ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том 32, № 12 РАДИОФИЗИКА 1989

УДК 621.372.09

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РАСЧЕТА ПОЛЯ ТОЧЕЧНОГО ИСТОЧНИКА В РЕФРАКЦИОННОМ ВОЛНОВОДЕ

А. С. Старков

Предложен новый метод расчета волнового поля в широком рефракционном волноводе. Метод основан на суммировании нормальных волн при помощи формулы Мелера для полиномов Эрмита. Для поля точечного источника в волноводе с параболическим квадратом показателя преломления получено интегральное представление, в которое не входят специальные функции. Это представление исследовано асимптотическими методами, и из него выведена простая формула для волнового поля.

Как с теоретической, так и с практической точек зрения большой интерес представляет задача о распространении волн от точечного монохроматического источника в слоистом рефракционном волноводе. Поле в волноводе характеризуется большим числом каустик, имеющих точки возврата и сгущающихся при увеличении расстояния между источником и точкой наблюдения, поэтому его расчет и интерпретация на основе лучевых формул затруднительны. Для получения поля точечного источника в волноводе необходимы существенные усложнения лучевого метода [1,2]. С другой стороны, метод нормальных волн в его численной реализации мало эффективен в области высоких частот из-за необходимости вычисления суммы большого числа нормальных волн. В последнее время были предложены различные комбинированные методы, основанные на представлении поля в волноводе в виде суммы нормальных, геометрооптических волн и остатка, а также метод суммирования гауссовых пучков [3–8]. Однако и эти методы требуют значительное число вычислений.

Волновое поле, образующееся в результате наложения отдельных волн, можно представить суммой так называемой осевой волны и волн геометрической оптики. Осевая волна является суперпозицией волн, соответствующих лучам, распространяющимся под малыми углами к оси волновода, и носит достаточно сложный интерференционный характер. В зависимости от свойств волноводного канала она приходит к приемнику раньше (сильные волноводы) или позже (слабые волноводы) волн, которые отвечают лучам, распространяющимся под большими углами к оси. По мере удаления от источника вдоль оси волновода отдельные волны приобретают (в случае слабых волноводов) или теряют (сильные волноводы) отчетливые геометрические характеристики и выходят из процесса интерференции с осевой волной или поглощаются последней. Процесс отщепления волн геометрической природы (или их поглощения осевой волной) исследован в работе [5] для частного случая, когда источник и точка наблюдения находятся строго на оси канала. Преобразование волн описывалось весьма сложной специальной функцией, подлежащей табулированию.

В данной работе предлагается метод асимптотического суммирования нормальных волн, основанный на использовании производящей функции для полиномов Эрмита. Метод применим, если число M распространяющихся нормальных волн велико, $M \gg 1$, т. е. именно тогда, когда нерационально применять метод нормальных волн.

Выберем цилиндрическую систему координат (r, z) так, чтобы ось $z=0$ являлась осью волновода. Электромагнитное поле описывается при помощи функции Герца, которая для точечного источника в трехмерной слоистой среде представляется в виде суммы ряда по нормальным волнам [9]:

$$u(r,z)=\frac{i}{4}\sum_{m=0}^{\infty}H_0^{(1)}(k\mu_m r)\Psi_m(z_1)\Psi_m(z_2)\,. \tag{1}$$

Здесь μ_m и $\Psi_m(z)$ — собственные значения и нормированные собственные функции краевой задачи для дифференциального уравнения

$$\frac{d^2\Psi}{dz^2}+k^2[n^2(z)-\mu^2]\Psi(z)=0,$$

r — расстояние между источником и приемником по горизонтали, z_1 и z_2 — вертикальные координаты источника и приемника, $n(z)$ — показатель преломления, нормированный на единицу на оси канала, $H_0^{(1)}(x)$ — функция Ханкеля первого рода.

Будем предполагать, что показатель преломления мало изменяется на расстояниях порядка длины волны, т. е. будем считать, что зависимость показателя преломления от координаты z может быть представлена в виде $n=n(z/L)$, где L — характерный вертикальный масштаб и $kL\gg 1$ — большой параметр задачи. При этом предположении число распространяющихся в волноводе нормальных волн велико, $M=O(kL)$, т. е. волновод является широким. Будем также предполагать, что источник и точка наблюдения находятся не очень далеко от оси, $\sqrt{k/L}\,z_1=O(1)$, $\sqrt{k/L}\,z_2=O(1)$, на расстояниях порядка $\sqrt{M}$ длин волн от оси.

Для асимптотики собственных функций при $kL\to\infty$ (коротковолновом или высокочастотном приближении) в [5, 10] получены формулы

$$\Psi_m(z)=\frac{\sqrt{\zeta(z)}\exp\left(-\zeta^2(z)/2\right)}{\pi^{1/4}2^{(2m-1)/4}\sqrt{m!\,p(z)}}H_m(\zeta(z))\left[1+O\left(\frac{1}{\sqrt{kL}}\right)\right], \tag{2}$$

где $H_m(x)$ — полиномы Эрмита, а

$$p(z)=\sqrt{1-n^2(z/L)}=p_1(z/L)+p_2(z/L)^2+p_3(z/L)^3+\ldots,$$

$$\zeta(z)=\left[k\int_0^z p(z)dz\right]^{1/2}.$$

Асимптотика собственных значений имеет вид

$$\mu_m^2=1-\frac{p_1}{\sqrt{2}\,kL}(2m+1)+\left[(2m+1)^2\left(\frac{3}{4}p_3-\frac{3}{2}\frac{p_2^2}{p_1}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{3}{4}p_3-\frac{1}{2}\frac{p_2^2}{p_1}\right]\frac{1}{(kL)^2}+O\left[\left(\frac{m}{kL}\right)^3\right]. \tag{3}$$

Асимптотические разложения (2), (3) выражаются через коэффициенты ряда Тейлора для $p(z)$ в окрестности точки максимума показателя преломления, т. е. поле, распространяющееся вблизи оси волновода, определяется локальными свойствами показателя преломления.

В формуле (3) ограничимся выписанными слагаемыми. Это можно сделать, если расстояние r не очень велико, $r\ll kL^2$ [9].

При суммировании ряда (1) будем использовать производящую функцию для произведения полиномов Эрмита (формула Мелера, приведенная в справочнике [11]):

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{H_m(x)H_m(y)}{m!}\left(\frac{t}{2}\right)^m=\exp\left[\frac{2xyt-(x^2+y^2)t^2}{1-t^2}\right](1-t^2)^{-1/2},\quad t\neq\pm1. \quad (4)$$

Вначале исследуем модельную задачу о точечном источнике в волноводе с параболическим квадратом показателя преломления $n^2(z)=1-2z^2/L^2$. В этом случае $\mu_m^2=1-(2m+1)/kL$ и ряд (1) может быть просуммирован по нормальным волнам при любом числе распространяющихся волн.

Представим каждую функцию Ханкеля в (1) в виде интеграла Фурье по переменной суммирования m:

$$H_0^{(1)}(k\mu_m r)=\frac{-i}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\exp\left[\frac{i}{2}\left(kLx\mu_m^2+\frac{kr^2}{Lx}\right)\right]\frac{dx}{x}. \quad (5)$$

После подстановки интегрального представления (5) в (1) возникает сумма интегралов, которую находим при помощи формулы Мелера (4) с $t=e^{-ix}$, и в результате приходим к следующему выражению для поля:

$$u(r,z)=\frac{-e^{i\pi/4}}{4\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{k}{L}}\int\limits_0^{\infty}\exp\left[i\left(\frac{kLx}{2}+\frac{kr^2}{2Lx}+(\zeta_1^2+\zeta_2^2)\operatorname{ctg}x-\right.\right.$$

$$\left.\left.-2\zeta_1\zeta_2\csc x\right)\right]x^{-1}(\sin x)^{-1/2}dx, \quad (6)$$

где $\zeta_1=\sqrt{k/2L}\,z_1$, $\zeta_2=\sqrt{k/2L}\,z_2$.

Изучим теперь коротковолновую асимптотику ($kL\to\infty$) точного решения модельной задачи (6) на расстояниях порядка L. В этом случае в показателе подынтегральной экспоненты выделяется большой множитель kL и интеграл может быть вычислен по методу перевала.

Как показывает исследование интеграла (6), у подынтегральной функции имеется одна стационарная точка $x=R\equiv r/L$ и бесконечное множество особых $x=\pi m$ ($m=1,2,\ldots$), причем нужно учитывать только особые точки с номерами, удовлетворяющими условию $m\geqslant N\equiv\equiv E(\pi R)+1$, где $E(R)$ означает целую часть числа R.

Вне некоторой окрестности особой дальности $r=r_N=\pi NL$ вклад от стационарной точки $x=R$ имеет вид

$$v(r,z)=\frac{\exp\{i[kr-(N-1)\pi/2+(\zeta_1^2+\zeta_2^2)\operatorname{ctg}R-2\zeta_1\zeta_2\csc R]\}}{4\pi\sqrt{rL}\sin R}. \quad (7)$$

Формула (7) описывает осевую волну и была известна в частном случае $z_1=z_2=0$ [12]. Множитель $e^{-i\pi/2}$ волна приобретает каждый раз, когда имеет место касание луча и каустики.

Вклад от особой точки с номером m может быть представлен в виде

$$u_m(r,z)=$$

$$=\frac{\exp[(i/2)(-\pi m+\pi kLm+kr^2/\pi Lm)]\cos\left(Z_m\sqrt{kL}\sqrt{1-R^2/(\pi m)^2}\right)}{4\pi\sqrt{(\pi mL)^2-r^2}},\quad m\geqslant N, \quad (8)$$

где $Z_m=|\zeta_1+(-1)^{m+1}\zeta_2|$. Выражение (8) описывает волну геометрической оптики, имеющую m пересечений с осью волновода.

Поле точечного источника вне особых дальностей есть сумма осевой волны (7) и волн геометрической оптики (8):

$$u(r, z) = v(r, z) + \sum_{m=N}^{\infty} u_m(r, z) + O\left(\frac{1}{\sqrt{kL}}\right). \tag{9}$$

При дальностях r, мало отличающихся от особых $|r - r_N| = O(\sqrt{L/k})$, метод перевала неприменим, так как слагаемые с тригонометрическими функциями в показателе экспоненты интеграла (6) нельзя считать медленно изменяющимися величинами. В этих областях формула (9) непригодна. С лучевой точки зрения необходимость рассматривать особые дальности отдельно вызвана тем, что лучи, выходящие из источника под различными углами, имеют огибающие — каустики, точки возврата которых $r = r_N$ есть особые дальности.

Основной вклад в интеграл (6) при малых $|r - r_N|$ вносят значения x, мало отличающиеся от πN, поэтому для вывода асимптотической формулы для поля в окрестности особой дальности произведем замену переменной интегрирования $y = (x - \pi N)\sqrt{kL}$ и введем растянутую координату $\tau = (r - r_N)\sqrt{k/(\pi m L)}$, которую будем считать конечной величиной. После произведенных замен ограничимся в интеграле (6) главными при $kL \to \infty$ членами. В результате элементарных преобразований получаем

$$v_1(r, z) = \frac{k^{1/4}}{8(\pi m L)^{3/4}} \exp\left[-i\left(N + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2} + ikr_N - i\frac{\tau^2}{4}\right] \times$$
$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[i\left(-\frac{y^4}{2} + \frac{y^2\tau}{2} + 2Z_N y \sqrt[4]{\frac{kL}{\pi m}}\right)\right] dy, \tag{10}$$

т. е. в окрестности особой дальности асимптотика поля выражается через эталонный интеграл Пирси [1, 9]. Амплитуда поля в $(kL)^{1/4}$ раз больше амплитуды поля вне особых дальностей и убывает при увеличении номера особой зоны N, как $N^{-3/4}$, т. е. быстрее, чем среднее поле, убывающее как $r^{-1/2}$. Следовательно, при увеличении расстояния от источника до приемника отличие амплитуды поля вдали и вблизи от каустики уменьшается и вклад от других волн геометрической оптики становится более существенным.

В окрестности особой дальности поле точечного источника есть сумма интерференционной волны $v_1(r, z)$ и волн геометрической оптики:

$$u(r, z) = v_1(r, z) + \sum_{m=N+1}^{\infty} u_m(r, z) + O\left(\frac{1}{\sqrt{kL}}\right). \tag{11}$$

Используя асимптотику интеграла Пирси, можно показать, что на некотором удалении от особой дальности при $r < r_N$

$$v_1(r, z) = v(r, z) + u_N(r, z) + O(1/\sqrt{kL}),$$

а при $r > r_N$ —

$$v_1(r, z) = v(r, z) + O(1/\sqrt{kL}).$$

Значит, функция $v_1(r, z)$ описывает процесс поглощения осевой волной волны геометрической оптики, N раз пересекшей ось волновода.

Таким образом, в эталонной задаче асимптотика волнового поля вне особых дальностей описывается элементарными формулами (7)—(9), а в окрестности особых дальностей $r = \pi N L$ — интегралом Пирси

(10), (11). Эталонный волновод является сильным, и по мере удаления от источника вдоль оси волновода происходит последовательное поглощение осевой волной волн геометрической оптики.

Вернемся теперь к исследованию общего случая, когда показатель преломления плавно зависит от вертикальной координаты. Будем рассматривать случай слабого волновода, так как сильный волновод рассмотрен выше и, кроме того, реальные волноводы в ионосфере — обычно слабые волноводы. В этом случае положителен параметр $b^2=1-ap_1^2$, где $a\equiv((3/4)p_3-(3/2)(p_2^2/p_1))^{-1}$. Повторяя те же рассуждения, что и при выводе интегрального представления в эталонной задаче, приходим к следующему выражению для главного члена асимптотики волнового поля в плавно-нерегулярной среде:

$$u(r,z)=\frac{ke^{-i\pi/4}}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{p_1}\,D\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\Big\{i\Big[\frac{kLp_1ax}{2}+kLb\sqrt{R^2-ax^2}+$$
$$+(\zeta_1^2+\zeta_2^2)\operatorname{ctg}x-2\zeta_1\zeta_2\csc x\Big]\Big\}(\sin x)^{-1/2}\Big(\frac{R^2}{a}-x^2\Big)^{-1/2}\times \tag{12}$$
$$\times dx\Big[1+O\Big(\frac{1}{\sqrt{kL}}\Big)\Big].$$

Здесь $D=\sqrt{\zeta_1\zeta_2/p(z_1)p(z_2)}$, $\zeta_1=\Big(k\int\limits_0^{z_1}p(z)\,dz\Big)^{1/2}$, $\zeta_2=\Big(k\int\limits_0^{z_2}p(z)\,dz\Big)^{1/2}$.

Для осевой волны получаем формулу, совершенно аналогичную (7):

$$w(r,z)=Dp_1^{3/2}\exp\Big\{i\Big[kr-(N-1)\frac{\pi}{2}+(\zeta_1^2+\zeta_2^2)\operatorname{ctg}\frac{Rp_1}{2}-$$
$$-2\zeta_1\zeta_2\csc\frac{Rp_1}{2}\Big]\Big\}\Big(4\pi L\sqrt{kr\sin\frac{Rp_1}{2}}\Big)^{-1}. \tag{13}$$

Такой результат объясняется тем, что осевая волна определяется лучами, распространяющимися под малыми углами к оси волновода, и, следовательно, не зависит от того, является ли волновод сильным или слабым.

Для волн геометрической природы после применения метода перевала получаем следующую формулу:

$$u_m(r,z)=\frac{kD}{2\pi(q-2bm\pi/p_1)}\exp\Big[\frac{i}{2}(kp_1a\pi m-\pi m+kLbq)\Big]\times$$
$$\times\cos\big(Z_m\sqrt{kLa(p_1-2b\pi m/q)}\big)\big[1+O(1/\sqrt{kL})\big], \tag{14}$$

где $q=\sqrt{R^2-(\pi m)^2a}$, а $m\leqslant N\equiv E(\pi R(p_1/2))$.

Полное поле вне особых дальностей $r=r_N=\pi(N+1)L$ есть сумма осевой волны и волн геометрической оптики:

$$u(r,z)=w(r,z)+\sum_{m=1}^{N}u_m(r,z)+O\Big(\frac{1}{\sqrt{kL}}\Big). \tag{15}$$

В окрестности особых дальностей $r=r_N$ полное поле есть сумма интерференционной волны и волн геометрической оптики:

$$u(r, z) = w_1(r, z) + \sum_{m=1}^{N} u_m(r, z) + O\left(\frac{1}{\sqrt{kL}}\right), \tag{16}$$

где интерференционная волна

$$w_1(r, z) = \frac{k^{3/4} \exp(i\tau^2/4 - i\pi/4)}{(2\pi)^{3/2}(r_N)^{3/4}} D\sqrt{\frac{Lp_1}{b}} \times$$
$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[i\left(\frac{y^4}{4} - \frac{\tau y^2}{2} + 2Z_{N+1}\, y \sqrt[4]{akL^2/b^2}\right)\right] dy. \tag{17}$$

Здесь $\tau = p_1\sqrt{ka/r_N}\,(r - r_N)/4b$ — растянутая координата.

Используя асимптотику интеграла Пирси (17), можно показать, что вдали от особой дальности при $r<r_N$ $w_1(r, z) = w(r, z) + O(1/\sqrt{kL})$, а при $r>r_N$ $w_1(r, z) = w(r, z) + u_{N+1}(r, z) + O(1/\sqrt{kL})$ и, следовательно, функция $w_1(r, z)$ описывает процесс отщепления от осевой волны волны геометрической оптики.

Метод перевала можно применять, когда $d^2\Phi/dx^2 \gg 1$, где $\Phi(x)$ — показатель экспоненты в интеграле (12). Отсюда находим область применимости формул (13)—(17) $r \ll kL^2$. На этих же расстояниях справедливы асимптотические формулы (2), (3). Заметим, что при $r = O(kL^2)$, как было указано выше, исчезает различие между амплитудами поля вдали и вблизи от каустики.

Таким образом, решение эталонной задачи позволило найти главный член асимптотики волнового поля для достаточно произвольной зависимости показателя преломления. Волновое поле представлено в виде суммы осевой волны и волн геометрической оптики (7), (8), (13), (14), причем в зависимости от того, является ли волновод сильным или слабым, число волн геометрической оптики конечно или бесконечно. Процесс отщепления или поглощения осевой волной волны геометрической оптики описывается интегралом Пирси (10), (11), (16), (17).

ЛИТЕРАТУРА

1. Грикуров В. Э. // Изв. вузов. Радиофизика. 1980. Т. 23. № 9. С. 1038.
2. Крюковский А. С., Лукин Д. С., Палкин Е. А. // Изв. вузов. Радиофизика. 1986. Т. 29. № 1. С. 79.
3. Бабич В. М., Молотков И. А., Попов М. М. Препринт ИРЭ АН СССР № 24 (396). М., 1984.
4. Ludwig D. // J. Math. Phys. 1970. V. 11. № 5. P. 1617.
5. Булдырев В. С. // Труды МИАН. 1971. Т. 115. С. 78.
6. Филиппов В. Б. В кн.: Интерференционные волны в слоистых средах. I. (Зап. науч. семин. ЛОМИ. Т. 99). — Л.: Наука. 1980. С. 146.
7. Попов М. М. В кн.: Математические вопросы теории распространения волн. II (Зап. науч. семин. ЛОМИ. Т. 104). — Л.: Наука. 1986. С. 195.
8. Качалов А. П., Попов М. М. // ДАН СССР. 1981. Т. 258. № 5. С. 1097.
9. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. — М.: Наука. 1973. — 343 с.
10. Славянов С. Ю. // Диф. уравн. 1969. Т. 5. № 2. С. 314.
11. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. — М.: Наука. 1967. Т. 3. — 300 с.
12. Булдырев В. С., Ланин А. И., Янсон З. А. В кн.: Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. — Л.: Наука. 1974. Т. 14. С. 84.

Ленинградский технологический институт
холодильной промышленности

Поступила в редакцию
11 марта 1988 г.