ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том 32, № 1 РАДИОФИЗИКА 1989

УДК 621.373.072.6

АНАЛИЗ СИСТЕМ ВТОРОГО ПОРЯДКА, БЛИЗКИХ К НЕЛИНЕЙНЫМ КОНСЕРВАТИВНЫМ, С УЧЕТОМ ФЛУКТУАЦИЙ

Т. К. Паушкина, К. А. Самойло

В связи с возрастающими требованиями к стабильности частоты и чистоте спектра автогенераторов задача их исследования с учетом нелинейности реактивного элемента при наличии шума становится все более актуальной. В статье предложен метод расчета спектра таких автогенераторов. Используя аппарат математической статистики и метод нелинейного преобразования переменных, решается нелинейное стохастическое дифференциальное уравнение второго порядка, описывающее широкий класс таких систем.

Применение резонансных систем с нелинейными реактивными элементами в автогенераторах гармонических колебаний делает актуальной задачу исследования их спектра. Эта задача возникает при определении стабильности частоты генерируемых колебаний, а также при определении электромагнитной совместимости таких систем. Широкий класс автогенераторов является системами второго порядка, близкими к нелинейным консервативным, которые описываются уравнением

$$\ddot{x}(t)+f(x)=\mu F(\dot{x}(t))+n(t), \tag{1}$$

где μ — малый параметр, характеризующий потери в системе; $f(x)$ — нелинейная функция, обусловленная нелинейностью реактивных элементов резонансной системы. Обычно функция $f(x)$ удовлетворяет условию $\operatorname{sgn} f(x) = \operatorname{sgn} x$; масштаб безразмерных переменных x и t выбирается так, что $\dot{f}(x)|_{x=0} = 1$; $F(\dot{x}(t))$ — нелинейная функция, характеризующая баланс энергии. Ограничимся режимом, когда $F(\dot{x}(t))$ — нечетная функция, $n(t)$ — гауссов случайный процесс с нулевым средним

$$\langle n(t)\rangle = 0 \tag{2}$$

и функцией автокорреляции

$$K_n(\Delta t) = \langle n(t)n(t+\Delta t)\rangle = (N_0/2)\delta(\Delta t).$$

Анализ уравнения (1) при малой нелинейности функции $f(x)$ осуществлен в ряде работ [1–5]. В данной статье излагается метод расчета флуктуаций, пригодный при большой нелинейности функции $f(x)$. Метод базируется на нелинейном преобразовании переменных [6]. Расчет состоит из четырех этапов.

1. Переход к новым переменным (y, τ), в которых уравнение (1) преобразуется к виду

$$\ddot{y}(\tau)+y=\mu L(y, \dot{y})+\xi(\tau), \tag{3}$$

Осуществляется методом нелинейного преобразования переменных [6]. Новые переменные y, τ связаны с исходными x, t формулами

$$y=\sqrt{2\int_0^x f(x)dx \operatorname{sgn} x}\,; \tag{4}$$

$$\frac{dt}{d\tau}=\frac{dx}{dy}=G(y)=\frac{y}{f(x(y))}=1+b_1y+b_2y^2+\ldots+y^nb_n\,. \tag{5}$$

Коэффициенты полинома (5) b_i определяются численным методом. Задается ряд значений x_l; по формулам (4) и (5) определяются соответствующие значения y_i и G_i. Коэффициенты b_i определяются из системы линейных уравнений

$$\begin{aligned} G_1-1&=y_1b_1+y_1^2\,b_2+\ldots+y_1^n\,b_n\,,\\ &\ldots\\ G_n-1&=y_nb_1+y_n^2\,b_2+\ldots+y_n^n\,b_n\,. \end{aligned} \tag{6}$$

В новых переменных уравнение (1) преобразуется в уравнение (3), где

$$L(y,\dot{y})=F(\dot{y})G(y)\,,\quad \xi(\tau)=\sqrt{G(y)}n(\tau)\,, \tag{7}$$

$\xi(\tau)$ — периодически нестационарный гауссов случайный процесс:

$$\langle\xi(\tau)\rangle=0\,,\quad K_\xi(\Delta\tau)=\langle\xi(\tau)\xi(\tau+\Delta\tau)\rangle=G(\tau)\,(N_0/2)\delta(\Delta\tau)\,. \tag{8}$$

Решение уравнения (3) осуществляем по известной методике [1-6]. Вводим переменные R, φ с помощью формул

$$y=R\cos(\tau+\varphi)=R\cos\psi\,,\quad \dot{y}=-R\sin(\tau+\varphi)=-R\sin\psi\,.$$

Получаем систему уравнений

$$\dot{R}(\tau)=-\mu L\sin\psi-\xi(\tau)\sin\psi,\qquad \dot{\varphi}(\tau)=(-\mu L\cos\psi-\xi(\tau)\cos\psi)/R.$$

Переходим к укороченным уравнениям в медленном времени (для медленного времени сохраняем обозначение τ)

$$\dot{R}(\tau)=-0{,}5\mu J_{1s}+\gamma_s(\tau)\,,\quad \dot{\varphi}(\tau)=(-0{,}5\mu J_{1c}+\gamma_c(\tau))/R\,, \tag{9}$$

где *

$$J_{1s}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}L(R\cos\psi,-R\sin\psi)\sin\psi d\psi,$$

$$J_{1c}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}L(R\cos\psi,-R\sin\psi)\cos\psi d\psi\,,$$

$$\begin{aligned} \gamma_s(\tau)&=-\frac{1}{T_0}\int_{\tau-T_0}^{T_0}\xi(\alpha)\sin\alpha d\alpha=-\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}\xi(U+\tau-T_0)\sin(U+\tau-T_0)dU\,,\\ \gamma_c(\tau)&=-\frac{1}{T_0}\int_{\tau-T_0}^{T_0}\xi(\alpha)\cos\alpha d\alpha=-\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}\xi(V+\tau-T_0)\cos(V+\tau-T_0)dV\,. \end{aligned} \tag{10}$$

2. Определяем стационарный режим при отсутствии флуктуаций

* $J_{1c}=0$ при условии, что $F(\dot{x})$ — нечетная функция.

($\xi(\tau)=0$). Стационарную амплитуду R_0 находим из алгебраического уравнения

$$J_{1s}(R_0)=0. \tag{11}$$

Устойчивость предельного цикла определяется формулой

$$-p=\frac{\mu}{2}\left.\frac{dJ_{1s}(R)}{dR}\right|_{R=R_0}>0. \tag{12}$$

Стационарному режиму соответствуют гармонические колебания

$$y=R_0\cos\tau, \quad \dot{y}=-R_0\sin\tau. \tag{13}$$

Определяем зависимости $G(y)$ и $\sqrt{G(y)}$ от τ, используя формулы (5), (11), (13):

$$G(y)=1+b_1R_0\cos\tau+\ldots+b_nR_0^n\cos^n\tau=B_0(1+B_1\cos\tau+\ldots+B_n\cos n\tau). \tag{14}$$

Зависимость $\sqrt{G(y)}$ от τ записываем в виде

$$\sqrt{G(y)}=H_0(1+\sum_{i=1}^{n}H_i\cos(i\tau)).$$

Коэффициенты H_i могут быть найдены численным методом по коэффициентам B_i способом, аналогичным способу определения коэффициентов b_i. Однако обычно для автогенераторов выполняется приближенное равенство $G(y)\cong B_0(1+\Delta)$, где $\Delta\ll 1$. При этом можно считать

$$\sqrt{G(y)}\cong\sqrt{B_0}(1+0{,}5\sum_{i=1}^{n}B_i\cos(i\tau)). \tag{15}$$

3. Определяем решения в преобразованных переменных с учетом флуктуаций ($\xi(\tau)\neq 0$). Статистические характеристики случайных процессов $\gamma_s(\tau)$ и $\gamma_c(\tau)$ рассчитываем по методике [2], используя формулы (7), (8), (10), (15). Находим, что $\gamma_s(\tau)$ и $\gamma_c(\tau)$ — центрированные гауссовы взаимно независимые δ-коррелированные процессы с функциями корреляции*

$$K_{\gamma s}(\Delta\tau)=A_s\delta(\Delta\tau); \tag{16}$$

$$K_{\gamma c}(\Delta\tau)=A_c\delta(\Delta\tau); \tag{17}$$

$$K_{\gamma c\gamma s}(\Delta\tau)=0, \tag{18}$$

где

$$A_s=\frac{N_0}{4}B_0\left[1-\frac{1}{2}B_2-\frac{1}{16}B_1^2+\frac{1}{8}\sum_{i=1}^{n}(B_i^2-B_iB_{i+2})\right]; \tag{19}$$

$$A_c=\frac{N_0}{4}B_0\left[1+\frac{1}{2}B_2+\frac{1}{16}B_1^2+\frac{1}{8}\sum_{i=1}^{n}(B_i^2+B_iB_{i+2})\right]. \tag{20}$$

Решение в преобразованных переменных с учетом флуктуаций ищем в виде

$$y=R_0(1+r(\tau))\cos(\tau+\varphi_0+\theta(\tau)), \tag{21}$$

где $r(\tau)$ и $\dot{\theta}(\tau)$ — малые флуктуации:

$$|r(\tau)|\ll 1, \quad |\dot{\theta}(\tau)|\ll 1, \tag{22}$$

---

* Определение $K_{\gamma s}(\tau)$ и $K_{\gamma c}(\tau)$ дано в Приложении.

От уравнений (9) переходим к укороченным уравнениям

$$\dot{r}(\tau) = -pr + \gamma_s(\tau); \qquad (23)$$

$$\dot{\theta}(\tau) = \gamma_c(\tau). \qquad (24)$$

Решение уравнения (23) для установившегося режима имеет вид

$$r(\tau) = \int_{-\infty}^{\tau} \gamma_s(\alpha) e^{p(\alpha-\tau)} d\alpha,$$

где $r(\tau)$ — центрированный гауссов случайный процесс с функцией автокорреляции

$$K_r(\Delta\tau) = \langle r(\tau) r(\tau+\Delta\tau) \rangle = \sigma_r^2 e^{-p|\Delta\tau|}; \qquad (25)$$

$$\sigma_r^2 = A_s/2p. \qquad (26)$$

Из уравнения (24) находим приращение фазы за время T:

$$\Delta\varphi_T = \varphi(\tau+T) - \varphi(\tau) = \int_{\tau}^{\tau+T} \gamma_c(\tau) d\tau.$$

Дисперсия приращения фазы равна

$$\sigma_{\Delta\varphi}^2 = DT; \qquad (27)$$

где

$$D = A_c/2R_0^2. \qquad (28)$$

Взаимная корреляционная функция $r(\tau)$ и $\Delta\varphi_T(\tau)$ в силу некоррелированности $\gamma_s(\tau)$ и $\gamma_c(\tau)$ равна нулю,

$$K_{r,\Delta\varphi}(\Delta\tau) = 0. \qquad (29)$$

Формулы (19), (20), (22), (28) позволяют количественно оценить вклад флуктуаций $n(t)$ за счет взаимодействия с гармониками $x(t)$ в мощность флуктуаций $r(\tau)$ и $\Delta\varphi(\tau)$. Функция автокорреляции решения (21) определяется формулой

$$K_y(\Delta\tau) = \langle y(\tau) y(\tau+\Delta\tau) \rangle = \langle R_0^2 (1+r(\tau))(1+r(\tau+\Delta\tau)) \times$$

$$\times \cos(\tau+\varphi_0+\theta(\tau)) \cos(\tau+\Delta\tau+\varphi_0+\theta(\tau+\Delta\tau)) \rangle.$$

Учитывая некоррелированность $r(\tau)$ и $\Delta\varphi(\tau)$ (29) и используя формулы (21), (25) — (28), получаем

$$\begin{aligned} K_y(\Delta\tau) &= 0{,}5R_0^2 (1+K_r(\Delta\tau)) \langle \cos(\tau+\Delta\varphi_T) \rangle = \\ &= 0{,}5R_0^2 (1+K_r(\Delta\tau)) \mathrm{Re}[e^{J\tau} \langle e^{J\Delta\varphi} \rangle] = \\ &= 0{,}5R_0^2 (1+K_r(\Delta\tau)) e^{-0{,}5D|\Delta\tau|} \cos\tau. \end{aligned} \qquad (30)$$

Используя формулы (25), (27), (30) и применив преобразование Фурье, находим спектральную плотность в преобразованных переменных:

$$S_y(\omega_\tau) = \begin{cases} R_0^2 \left[\dfrac{0{,}5D}{(0{,}5D)^2 + (\omega_\tau - 1)^2} + \sigma_r^2 \dfrac{p+0{,}5D}{(p+0{,}5D)^2 + (\omega_\tau - 1)^2} \right], & \omega_\tau > 0 \\ 0, & \omega_\tau < 0 \end{cases}. \qquad (31)$$

Первое слагаемое в выражении (31) определяется фазовыми флуктуациями и соответствует узкополосному пику (рис. 1а), содержащему основную мощность. Второе слагаемое определяется амплитудными флуктуациями и соответствует широкополосному пьедесталу.

4. Переходим к исходным переменным. Пусть в системе y, τ решение имеет вид $y=R_0\cos\omega_{\tau0}\tau$. Тогда спектральная плотность имеет одну спектральную составляющую с частотой $\omega_{\tau0}$:

$$S_y(\omega_\tau) = 0{,}5R_0^2\delta(\omega-\omega_{\tau0}) . \qquad (32)$$

Определим спектральную плотность в исходной системе (x, t), представив решение в виде

$$x(t)= \sum_{i=1}^{n} A_i \cos(i/c_0)\omega_0 t. \qquad (33)$$

Используя формулы (4), (5), определим функции $t(\tau)$ и $x(\tau)$:

$$t=\int_0^\tau G(y)d\tau = \sum_{i=0}^{n} C_i \sin i\omega_\tau\tau + C_0\tau ; \qquad (34)$$

$$x=\int_0^y G(y)dy = R_0\cos\omega_\tau\tau + \frac{1}{2}b_1R_0^2\cos^2\omega_\tau\tau+\ldots+\frac{1}{n}b_n R_0^{n+1}\cos^{n+1}\omega_\tau\tau . \qquad (35)$$

Из (33), (34) определяем основную частоту

$$\omega_0 = \omega_{\tau0}/C_0 .$$

Амплитуды гармоник A_i полинома (33) определяем численным методом. Задаем ряд значений τ, по формулам (34), (35) определяем соответствующие значения t, x и $\cos(i/C_0)t$. Используя (33), составляем систему линейных алгебраических уравнений, из которой определяем амплитуды A_i. Таким образом, каждой спектральной составляющей в преобразованной системе (y,τ) на частоте ω_τ с амплитудой R_0 в исходной системе (x, t) соответствует ряд спектральных составляющих на частотах $(i\omega_\tau/C_0)$ с амплитудами A_i соответственно.

Учитывая малость флуктуаций амплитуды в преобразованной системе (22), получаем правило перехода от спектральной плотности в преобразованной системе $S_y(\omega_\tau)$ (рис. 1а) к спектральной плотности в исходной системе $S_x(\omega)$ (рис. 1б). Любой составляющей спектральной плотности $S_y(\omega_\tau)$ с частотой ω_τ и амплитудой $0{,}5R^2(\omega_\tau)$ в преобразованной системе (y, τ) в исходной системе (x, t) соответствует ряд составляющих спектральной плотности $S_x(\omega)$ на частотах $i\omega_\tau/C_0$ с амплитудами соответственно.

На рис. 2 приведена блок-схема программы расчета спектральной плотности в преобразованных переменных и $05A_i^2\, R^2(\omega\tau)\,/\,R_0^2$ амплитуд A_i в исходных переменных.

1. Получена формула (31), определяющая спектральную плотность. в преобразованной системе y, τ. Количественно оценен вклад в спектральную плотность, который вносят флуктуации $n(t)$ на частотах i/C_0 при $i=2, 3, \ldots , n$, формулы (19), (20).

2. Найден алгоритм определения спектральной плотности в исходной системе (x,t) по спектральной плотности (31) в преобразованной системе y,τ. Показано, что спектральная плотность в исходной системе состоит из ряда пьедесталов с пиками, имеющими максимумы на частотах i/C_0. Относительная эффективная ширина всех пиков одинакова.

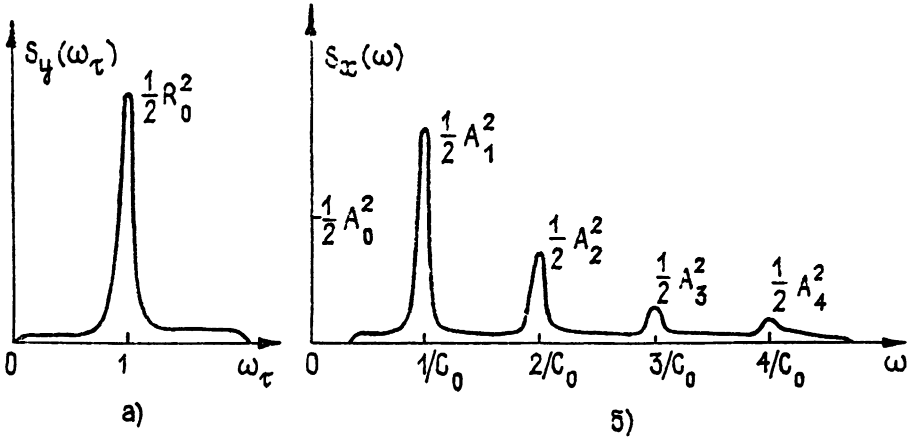

Рис. 1.

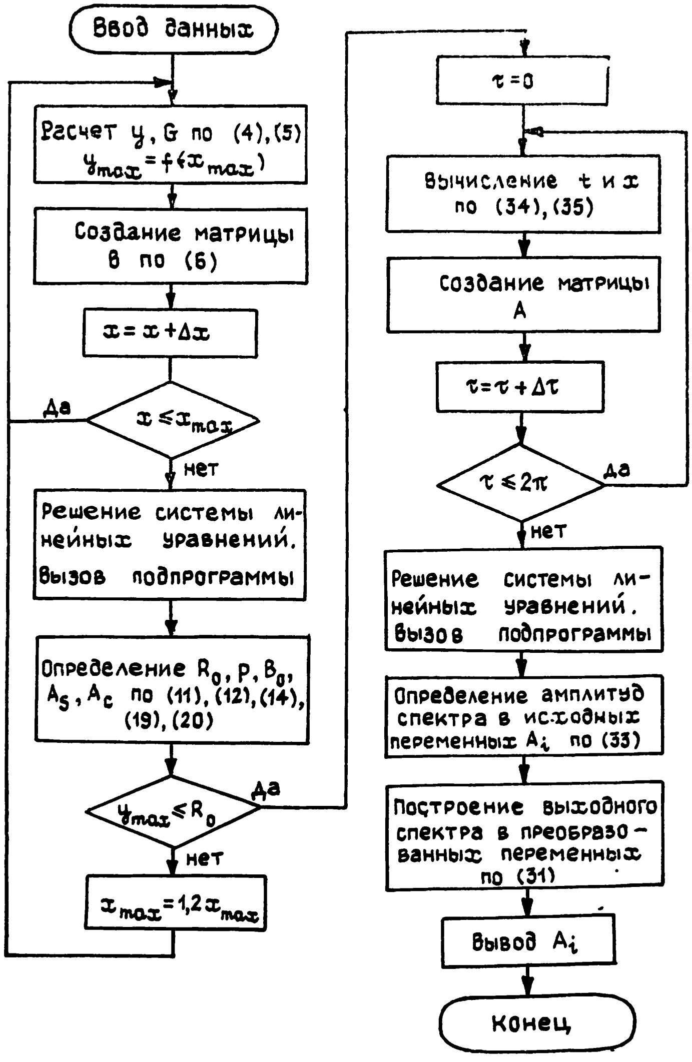

Рис. 2.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Определим статистические характеристики $\gamma_s(\tau)$ и $\gamma_c(\tau)$. Используя формулы (15), (7), получаем

$$K_{\gamma s}(\Delta\tau) = \langle \gamma_s(\tau)\gamma_s(\tau+\Delta\tau)\rangle = \frac{1}{T_0^2}\left\langle \int_0^{T_0}\int_0^{T_0} \xi(U+\tau-T_0)\,\xi(V+\tau+\Delta\tau-T_0)\times \right.$$

$$\left. \times \sin(U+\tau-T_0)\sin(V+\tau+\Delta\tau-T_0)\,dU\,dV \right\rangle .$$

Учитывая, что $\xi(\alpha) = \sqrt{B_0}\,(1+0{,}5\sum_{i=1}^{n} B_i \cos i\alpha)\, n(\tau)$, проведя тригонометрические преобразования, получим

$$K_{\gamma s}(\Delta\tau) = \frac{B_0 N_0}{T_0^2 4}\int_0^{T_0}\int_0^{T_0} \delta(U-V-\Delta\tau)\left\{\frac{1}{2}\cos(U-V-\Delta\tau) - \right.$$

$$-\frac{1}{4}B_2\cos(U-V-\Delta\tau) + \frac{1}{32}\left[B_1^2\cos 2(U-V-\Delta\tau) - \right.$$

$$-2B_1B_3\cos 2(U-V-\Delta\tau) + 2B_2^2\cos(U-V-\Delta\tau) +$$

$$\left.\left. + B_3^2\cos 2(U-V-\Delta\tau) - 2B_2B_4\cos 2(U-V-\Delta\tau) + \ldots\right] + X\right\} dU\,dV,$$

где X — осциллирующие члены.

Отбрасывая осциллирующие члены X, после интегрирования получаем

$$K_{\gamma s}(\Delta\tau) = \frac{N_0}{4}\frac{B_0}{T_0^2}\left[1 - \frac{1}{2}B_2 - \frac{1}{16}B_1^2 + \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{n}(B_i^2 - B\,B_{i+2})\right](T_0 - |\Delta\tau|).$$

Для медленного времени τ имеем

$$\lim_{T_0\to 0}\frac{1}{T_0^2}(T_0 - |\Delta\tau|) = \delta(\Delta\tau).$$

Окончательно получаем формулы (16), (19). Аналогично приходим к формулам (17), (20) и (18).

ЛИТЕРАТУРА

1. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. — М.: Наука, 1974.
2. Малахов А. М. Флуктуации в автоколебательных системах. — М.: Наука, 1968
3. Тихонов В. И. Статистическая радиотехника. — М.: Сов. радио, 1966.
4. Тихонов В. И. Нелинейные преобразования случайных процессов. — М.: Радио и связь, 1986.
5. Жалуд В., Кулешов В. Н. Шумы в полупроводниковых устройствах. — М.: Сов. радио, 1977.
6. Самойло К. А. Метод анализа колебательных систем второго порядка. — М.: Сов. радио, 1976.

Московский институт радиотехники, электроники и автоматики

Поступила в редакцию 16 февраля 1987 г.

THE ANALYSIS OF THE SECOND ORDER SYSTEMS, CLOSE TO NONLINEAR CONSERVATIVE ONES WITH ACCOUNT OF FLUCTUATIONS

T. K. Paushkina, K. A. Samojlo

According to the increasing demand to the frequency stability and the oscillator spectrum purity, the problem of the spectrum an account of reactance nonlinearity in the presence of noise become more and more urgent. In the article the method for the evaluation of this generator spectrum is suggested. Using statistic mathematic apparatus and nonlinear alternating quantity coversion, the nonlinear stochastic differential second order equation, described the wide class of this systems, is solved.