

УДК 534.015; 537.86:519

## ПЕРЕХОД ОТ СИММЕТРИЧНОГО К НЕСИММЕТРИЧНОМУ РЕЖИМУ ХАОТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ В СИСТЕМЕ ДИССИПАТИВНО СВЯЗАННЫХ РЕКУРРЕНТНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

*С. П. Кузнецов, А. С. Пиковский*

Изучен переход модельной системы от синфазного к несинфазному режиму хаотической динамики при уменьшении величины диссипативной связи. Получены выражения для плотности распределения и моментов динамических переменных вблизи точки перехода хаос—хаос и продемонстрировано соответствие с результатами численного эксперимента.

В настоящее время, когда накоплен большой объем информации о динамическом хаосе в простых нелинейных колебательных системах, естественно обратиться к более сложным задачам, в которых эти системы выступают в качестве элементарных строительных блоков, «кирпичиков». В настоящей работе в русле этой программы исследуется система двух одинаковых связанных подсистем, каждая из которых демонстрирует хаос. Будем считать, что переменные  $u$  и  $v$  описывают состояния двух подсистем, а параметр  $\gamma$  определяет величину связи между ними.

Относительно характера связи предположим, что она является диссипативной, т. е. способствует выравниванию мгновенных состояний подсистем, а при равенстве мгновенных состояний не влияет на их динамику. Характер режима, наблюдаемого в системе, определяется конкуренцией двух факторов. Первый состоит в разбегании фазовых траекторий, обусловленном хаотической динамикой подсистем: если начальные состояния слегка различаются, то разбегание траекторий стремится увеличить это различие. Второй фактор — влияние диссипативной связи, которое, как было сказано, способствует выравниванию состояний. При большой связи доминирует второй фактор и в системе возникает синфазный хаотический режим. При этом на плоскости переменных  $u, v$  изображающая точка совершает хаотические колебания, оставаясь всегда на биссектрисе (рис. 1а). При уменьшении параметра связи в некоторый момент начинает доминировать первый фактор — разбегание траекторий, и хаос становится несинфазным: изображающая точка на плоскости  $u, v$  уже не остается на биссектрисе, а совершает движение в ее окрестности (рис. 1б). Вместо параметра связи  $\gamma$  нам удобно будет использовать величину  $\epsilon$ , которая характеризует надкритичность антисимметричной составляющей решения:  $\epsilon < 0$  соответствует синфазному хаосу,  $\epsilon > 0$  — несинфазному, а  $\epsilon = 0$  — критической ситуации (моменту перехода). Задача состоит в том, чтобы рассмотреть возникновение несинфазного хаоса при переходе  $\epsilon$  через нуль, опираясь по возможности только на малость  $\epsilon$  и избегая каких-либо дополнительных искусственных предположений.

**1. Модель.** Рассмотрим модельную систему двух связанных одномерных рекуррентных отображений следующего вида:

$$u_{n+1} = f(u_n) + \gamma[f(v_n) - f(u_n)], \quad v_{n+1} = f(v_n) + \gamma[f(u_n) - f(v_n)], \quad (1)$$

где  $n$  — дискретное время,  $u_n$  и  $v_n$  — состояния подсистем в момент  $n$ ,

$\gamma \in [0, 1]$  — коэффициент диссипативной связи. Функцию  $f$  зададим в виде

$$f(u) = 1 - 2u^2, \quad (2)$$

при этом динамика индивидуального отображения  $u_{n+1} = f(u_n)$  является, как известно, хаотической [1].

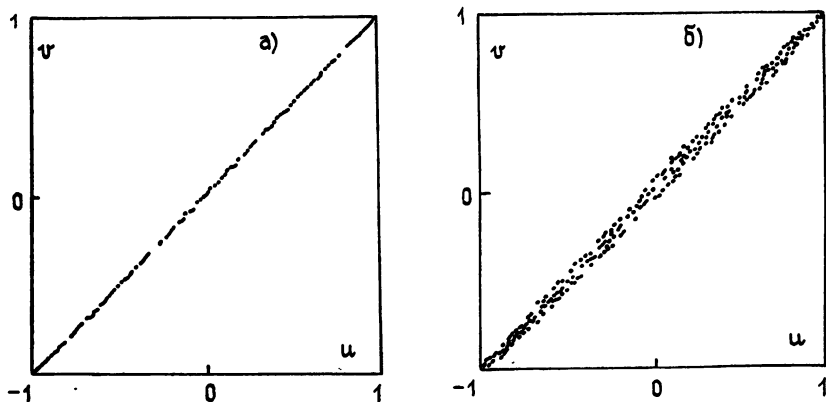


Рис. 1.

Если начальные значения динамических переменных  $u, v$  лежат в интервале  $[-1, 1]$ , то при указанном способе введения связи они остаются ограниченными и для всех последующих моментов дискретного времени. Действительно, при  $|u_n| \leq 1, |v_n| \leq 1$  из (2) следует, что  $|f(u_n)| \leq 1, |f(v_n)| \leq 1$ , тогда согласно (1)  $|u_{n+1}| \leq (1 - \gamma)|f(u_n)| + \gamma|f(v_n)| \leq 1$  и, аналогично,  $|v_{n+1}| \leq 1$ .

Введем вместо  $u$  и  $v$  новые переменные  $x$  и  $y$ , характеризующие, соответственно, симметричную и антисимметричную часть решения:

$$x = 1/2 (u+v), \quad y = 1/2 (u-v), \quad (3)$$

и положим  $\gamma = (1-\varepsilon)/4$ . (Как можно показать, критической ситуации возникновения несинфазного хаоса при выбранной функции  $f(u)$  соответствует  $\gamma = 1/4$  [2].) Тогда система (1) переписется в виде

$$x_{n+1} = 1 - 2x_n^2 - 2y_n^2, \quad y_{n+1} = -2(1 + \varepsilon)x_n y_n. \quad (4)$$

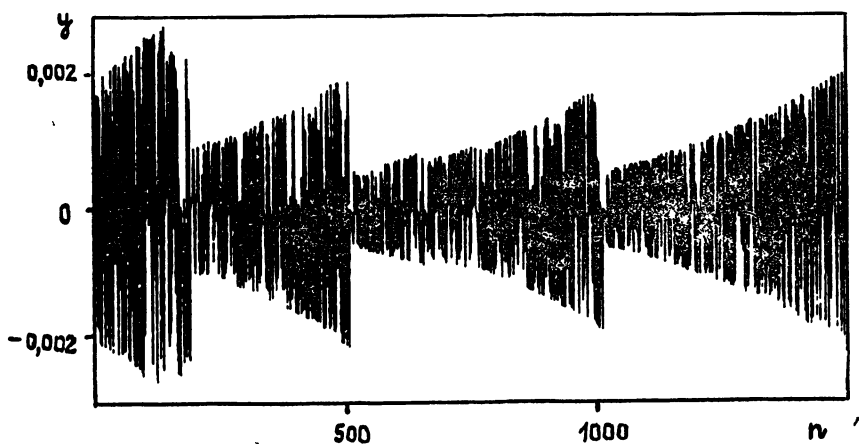


Рис. 2.

В работе японских авторов [3] было проведено численное исследование динамики такой системы. На рис. 2 воспроизведена полученная ими зависимость антисимметричной части решения  $y_n$  от дискретного времени  $n$  при малой надкритичности  $\varepsilon = 0,003$ . Видно, что решение

представляет собой последовательность нарастающих цугов, продолжительность которых меняется раз от разу случайным образом. Каждый цуг заканчивается резким сбросом амплитуды несинфазной составляющей до некоторого малого уровня, после чего начинается новый цикл нарастания. Развиваемая теория с необходимостью должна объяснить эти особенности процесса.

**2. Теория.** В нулевом приближении, считая надкритичность  $\varepsilon$  и антисимметричную компоненту  $y$  бесконечно малыми, из уравнения (4) получаем

$$x_{n+1} = 1 - 2x_n^2, \quad y_{n+1} = -2x_n y_n. \quad (5)$$

Уравнения (5) имеют «первый интеграл»  $|y_n| = C\sqrt{1-x_n^2}$ , где  $C$  — произвольная постоянная, в чем можно убедиться, непосредственно подставляя это выражение в (5). Это наблюдение имеет принципиальное значение для дальнейшего анализа. Из него следует, что целесообразно ввести вместо  $x_n$ ,  $y_n$  новую пару динамических переменных  $x_n$ ,  $C_n$ , где

$$C_n = |y_n|/\sqrt{1-x_n^2}. \quad (6)$$

При этом уровень антисимметричной компоненты характеризуется величиной  $C_n$ , которая будет медленно меняться во времени, тогда как  $y_n$  содержит быструю компоненту, связанную с хаотическими колебаниями переменной  $x_n$ .

В новых переменных уравнения (4) переписываются таким образом:

$$x_{n+1} = 1 - 2x_n^2 - 2C_n^2(1-x_n^2), \quad (7)$$

$$C_{n+1} = C_n \frac{1 + \varepsilon}{\sqrt{[1 + (x_n^2 - 1)C_n^2](1 - C_n^2)}}.$$

Ограничиваясь ситуацией, близкой к критической, когда  $\varepsilon \ll 1$ ,  $C_n \ll 1$ , пренебрежем всеми членами кроме не исчезающих в первом порядке по  $\varepsilon$ ,  $C$ , и получим из второго уравнения (7)

$$C_{n+1} = C_n \frac{1 + \varepsilon}{\sqrt{1 + \eta_n C_n^2}}, \quad \eta_n = \frac{1}{x_n^2}. \quad (8)$$

Это соотношение можно рассматривать как уравнение для определения  $C_n$ , содержащее случайный коэффициент  $\eta_n$ . При малых  $\varepsilon$  статистику случайной величины  $\eta_n$  можно, по-видимому, считать не зависящей от  $C_n$  и находить ее, используя для  $x_n$  невозмущенное уравнение  $x_{n+1} = 1 - 2x_n^2$ . Из формулы (8) становится понятной специфика действия нелинейности системы на динамику антисимметричной составляющей: нелинейный член мал в силу малости  $C_n$  до тех пор, пока переменная  $x_n$  не окажется близка к нулю. В этот момент  $\eta_n$  становится большой, роль нелинейности резко возрастает и происходит сильное уменьшение уровня антисимметричной компоненты. Именно в этом и состоит механизм наблюдавшегося в численных расчетах [3] обрывания нарастающих цугов колебаний.

Заменой  $Z_n = 1/C_n^2$  уравнение (8) сводится к линейному уравнению с аддитивной случайной добавкой

$$Z_{n+1} = (1 - 2\varepsilon)Z_n + \eta_n. \quad (9)$$

Некоторое осложнение состоит в том, что случайная величина  $\eta_n$  не имеет конечных моментов, и поэтому уравнение (9) не решается традиционным методом Фоккера—Планта.

Применим для решения задачи метод характеристических функций. Характеристическую функцию для величины  $\eta_n$  вычисляем с использо-

Ваннем известного соотношения для инвариантного распределения величины  $x$  в форме  $1/\pi\sqrt{1-x^2}$  [1]. Соответствующий интеграл представляется в виде

$$\varphi_\eta(\omega) = \langle e^{i\omega\eta_n} \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{e^{i\omega/x^2}}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{2}, i\omega\right) = 1 - 2\sqrt{\frac{|\omega|}{\pi i}} + O(\omega^{3/2}), \quad (10)$$

где  $\Gamma$  — неполная гамма-функция.

Случайные толчки в уравнении (9) в рассматриваемом асимптотическом случае малых  $\varepsilon$  можно считать статистически независимыми по той причине, что существенные толчки большого уровня происходят сравнительно редко, так что благодаря хаотическому характеру динамики переменной  $x_n$  статистическая связь между ними успевает пропасть. Учитывая это обстоятельство, получаем следующее уравнение для характеристической функции величины  $Z$ :

$$\varphi_{n+1}(\omega) = \varphi_n(\omega(1-2\varepsilon))\varphi_\eta(\omega), \quad \varphi_n(\omega) = \langle e^{i\omega Z_n} \rangle. \quad (11)$$

Стационарное решение этого уравнения имеет вид

$$\varphi(\omega) = \prod_{n=0}^{\infty} \varphi_\eta((1-2\varepsilon)^n \omega). \quad (12)$$

В приближении (10) получаем

$$\varphi(\omega) = \exp\left(-\frac{2}{\varepsilon} \sqrt{\frac{|\omega|}{\pi i}}\right), \quad (13)$$

откуда путем обратного преобразования Фурье находим плотность распределения величины  $Z$  — так называемое распределение Леви [4]:

$$F(Z) = \frac{1}{\pi\varepsilon Z^{3/2}} e^{-1/\pi\varepsilon^2 Z}, \quad (14)$$

а из (14) получаем плотность распределения величины  $C$ , характеризующей уровень антисимметричной компоненты:

$$F(C) = \begin{cases} \frac{2}{\pi\varepsilon} e^{-C^2/\pi\varepsilon^2}, & C > 0 \\ 0, & C < 0 \end{cases}. \quad (15)$$

Отметим, что функция  $F$  зависит от комбинации  $C/\varepsilon$ , откуда следует наличие скейлинга: при уменьшении надкритичности  $\varepsilon$  в некоторое число раз характерная амплитуда несинфазной составляющей уменьшается в такое же число раз, а вид функции распределения остается подобен исходному. Используя (15), получаем следующие соотношения для моментов величины  $C$ :

$$\langle C \rangle = \varepsilon, \quad \langle C^2 \rangle = \pi\varepsilon^2/2. \quad (16)$$

Поскольку величины  $x$  и  $C$  обладают совершенно разными характерными временами изменения (для  $x$  порядка единицы, для  $C$  порядка  $\varepsilon^{-1}$ ), то их можно считать независимыми и записать совместную плотность распределения в виде произведения

$$F(x, C) = \frac{2}{\pi\varepsilon} \exp(-C^2/\pi\varepsilon^2) \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Возвращаясь к переменным  $x, y$ , получаем для двумерной плотности выражение

$$F(x, y) = \frac{1}{\pi\varepsilon} (1-x^2)^{-1} \exp\left(-\frac{1}{\pi\varepsilon^2} \frac{y^2}{1-x^2}\right). \quad (17)$$

В пределе  $\varepsilon \rightarrow 0$  из (17) получается распределение на отрезке  $[-1, 1]$  оси  $x$  или, в терминах исходных переменных  $u, v$ , на биссектрисе  $u=v$ . С ростом  $\varepsilon$  ширина распределения в направлении  $y$  растет пропорционально  $\varepsilon$ . Из (17) можно найти, что дисперсия величины  $y$  при фиксированном  $x$  ведет себя как  $\langle y^2 \rangle = \frac{\pi \varepsilon^2}{2} \sqrt{1-x^2}$ . В качественном соответствии с рис. 16 дисперсия максимальна в середине интервала изменения величины  $x$  и спадает до нуля к его краям.

**3. Численные эксперименты.** Для проверки полученных результатов проведены численные эксперименты, в ходе которых выполнялись многократные итерации двумерного отображения (4) при малых значениях  $\varepsilon$  и вычислялись статистические характеристики величины  $C = |y|/\sqrt{1-x^2}$ .

На рис. 3 проводится сравнение зависимостей первого и второго моментов  $\langle C \rangle$  и  $\langle C^2 \rangle$  от надкритичности  $\varepsilon$ . Точками показаны результаты численного эксперимента, сплошной линией — теоретические зависимости (16). На рис. 4 сравниваются эмпирическая и теоретическая плотности распределения величины  $C$  при  $\varepsilon = 0,01$ : сплошная линия соответствует численному эксперименту, а пунктирная — теоретической формуле

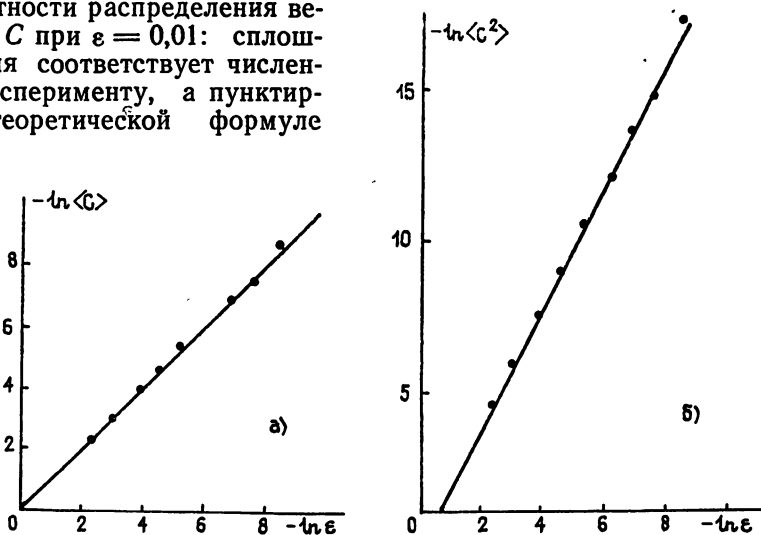


Рис. 3.

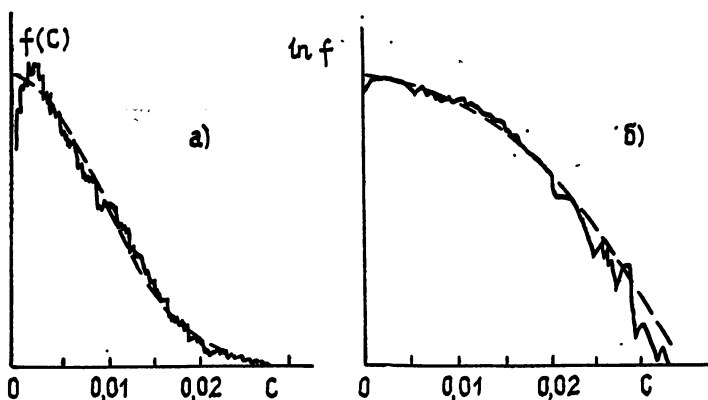


Рис. 4.

(15). Полученное соответствие следует считать весьма хорошим. Некоторое расхождение проявляется в форме эмпирической и теоретической функций распределения. Обработка данных по критерию  $\chi^2$  показывает, что это расхождение носит не статистический, а

систематический характер, т.е. связано, очевидно, с приближениями. сделанными при теоретическом анализе. Можно предположить, что расхождение будет уменьшаться при уменьшении  $\varepsilon$ .

Рассмотренная конкретная система имеет две существенных особенности. Во-первых, инвариантная плотность распределения для индивидуальной подсистемы вычисляется явно, во-вторых, хаос в индивидуальной подсистеме характеризуется нулевым фактором неоднородности (характеристика странных аттракторов, введенная в работах [5, 6]). По этой причине полученные результаты не могут претендовать на универсальность. Тем не менее они представляют, по нашему мнению, определенный интерес как первый пример аналитического решения задачи о переходе хаос—хаос и могут послужить отправным пунктом для дальнейшего развития теории таких переходов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Лихтенберг А., Либерман М. Регулярная и стохастическая динамика. — М.: Мир, 1984. — 528 с.
2. Píkovsky A. S. // Z. Phys. 1984. В 55. P. 149.
3. Fujisaka H., Yamada T. // Progr. Theor. Phys. 1985. V. 74. № 4. P. 918.
4. Золотарев В. М. Одномерные устойчивые распределения. — М.: Наука, 1983. — 304 с.
5. Fujisaka H. // Progr. Theor. Phys. 1983. V. 70. № 5. P. 1264.
6. Yamada T., Fujisaka H. // Progr. Theor. Phys. 1983. V. 70. № 5. P. 1240.

Саратовский государственный  
университет

Поступила в редакцию  
25 февраля 1987 г.

#### SYMMETRY BREAKING BIFURCATION IN THE SYSTEM OF DISSIPATIVELY COUPLED RECURRENT MAPPINGS

*S. P. Kuznetsov, A. S. Pikovskij*

Transition from homogeneous to inhomogeneous regime in the system of two coupled one-dimensional mappings as the coupling constant decreases is investigated. Expressions are obtained for the distribution function and the moments of the dynamical variables near the point of the transition chaos—chaos. Analytical results are confirmed by numerical experiments.

---