

УДК 621.373.12

## ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ АВТОМОДУЛЯЦИИ В АВТОГЕНЕРАТОРЕ С ЗАПАЗДЫВАЮЩЕЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

*T. M. Андреевская, B. A. Солнцев*

Численно исследованы зоны различных автомодуляционных режимов в широкой области параметров  $LC$ -автогенератора с запаздывающей обратной связью при кубической амплитудной и квадратичной фазовой нелинейности усилителя. Показано влияние расстройки на автомодуляционные режимы.

В автогенераторах с запаздывающей обратной связью (ЗОС) возможно существование различных видов автомодуляции — гармонической, многочастотной с дискретным спектром, стохастической, которые исследовались в ряде теоретических и экспериментальных работ (см., например, [1–8]). В качестве таких генераторов наиболее часто рассматриваются ЛБВ с ЗОС и классические схемы  $LC$ -генераторов с дополнительным запаздыванием. Как показано в работах [5, 7], в обоих случаях уравнения генераторов сводятся к интегральному виду, описывающему циркуляцию сигнала в кольцевой цепочке нелинейность — фильтр — ЗОС. С их помощью теоретически изучен ряд частных режимов генераторов с ЗОС — условия возникновения гармонической автомодуляции, стохастизации при отсутствии фильтра, когда уравнения приводят к одномерному отображению и др. Однако в общем случае необходимо применение численных методов.

В настоящей работе дан алгоритм численного решения при одновременном учете амплитудной и фазовой нелинейности, фильтра и ЗОС и приведены результаты численного исследования в широкой области изменения параметров.

**1. Уравнение и алгоритм анализа.** Исходим из укороченного уравнения для комплексной амплитуды колебаний в  $LC$ -автогенераторе с запаздыванием в цепи обратной связи [7]:

$$X(t) = -\alpha X(t) + \exp(-i\omega_p T_3) \frac{f(|X(t-T_3)|)}{|X(t-T_3)|} X(t-T_3), \quad (1)$$

где  $T_3$  — время запаздывания,  $\alpha$  и  $\omega_p$  — постоянная затухания и резонансная частота контура,  $f(|X|)$  — комплексная амплитудная характеристика нелинейного элемента по первой гармонике напряжения на контуре.

Амплитудная характеристика была выбрана в виде кубического полинома, причем он брался по модулю, чтобы не появились скачки фазы, которых нет в реальных приборах. Зависимость же фазы от амплитуды отражается фазоамплитудной характеристикой  $\Theta(|X|)$ , которую при численных исследованиях представим в виде квадратичного полинома. Таким образом, в общем виде нелинейность описывается соотношением

$$f(|X|) = |a_1|X| - a_3|X|^3 \exp[-i(b_0 + b_2|X|^2)]. \quad (2)$$

Произведя замену переменных  $Z = X/X_0$ ,  $\tau = t/T_3$  и вводя пара-

метры  $\mu = a_1 T_3 / \alpha T_3$ ,  $\tilde{b}_2 = b_2 X_0^2$ , где  $X_0$  определяется из уравнения для стационарной амплитуды  $\alpha X_0 = a_1 X_0 - a_3 X_0^3$ , и полагая, что  $\omega_p T_3 = 2\pi N + \delta$ , где  $N$  — число целых периодов высокой частоты на времени задержки, получим следующее уравнение:

$$\begin{aligned} \dot{Z}(t) = & -\alpha T_3 Z(t) + e^{-i\delta} (\mu - (\mu - 1)|Z(\tau - 1)|^2) |Z(\tau - 1)| \times \\ & \times \exp[-i(b_0 + \tilde{b}_2 |Z(\tau - 1)|^2)]. \end{aligned} \quad (3)$$

Численное решение данного уравнения проводилось с помощью рекуррентной формулы, полученной в результате его преобразования к интегральному виду и переходу к дискретным отсчетам  $Z_k$  (см. [7]):

$$\begin{aligned} Z_{k+1} = & Z_k \exp\left(-\frac{\alpha T_3}{M}\right) + e^{-i\delta} \left(1 - \exp\left(-\frac{\alpha T_3}{M}\right)\right) [\mu - (\mu - 1)|Z_{k-M}|^2] \times \\ & \times |Z_{k-M}| \exp[-i(b_0 + \tilde{b}_2 |Z_{k-M}|^2)], \end{aligned} \quad (4)$$

где  $M$  — число отсчетов на времени задержки,  $\Delta\tau = 1/M$  — интервал между отсчетами,  $k = \tau/\Delta\tau$  — дискретное текущее время.

Алгоритм (4) позволяет провести численное исследование установления амплитуды автогенератора во всей области изменения параметров генератора: произведения  $\alpha T_3$ , характеризующего число собственных колебаний (мод) в полосе контура, безразмерной расстройки  $\delta$  и параметров нелинейности  $\mu$ ,  $b_0$ ,  $\tilde{b}_2$ .

На рис. 1 представлены полученные численно временные реализации изменения амплитуды для некоторых режимов автогенератора с запаздыванием.

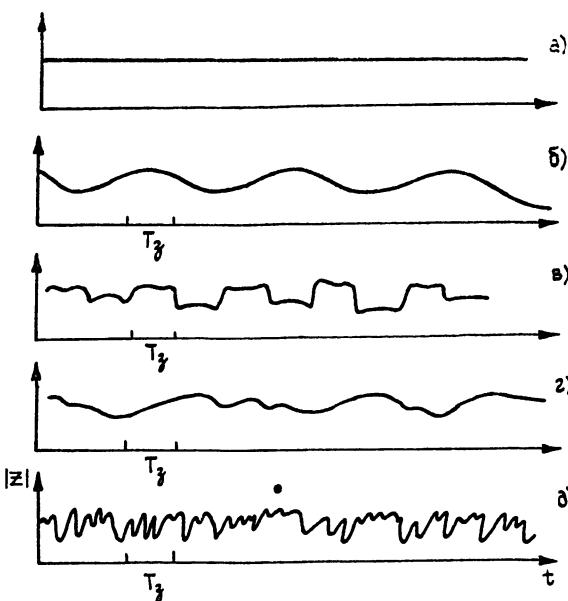


Рис. 1.

В зависимости от соотношения параметров в генераторе возможен ряд видов установившихся колебаний:

- отсутствие генерации, когда баланс амплитуд не выполняется ни на одной из собственных частот генератора;
- моногенерация с постоянной амплитудой на одной из собственных мод, вероятнее всего на центральной частоте фильтра или вблизи нее при расстройке (рис. 1а);
- периодические колебания амплитуды одной моды с одним или

несколькими видами автомодуляции ( $\alpha T_3 \leq \pi$ , рис. 1б); период первого вида лежит в пределах  $(2\div 4)T_3$ ;

— периодические широкополосные автомодуляционные колебания с большим числом синхронизированных видов ( $\alpha T_3 \gg \pi$ , рис. 1в); основной период двухтактной автомодуляции равен  $2T_3$ ;

— режим стохастических автомодуляционных колебаний, характеризующийся сплошным спектром на одной ( $\alpha T_3 \leq \pi$ , рис. 1г) или нескольких модах ( $\alpha T_3 \gg \pi$ , рис. 1д).

Для исследования характера поведения автогенератора использовались помимо временных реализаций гистограммы распределения и спектр колебаний амплитуды, а также так называемая фазовая диаграмма, т. е. зависимость значений амплитуды в момент времени  $t+1$  от значений в момент  $t$  (в работе [3] подобная диаграмма определялась экспериментально). Моногармонический режим отражается на фазовой диаграмме одной стационарной точкой  $Z_{k+m} = Z_k$ , периодическая автомодуляция с малым числом автомодуляционных видов ([8]) отображается на фазовой диаграмме замкнутой кривой типа эллипса для двухтактного цикла или более сложной замкнутой кривой при переходе в зоны удвоения периода. В случае периодической широкополосной автомодуляции на диаграмме имеется ограниченное число точек отображения, определяемое тактностью автомодуляции (так, для режима, показанного на рис. 1в, фазовая диаграмма будет состоять из четырех точек, соответствующих амплитудам импульсов временной диаграммы). При узкополосном стохастическом режиме фазовая диаграмма представляет собой ограниченную область, заполненную сплошь отображениями. В случае широкополосной стохастизации процесса отображающие точки ложатся на линию, описывающую одномерное отображение,

$$Z_{k+m} = |(\mu Z_k - (\mu-1)Z_k^*)|, \quad (5)$$

и в зависимости от глубины стохастизации занимают меньшую или большую часть амплитудной характеристики.

**2. Режимы генерации при отсутствии расстройки.** Рассмотрим результаты численного решения уравнения (3) с помощью алгоритма (4) при  $\delta=0$ , когда  $\omega_p T_3 = 2\pi N$ .

Сначала исследуем случай, когда фазоамплитудная зависимость отсутствует. На рис. 2 в системе параметров  $\alpha T_3$ ,  $\mu$  приведены линии переходов из одного режима генерации в другой. Цифра 0 означает отсутствие генерации, 1 — моногармонические колебания, 2—8 — тактность периодической автомодуляции, знак  $\infty$  — зоны параметров, где принятая кубическая аппроксимация непригодна (амплитуда становится бесконечно большой из-за отсутствия в аппроксимации ограничения). Здесь и далее на рисунках одинарной штриховкой показаны автомодуляционные периодические режимы, двойной штриховкой — зоны стохастичности. Рис. 2б иллюстрирует режимы генерации в результате решения уравнения (5), описывающего одномерное отображение при изменении величины  $\mu$ .

Из рис. 2а видно, что с ростом  $\alpha T_3$  система может быть приближенно описана одномерным отображением, причем граница применимости одномерного отображения  $\alpha T_3 \approx (2\div 3)\pi$  соответствует небольшому числу 2—4 собственных колебаний, лежащих в полосе контура. Вместе с тем, численные результаты показывают, что в области стохастических колебаний изменение амплитуды на больших интервалах времени имеет более сложный характер, чем дает одномерное отображение — даже за время задержки амплитуда меняется нерегулярным образом (см. рис. 1д).

С уменьшением  $\alpha T_3$  порог возникновения автомодуляции по коэффициенту усиления возрастает. Это обстоятельство уже отмечалось в работах [9—11] для несколько иных систем (с квадратичной нелинейностью и систем с инерционной нелинейностью), причем в [9] выведен

закон подобия для границ разных режимов автомодуляции. Для случая, показанного на рис. 2а, также характерно свойство подобия переходов к хаосу по сценарию Фейгенбаума. Однако при малом  $\alpha T_3 \leq 0,1$  автомодуляция вообще не возникает при увеличении  $\mu$ . Таким образом, для данного типа нелинейности при некоторой малой, но конечной за держке автомодуляции нет независимо от величины усиления.

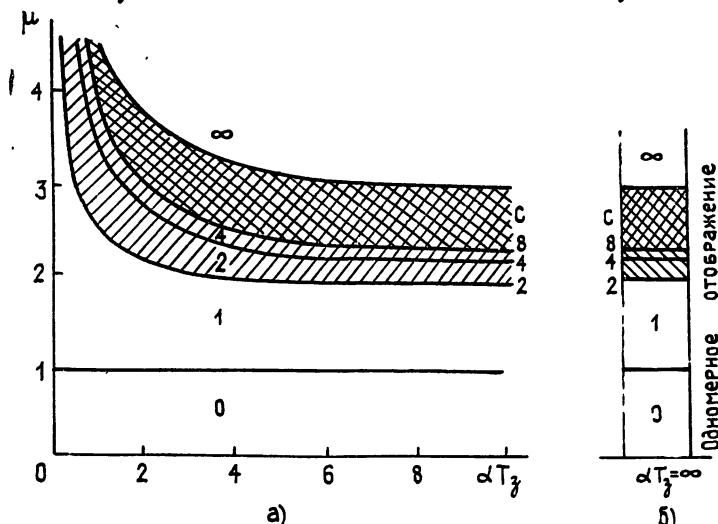


Рис. 2.

Рассмотрим теперь поведение автогенератора с фазовой нелинейностью. На рис. 3 изображены зоны различного поведения автогенератора в системе параметров  $(\alpha T_3, \mu)$  при  $b_0 = 0, \tilde{b}_2 = \pi$ , когда фазоамплитудная зависимость описывается уравнением  $\Theta = \pi |Z|^2$ . Штриховой линией отмечена соответствующая рис. 2а граница области автомодуляции при отсутствии фазовой нелинейности. Видно, что фазовая нелинейность при определенных значениях  $\alpha T_3$  приводит к снижению порога автомодуляционной неустойчивости по коэффициенту усиления,

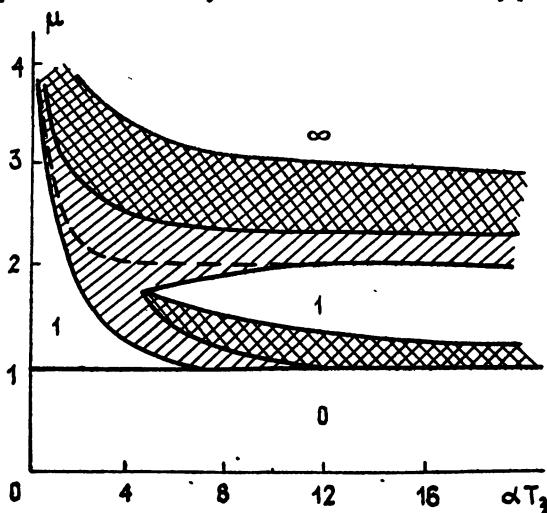


Рис. 3.

т. е. появляется дополнительная область автомодуляции (ниже штриховой линии на рис. 3). Поскольку значение безразмерного коэффициента усиления  $\mu = a_1/\alpha = 1,5$  соответствует положению стационарной точки  $|Z| = 1$  в максимуме амплитудной характеристики, то получается, что в генераторах с фазовой нелинейностью автомодуляция возможна не только на падающем ( $\mu > 1,5$ ), но и на нарастающем ( $\mu < 1,5$ ) участке амплитудной характеристики.

В дополнительной области автомодуляции существует зона моногенерации, периодической автомодуляции и стохастических колебаний, для которых отметим следующие характерные особенности. При  $\alpha T_3 \leq 1,5\pi$  (одномодовый режим) в дополнительной области существует только периодическая автомодуляция. Анализ временных реализаций показывает, что основной период автомодуляционных колебаний здесь примерно в два раза меньше основного периода в отсутствие фазовой нелинейности. При  $1,5\pi \leq \alpha T_3 \leq 4\pi$  генератор из невозбужденного состояния при  $\mu=1$  сразу переходит в режим периодической автомодуляции, а с дальнейшим ростом коэффициента усиления происходит переход к стохастическим колебаниям, и только потом появляются моногармонические колебания. Если же  $\alpha T_3 \geq 4\pi$ , то генератор из невозбужденного состояния сразу переходит к стохастическим колебаниям, минуя этап периодической автомодуляции.

Как показали проведенные расчеты, с дальнейшим ростом  $\alpha T_3$  нижняя дополнительная область стохастических колебаний сужается и при  $\alpha T_3 > 10\pi$  исчезает, так что различные режимы генерации определяются тем же одномерным отображением, что и при отсутствии фазовой нелинейности (см. рис. 2б). Отметим также, что в узкой зоне около перехода дополнительной области периодической автомодуляции в основную (штриховая линия на рис. 3) получается сложный характер изменения амплитуды, обусловленный, по-видимому, различными несоизмеримыми периодами автомодуляции в этих областях.

При решении уравнения (3) рассчитывались временные реализации не только амплитуды, но и мгновенной частоты сигнала  $Z(t)$ . Их анализ показывает, что в генераторе с фазовой нелинейностью амплитудная автомодуляция сопровождается частотной автомодуляцией с тем же периодом, а стохастические колебания амплитуды сопровождаются сильной частотной стохастической автомодуляцией.

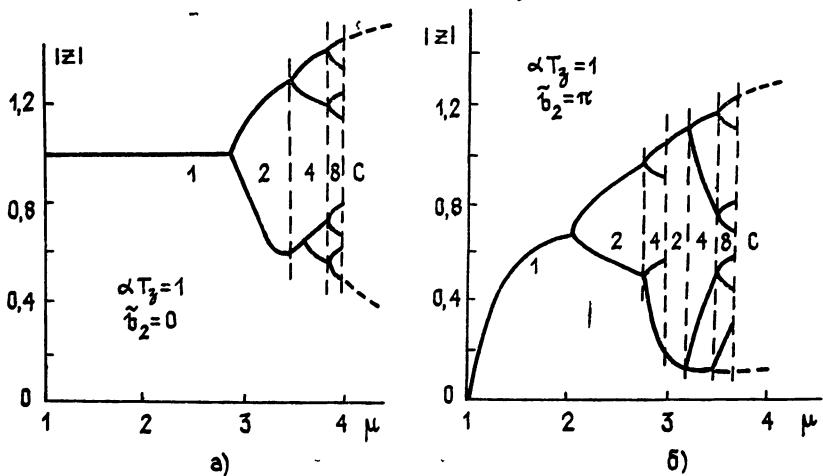


Рис. 4.

Рис. 4 иллюстрирует изменение модуля амплитуды в зависимости от усиления  $\mu$  для  $\alpha T_3 = 1$  в отсутствие (рис. 4а) и при наличии (рис. 4б) фазовой нелинейности вида  $\Theta = \pi |Z|^2$ . Верхняя и нижняя ветви кривых соответствуют максимальным и минимальным значениям амплитуды в двухтактном цикле (область 2) — один максимум и один минимум, в четырехтактном цикле (область 4) — два максимума и два минимума и т. д. В области стохастичности максимумы и минимумы лежат не на ветвях, а распределены в некотором интервале значений, обозначенных штриховыми линиями. Из рисунка видно, что при отсутствии фазоамплитудной зависимости переход к стохастической неустойчивости происходит через последовательные бифуркации удвоения периода. При наличии фазовой нелинейности возникают две области би-

фуркационных удвоений. Для показанного на рис. 4б случая первая область (при  $\mu \leq 2,8$ ) соответствует дополнительной области автомодуляции, обусловленной фазовой нелинейностью (в данном случае получились две бифуркации удвоения периода), а вторая область (при  $\mu \geq 2,8$ ) соответствует обычной амплитудной автомодуляции (рис. 4а), усложненной за счет фазовой нелинейности.

Таким образом, проведенные численные исследования позволили выявить основные зоны различных режимов работы автогенератора с ЗОС и фазовой нелинейностью.

**3. Влияние расстройки на режимы генерации.** Расстройка играет существенную роль для установления того или иного режима генерации. Влияние расстройки рассмотрено на примере одномодового генератора ( $\alpha T_3 = 1$ ), где оно проявляется более наглядно. Расстройка получается как вследствие изменения собственно времени задержки, так и при перестройке фильтра относительно частоты основной моды. На рис. 5 изображена диаграмма зон генерации в системе параметров  $\delta$ ,  $\mu$  в отсутствие фазовой нелинейности. Видно, что с изменением расстройки от нуля до  $2\pi$  для перевода генератора в режим с более сложным спектром требуется большее усиление, чем при  $\delta=0$ . Последовательность переходов при различных независимых расстройках та же, что при  $\delta=0$ , т. е. сценарий перехода к хаосу одинаков.

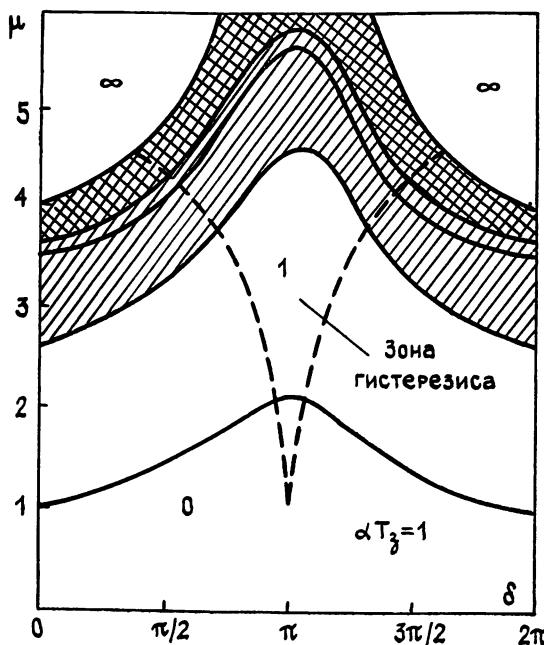


Рис. 5.

Численные исследования влияния расстройки проводились таким образом, чтобы приблизить их к натурному эксперименту, т. е. при изменении расстройки в качестве начальных условий брались значения амплитуды предыдущего режима за время задержки. Таким образом, при достаточно медленном изменении расстройки можно было зафиксировать гистерезисные переходы с одной моды на другую. На рис. 5 область гистерезисных переходов отмечена пунктирной линией.

На рис. 6 показан пример изменения амплитуды в зависимости от расстройки для двух значений усиления при отсутствии фазовой нелинейности. В режиме моногенерации ( $\mu=2,3$ ) при непрерывном увеличении расстройки амплитуда установившихся колебаний изменяется в соответствии с резонансной кривой фильтра на одной моде при  $0 < \delta \leq \pi$  и на соседней моде при  $\pi \leq \delta \leq 2\pi$ . Усиление  $\mu=3$  соответствует двухтактному циклу при  $\delta=0$ . При увеличении расстройки амплитуда ав-

томодуляции уменьшается и при некотором значении  $\delta$  исчезает, так что генератор выходит в зону моногенерации; при  $\delta = \pi$  амплитуда не падает до нуля, что позволяет проследить гистерезис. При дальнейшем увеличении расстройки генератор выходит из зоны притяжения одной моды и скачком переходит в зону притяжения соседней моды.

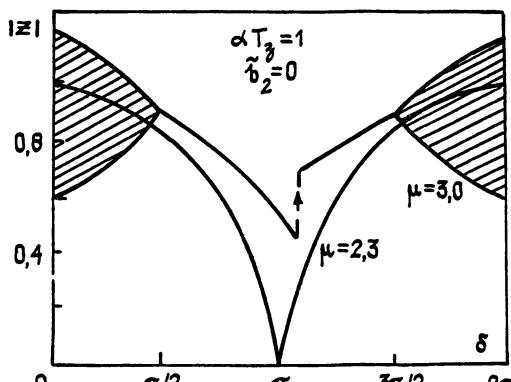


Рис. 6.

Наличие фазоамплитудной нелинейности приводит к более сложному характеру переходов в генераторе при изменении расстройки, особенно при больших значениях усиления.

Таким образом, рассмотренный простой алгоритм численного исследования позволил рассмотреть разнообразные режимы работы генераторов с ЗОС. Численно построена общая картина режимов генерации в широкой области параметров при кубической амплитудной и квадратичной фазовой нелинейности.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Рубаник В. П. Колебания квазилинейных систем с запаздыванием. — М.: Наука, 1969.
2. Кислов В. Я. // Радиотехника и электроника. 1980. Т. 25. № 8. С. 1683.
3. Кац В. А. В кн.: Лекции по электронике СВЧ и радиофизике. — Саратов: Гос. ун-т, 1983. Кн. 2. С. 49.
4. Кац В. А., Кузнецов С. П. В кн.: Лекции по электронике СВЧ и радиофизике. — Саратов: Гос. ун-т, 1983. Кн. 2. С. 45.
5. Калинин В. И., Залогин Н. Н., Кислов В. Я. // Радиотехника и электроника. 1983. Т. 28. № 10. С. 2001.
6. Кабанов Д. А. Функциональные устройства с распределенными параметрами. — М.: Сов. радио, 1979.
7. Солнцев В. А., Андреевская Т. М. // Радиотехника и электроника. 1983. Т. 28. № 3. С. 561.
8. Андреевская Т. М., Солнцев В. А. Статья депонирована в ВИНИТИ, рег. № 6133-85. Деп. 20 августа 1985 г.
9. Кузнецов С. П. // Изв. вузов. Радиофизика. 1982. Т. 25. № 11. С. 1364.
10. Анищенко В. С., Астахов В. В., Летчфорд Т. Е. // ЖТФ. 1983. Т. 53. № 1. С. 152.
11. Анищенко В. С., Летчфорд Т. Е., Сафонов М. А. // Изв. вузов. Радиофизика. 1985. Т. 28. № 9. С. 1112.

Московский институт электронного  
машиностроения

Поступила в редакцию  
9 марта 1987 г.,  
после доработки  
8 сентября 1987 г.

#### THE COMPUTATIONAL STUDY OF SELF-MODULATIONS IN A SELF EXCITED OSCILLATOR WITH A FEEDBACK DELAY

*T. M. Andreevskaya, V. A. Solntsev*

Areas of various self modulation operations have been studied computationally in the wide range of parameters of feedback LC self-excited oscillator with a delay at cubic amplitude and quadratic phase nonlinearity of the amplifier. The effect of detuning on self-modulations is shown.