tau}(\tau) d\tau} p_0(t) \quad (t \geq 0), \quad (24)$$

в котором коэффициент может быть вычислен заранее до проведения наблюдений. Интегродифференциальные уравнения (21), (23) для апостериорных вспомогательных функций $W_0(x, t)$, $W_1(x, t)$, $W_{1f}(x, t)$ в общем случае можно решать в гауссовом приближении [8—10], т. е. переходить от них к приближенным, но существенно более простым обыкновенным дифференциальным уравнениям для векторов математических ожиданий и матриц ковариаций плотностей вероятностей $W_0(x, t)$, $W_1(x, t)$ и $W_{1f}(x, t)$.

Пример оптимального оценивания момента изменения среднего значения случайного процесса. Полученные выше общие уравнения алгоритма (12), (21), (23) могут быть применены для решения задачи оптимального в среднеквадратическом смысле оценивания самого момента τ скачкообразного изменения свойств случайных процессов, а также для нахождения апостериорной дисперсии $D_{\tau} \equiv \langle \tau^2 \rangle - \langle \tau \rangle^2$ величины τ . В качестве примера рассмотрим задачу оптимальной оценки

момента «разладки» для винеровского случайного процесса [1]*. Предположим, что наблюдаемый скалярный процесс $y(t)$ и сигнал $x(t)$ описываются уравнениями

$$y(t) = x(t) + \eta(t), \quad x(t) = \begin{cases} 0, & t \leq \tau \\ A, & t > \tau \end{cases} \quad (t > 0). \quad (25)$$

Пусть $\eta(t)$ — белый гауссов шум с нулевым средним значением и интенсивностью N , величина сигнала после разладки A заранее известна, а случайный момент разладки (скачка) τ не зависит от $\eta(t)$ и априорно распределен по экспоненциальному закону

$$P_\tau(\tau) = \begin{cases} \nu e^{-\nu\tau}, & \tau > 0 \\ 0, & \tau \leq 0 \end{cases} \quad (26)$$

с заданным параметром ν .

В рассматриваемом примере нет необходимости проводить оценивание сигнала $x(t)$, так как заранее известны его значения до и после разладки. Поэтому вспомогательные плотности вероятностей сигнала $x(t)$ представляются через δ -функции

$$W_0(x, t) = \delta(x), \quad W_1(x, t) = W_{1f}(x, t) = \delta(x - A) \quad (27)$$

и с учетом обозначений (6), (16)–(18) в уравнениях (21), (23) следует положить

$$\langle F_0(x, t) \rangle_0 = 0, \quad \langle F_1(x, t) \rangle_1 = \langle F_1(x, t) \rangle_{1f} = [2Ay(t) - A^2]/(2N), \quad (28)$$

$$\langle F(x, \tau; t) \rangle_{\tau\tau} = p_1(t) [2Ay(t) - A^2]/(2N), \quad \nu_0(t) = \nu.$$

В результате, подставляя $\hat{f}(\tau) \equiv \tau$ в уравнения (12), (21), (23), (24), получим точный алгоритм оптимальной оценки $\hat{\tau}(t)$ момента разладки τ . Запишем уравнения данного алгоритма оптимального нелинейного оценивания параметра τ в следующем виде:

$$\hat{\tau}(t) = R_{0\tau}(t) + R_{1\tau}(t), \quad (29)$$

$$R_{0\tau}(t) = (t + 1/\nu) p_0(t), \quad R_{1\tau}(t) = r_1(t) [1 - p_0(t)],$$

где вспомогательные функции $p_0(t)$ и $r_1(t)$ находятся из уравнений

$$\frac{dp_0}{dt} = -\nu p_0 - \frac{2Ay(t) - A^2}{2N} p_0(1 - p_0), \quad (30)$$

$$\frac{dr_1}{dt} = \frac{\nu p_0}{p_1} (t - r_1) \quad (t > 0, \quad p_0(t) + p_1(t) \equiv 1)$$

с начальными условиями $p_0(t)|_{t=0} = 1$, $r_1(t)|_{t=0} = 0$.

Заметим, что для решения задачи скорейшего обнаружения разладки [1] достаточно рассматривать только первое уравнение в (30), в соответствии с которым формируется апостериорная вероятность отсутствия разладки $p_0(t)$ путем нелинейной фильтрации наблюдаемого процесса $y(t)$. Как непосредственно видно из (29), (30), для решения задачи оптимальной оценки момента скачка τ , наряду с уравнением для $p_0(t)$, необходимо дополнительно учитывать еще одно дифференциальное уравнение — для функции $r_1(t)$.

* В работе [1] решена задача скорейшего обнаружения «разладки» винеровского случайного процесса (отыскания оптимального правила остановки наблюдений). В настоящей работе в отличие от [1] рассматривается задача оптимальной оценки самого момента скачка τ .

Интересно отметить, что вместо последнего уравнения (30) можно найти дифференциальное уравнение непосредственно для самой оптимальной оценки $\hat{\tau}(t)$:

$$\frac{d\hat{\tau}(t)}{dt} = \frac{2Ay(t) - A^2}{2N} p_0(t) [\hat{\tau}(t) - t - 1/\nu] \quad (t > 0). \quad (31a)$$

С учетом (29) уравнение для $\hat{\tau}(t)$ можно записать также и в другой форме:

$$\frac{d\hat{\tau}(t)}{dt} = \frac{2Ay(t) - A^2}{2N} p_1(t) [r_1(t) - \hat{\tau}(t)] \quad (t > 0). \quad (31b)$$

Причем в начальный момент времени оценка момента скачка равна априорному значению $\hat{\tau}(t)|_{t=0} = \int_0^{\infty} \tau \nu e^{-\nu\tau} d\tau = 1/\nu$.

Аналогично, подставляя $f(\tau) \equiv \tau^2$ в уравнения (12), (21), (23), (24) и учитывая (27), (28), получим уравнения алгоритма оценивания среднего квадрата величины τ :

$$\hat{\tau}^2(t) = R_{0\tau^2}(t) + R_{1\tau^2}(t), \quad (32)$$

$$R_{0\tau^2}(t) = (t^2 + 2t/\nu + 2/\nu^2) p_0(t), \quad R_{1\tau^2}(t) = h_1(t) [1 - p_0(t)].$$

Здесь функция $p_0(t)$ определяется из (30), а для вспомогательной функции $h_1(t)$ справедливо уравнение

$$\frac{dh_1(t)}{dt} = \frac{\nu p_0(t)}{p_1(t)} [t^2 - h_1(t)] \quad (t > 0) \quad (33)$$

с начальным условием $h_1(t)|_{t=0} = 0$.

Используя (31) — (33), несложно найти также дифференциальное уравнение для апостериорной дисперсии $D_\tau(t) \equiv \hat{\tau}^2(t) - [\hat{\tau}(t)]^2$ случайного момента разладки τ :

$$\frac{dD_\tau(t)}{dt} = \frac{2Ay(t) - A^2}{2N} p_0(t) \{D_\tau(t) - [\hat{\tau}(t) - t - 1/\nu]^2 - 1/\nu^2\} \quad (34a)$$

$(t > 0)$

с начальным условием $D_\tau(t)|_{t=0} = 1/\nu^2$. Уравнение для дисперсии можно также привести к другому, удобному для анализа виду:

$$\frac{dD_\tau(t)}{dt} = \frac{2Ay(t) - A^2}{2N} p_1(t) \{[\hat{\tau}(t)]^2 - 2r_1(t)\hat{\tau}(t) + h_1(t) - D_\tau(t)\} \quad (34b)$$

$(t > 0)$.

Полученные выше соотношения и уравнения (29) — (34) решают задачу синтеза алгоритма оптимального оценивания момента разладки τ случайного процесса (25) и позволяют находить апостериорную дисперсию величины τ , т. е. характеризовать точность формируемой оценки $\hat{\tau}(t)$.

Чтобы решить задачу статистического анализа работы полученного алгоритма, необходимо учитывать случайный характер наблюдаемого процесса $y(t)$ в уравнениях (30), (31), (34) и путем усреднения по

ансамблю реализаций наблюдений y_0^t определять статистические характеристики оценки $\hat{\tau}(t)$ и дисперсии $D_{\tau}(t)$ величины τ . Однако провести подобное аналитическое исследование алгоритма в общем случае довольно сложно из-за нелинейного характера стохастических уравнений (30), (31), (34). Ограничимся качественным обсуждением работы алгоритма (29) — (34), предполагая, что соотношение сигнал/шум велико, т. е. $A^2/(2N) \gg 1$ [Гц]. Пусть разладка в наблюдаемом процессе (25) происходит в момент времени τ_0 . Тогда до скачка (при $t \leq \tau_0$) первым уравнением в (30) вырабатывается апостериорная вероятность отсутствия разладки $p_0(t)$, близкая по величине к единице. При этом, поскольку шум $\eta(t)$ мал, то коэффициент $[2Ay(t) - A^2] \times p_0(t)/(2N) = [2A\eta(t) - A^2]p_0(t)/(2N) \approx -A^2/(2N)$ в правых частях уравнений (31а) и (34а) отрицательный и большой по абсолютной величине по сравнению с единицей. Поэтому с течением времени (при $t \leq \tau_0$) приближенно поддерживаются соотношения (см. рис. 1, 2)

$$\hat{\tau}(t) = t + 1/\nu, \quad D_{\tau}(t) = 1/\nu^2 \quad (0 \leq t \leq \tau_0). \quad (35)$$

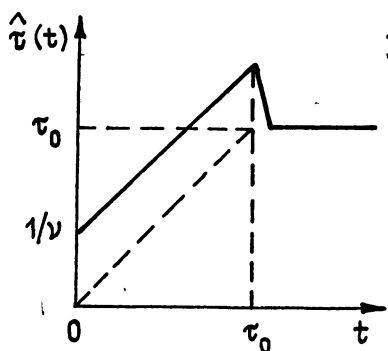


Рис. 1.

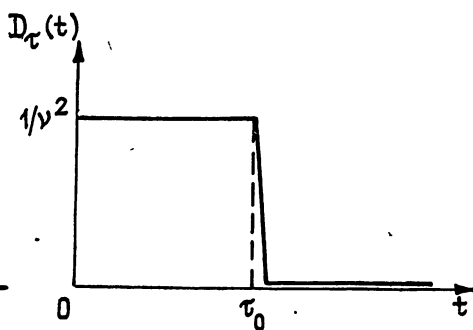


Рис. 2.

Такое поведение оценки $\hat{\tau}(t)$ и дисперсии $D_{\tau}(t)$ можно также объяснить следующим образом. Поскольку соотношение сигнал/шум велико, то апостериорная плотность вероятностей $W_{\tau}(\tau, t)$ величины τ до разладки очевидно должна изменяться со временем так, чтобы иметь малый уровень при $\tau < t$ и быть пропорциональной априорной функции $P_{\tau}(\tau)$ при $\tau \geq t$. Следовательно, приближенно получим

$$W_{\tau}(\tau, t) \approx \begin{cases} 0, & \tau < t \\ P_{\tau}(\tau) / \int_t^{\infty} P_{\tau}(\tau) d\tau = \nu e^{-\nu(\tau-t)}, & \tau \geq t \quad (0 \leq t \leq \tau_0) \end{cases}$$

Отсюда видно, что с течением времени t функция $W_{\tau}(\tau, t)$ не изменяется по форме, а только смещается на величину t . Поэтому математическое ожидание $\hat{\tau}(t)$ и дисперсия $D_{\tau}(t)$ этой плотности вероятностей имеют вид (35).

До разладки функция $p_1(t) = 1 - p_0(t)$ близка к нулю и за счет большого коэффициента $\nu p_0(t)/p_1(t) \gg 1$ в правых частях уравнений (30), (33) функции $r_1(t)$, $h_1(t)$ приближенно равны

$$r_1(t) = t, \quad h_1(t) = t^2 \quad (0 \leq t \leq \tau_0).$$

Сразу после скачка ($t > \tau_0$) происходит обнаружение разладки и первым уравнением в (30) начинает вырабатываться функция $p_0(t)$, близкая к нулю. При этом $p_1(t) \approx 1$ и в уравнениях (30), (33) для $r_1(t)$, $h_1(t)$ коэффициент $\nu p_0(t)/p_1(t) \ll 1$ становится малым по величине. Поэтому значения функций $r_1(t)$, $h_1(t)$ перестают изменяться и приближенно равны

$$r_1(t) = \tau_0, \quad h_1(t) = \tau_0^2 \quad (t > \tau_0). \quad (36)$$

Одновременно с этим, после скачка (когда $y(t) = A + \eta(t)$) резко возрастают коэффициенты перед скобками в правых частях уравнений (31б), (34б): $[2Ay(t) - A^2]p_1(t)/(2N) = [2A\eta(t) + A^2]p_1(t)/(2N) \approx \approx A^2/(2N) \gg 1$. Как следует из уравнений (31б), (34б), это приводит к тому, что оценка $\hat{\tau}(t)$ и дисперсия $D_\tau(t)$ начинают определяться выражениями

$$\hat{\tau}(t) \approx r_1(t), \quad D_\tau(t) \approx [\hat{\tau}(t)]^2 - 2\hat{\tau}(t)r_1(t) + h_1(t)$$

и с учетом (36) становятся равными (см. рис. 1, 2)

$$\hat{\tau}(t) \approx \tau_0, \quad D_\tau(t) \approx 0 \quad (t > \tau_0). \quad (37)$$

Таким образом, как и следовало ожидать, при большом соотношении сигнал/шум алгоритм (29)—(34) вырабатывает значение оценки $\hat{\tau}(t)$ момента разладки, близкое к истинному (если разладка имела место). При уменьшении соотношения сигнал/шум точность оценивания τ естественно ухудшается. В частности, появляется отклонение (смещение) оценки $\hat{\tau}(t)$ от истинного значения τ_0 , и растет уровень дисперсии $D_\tau(t)$ при $t > \tau_0$. Однако важно отметить (см., например, [14]), что оптимальная в среднеквадратическом смысле оценка $\hat{\tau}(t)$ обладает всегда свойством безусловной несмещенности $\langle \hat{\tau}(t) \rangle_{y_0^t, \tau_0} = 1/\nu$, т. е. среднее значение оценки $\hat{\tau}(t)$ по ансамблю всех возможных реализаций наблюдаемого процесса y_0^t , полученных при различных значениях момента τ_0 , равно априорной величине $1/\nu$. Кроме того, функция $\hat{\tau}(t)$ минимизирует безусловное рассеяние оценки $\langle [\hat{\tau}(t) - \tau_0]^2 \rangle_{y_0^t, \tau_0} = \min$, т. е. обеспечивает минимальное (в среднем по ансамблю) отклонение от истинного значения τ_0 среди всех возможных оценок.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ширяев А. Н. Статистический последовательный анализ. — М.: Наука, 1976. — 272 с.
2. Никифоров И. В. Последовательное обнаружение изменения свойств временных рядов. — М.: Наука, 1983. — 200 с.
3. Торговицкий И. Ш. // Зарубежная радиоэлектроника. 1976. № 1. С. 3.
4. Клигене Н., Телькснис Л. // Автоматика и телемеханика. 1983. № 10. С. 5.
5. Davies M. H. A. // IEEE Trans. 1975. V. AC-20. № 2. P. 257.
6. Сосулин Ю. Г., Фишман М. М. // Изв. АН СССР. Сер. Техническая кибернетика. 1977. № 3. С. 149.
7. Тихонов В. И., Харисов В. Н. // Радиотехника и электроника. 1980. Т. 25. № 3. С. 529.
8. Стратонович Р. Л. Условные марковские процессы и их применение к теории оптимального управления. — М.: Гос. ун-т, 1966. — 319 с.
9. Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н. Статистика случайных процессов (нелинейная фильтрация и смежные вопросы). — М.: Наука. 1974. — 696 с.
10. Тихонов В. И., Кульман Н. К. Нелинейная фильтрация и квазикогерентный прием сигналов. — М.: Сов. радио, 1975. — 704 с.
11. Тихонов В. И. Оптимальный прием сигналов. — М.: Радио и связь, 1983. — 320 с.
12. Мальцев А. А., Силаев А. М. // Изв. вузов. Радиофизика. 1983. Т. 26. № 1. С. 49.
13. Мальцев А. А., Силаев А. М. // Изв. вузов. Радиофизика. 1985. Т. 28. № 2. С. 184.

THE CHANGE POINT OPTIMAL ESTIMATION IN A RANDOM PROCESS

A. A. Mal'tsev, A. M. Silaev

The optimal estimation problem of the change point in a random process is solved by Markov theory of nonlinear filtering methods. It is shown that the least mean square estimate of the change point can be represented with two conditional estimates. These estimates are calculated simultaneously with a posteriori probability of the change appearance and the auxiliary conditional probability densities of the signal from the closed system of differential equations. As an example, the algorithm forming the estimate and a posteriori variance of the disorder appearance time in Wiener process with jump-like changing of the mean value is considered.

УДК 534.26

Аннотации депонированных статей

К ВОПРОСУ О РАСПРОСТРАНЕНИИ ВОЛН В ОДНОМЕРНОЙ СРЕДЕ С ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫМИ ПЕРИОДИЧЕСКИМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

О. Э. Гулин, В. В. Темченко

С помощью метода усреднения по быстрым осцилляциям рассматривается задача о прохождении гармонической волны с заданными волновым числом k и частотой ω через слой среды с малыми пространственно-временными периодическими флуктуациями показателя преломления вида $\varepsilon(x, t) = -4\mu \cos 2(Kx + \Omega t)$, $\mu \ll 1$, $K \approx |k|$, $\Omega \ll |\omega|$. Показано, что наличие временных неоднородностей ($\Omega \neq 0$) при совпадении направлений распространения проходящей волны и флуктуаций показателя преломления приводит к более глубокому проникновению волны в среду и, следовательно, к увеличению коэффициента прохождения через слой и уменьшению коэффициента отражения. При этом зона повышенной отражательной способности слоя в плоскости параметров $(\mu, \Delta = (K - k)/k)$ сужается по сравнению со стационарным случаем ($\Omega = 0$) и точка ее соприкосновения с осью Δ смещается влево на величину $\Delta_0 = -\Omega/\omega$.

Статья депонирована в ВИНТИ,
рег. № 9039-B88. Деп. от 27 декабря 1988 г.