ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том 32, № 12 РАДИОФИЗИКА 1989

УДК 537.86:519.22

СТАТИСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ЗАДАЧАХ ЗОНДИРОВАНИЯ

А. В. Иляхинский, Ю. С. Середа

Рассмотрено применение непрерывных распределений в качестве статистических моделей в задачах зондирования. Показано, что распределение Дирихле представляет собой наиболее реалистичную модель при решении этих задач.

Известно, что решение обратных задач в приближении однократного рассеяния представляет собой обращение наблюдаемого спектра (отражения или пропускания) и получение на основе этого обращения параметров априори выбранной статистической модели. При этом часто не принимают во внимание, что задачи такого рода, как правило, относятся к числу многопараметрических [1], а механизм, лежащий в основе статистической модели, должен отражать предполагаемый механизм процессов, протекающих в исследуемом объекте.

Предположим, что в качестве статистической модели выбрано бета-распределение, как это было сделано, например, в [2]. Известно, что бета-распределение представляет собой статистическую модель результата совместной реализации двух независимых и противоположных по смыслу процессов [3]. В простейшем случае его плотность равна

$$Be(x) = \frac{\Gamma(\alpha_2)}{\Gamma(v_1)\,\Gamma(v_2)}\, x^{v_1-1}(1-x)^{v_2-1}\,, \qquad 0\leqslant x\leqslant 1,\quad v_1>0,\quad v_2>0,\quad \alpha_2 = v_1+v_2, \tag{1}$$

а энтропия, согласно определению

$$H = -\int\limits_x \varphi(x)\,\log_a \varphi(x)\,dx\,, \tag{2}$$

составляет с точностью до основания логарифма

$$H_{Be} = \ln\frac{\Gamma(v_1)\Gamma(v_2)}{\Gamma(\alpha_2)} + (v_1-1)\,[\psi(\alpha_2)-\psi(v_1)] + (v_2-1)\,[\psi(\alpha_2)-\psi(v_2)], \tag{3}$$

где $\psi(x) = (d/dx)\ln\Gamma(x)$. В дальнейшем при вычислении (2) будем использовать натуральные логарифмы.

Энтропия (3) максимальна при $v_1=v_2$, а ее максимум достигает наибольшего значения при $v_1=v_2=1$ (частный случай (1) — равномерное распределение).

Однако гипотеза, лежащая в основе модели (1), содержит сильные упрощения, что приводит к ограничениям в применимости бета-распределения, которые легко пояснить на простых примерах. В частности, если v_1 — скорость образования зарядов одного знака (например, электронов), а v_2 — скорость появления зарядов другого знака — дырок (непоявления электронов), то не всегда в случае легированных примесями полупроводниковых материалов можно пренебречь вкладом собственной проводимости. Или, полагая, что v_1 — скорость образования капелек водного золя, а v_2 — скорость их исчезновения (образование пара), трудно учесть еще и факт образования кристалликов льда.

Другое ограничение, связанное с предположением о протекании только двух процессов в объекте, менее очевидно. Чтобы понять смысл этого ограничения, разделим (3) на две группы слагаемых, из которых одна зависит от параметров формы v_1 и v_2, имеющих смысл скоростей процессов, а вторая только от их суммы, т. е. α_2.

Первая группа

$$H_i = \ln \Gamma(v_1)\Gamma(v_2) - (v_1 - 1)\psi(v_1) - (v_2 - 1)\psi(v_2) \tag{4}$$

достигает максимума при $v_1 = v_2 = 1$ и имеет только положительные приращения ΔH_i при $v_1 \to 1$, $v_2 \to 1$, отвечая, таким образом, второму закону термодинамики. Поэтому (4) можно сопоставить с производством энтропии, представленным в терминах модели (1). Вторая группа

$$H_e = -\ln \Gamma(\alpha_2) + (\alpha_2 - 2)\psi(\alpha_2) \tag{5}$$

имеет минимум $H_e = 0$ при $\alpha_2 = 2$, включая частный случай $v_1 = v_2 = 1$, соответствующий максимумам H_{Be} и H_i. Поэтому (5) можно сопоставить с потоком энтропии, характеризующим обмен объекта энергией с внешней средой. Приняв это предположение, заметим, что, во-первых, при $H_e = 0$ объект представляет собой изолированную систему — случай некорректный для задач зондирования, где информация об объекте есть результат его взаимодействия с наблюдателем, и, во-вторых, существенно положительные значения потока энтропии H_e при любых $\alpha_2 \neq 2$ способствуют увеличению производства энтропии. Следовательно, модель (1) не отражает ситуаций, когда в объекте возможны процессы самоорганизации, ведущие, например, к образованию достаточно крупных капель воды или града. Поэтому модель (1) малопригодна для задач зондирования атмосферы.

Предположим теперь, что модель представляет собой отображение результата совместной реализации более чем двух независимых и противоположных по смыслу процессов. В этом случае нетрудно прийти к многомерному аналогу (1) — распределению Дирихле [4], определенному на $n-1=k$-мерном симплексе S_k с плотностью

$$D(x_1, \ldots, x_k) = \frac{\Gamma(\alpha_n)}{\prod\limits_{i=1}^{n} \Gamma(v_i)} \left(1 - \sum_{i=1}^{k} x_i\right)^{v_n - 1} \prod_{i=1}^{k} x_i^{v_i - 1}, \quad \alpha_n = \sum_{i=1}^{n} v_i, \tag{6}$$

где v_i — всегда положительные параметры формы распределения, имеющие смысл скоростей противоположно направленных процессов. Энтропия $D(x_1, \ldots, x_k)$ равна

$$H_D = \ln \frac{\prod\limits_{i=1}^{n} \Gamma(v_i)}{\Gamma(\alpha_n)} + \sum_{i=1}^{n} (v_i - 1)[\psi(\alpha_n) - \psi(v_i)]. \tag{7}$$

Как и в случае $Be(x)$, из (7) можно выделить

$$H_{iD} = \ln \prod_{i=1}^{n} \Gamma(v_i) - \sum_{i=1}^{n} (v_i - 1)\psi(v_i); \tag{8}$$

$$H_{eD} = -\ln \Gamma(\alpha_n) + (\alpha_n - n)\psi(\alpha_n), \tag{9}$$

которые в терминах модели (6) имеют смысл производства и потока энтропии. Уже при $n=3$ появляются существенные отличия, делающие $D(x_1, \ldots, x_k)$ более реалистичной, чем $Be(x)$, моделью. Важнейшие из них:

— модель отражает результат совместной реализации более двух процессов;

— даже при $v_1 = \ldots = v_n = 1$, что остается условием наибольшего значения максимума (7), максимума (8) и минимума (9), модель отображает неизолированную систему, поскольку $H_{eD} = -\ln(n-1)!$ при $\alpha_n = n$;

— модель может отображать систему, в которой поток энтропии способствует ее производству (при достаточно малых и достаточно больших значениях α_n), препятствует ее производству (при α_n достаточно близких к n), что в терминах модели (6) позволяет рассматривать $H_{eD} < 0$ как одно из условий самоорганизации, и, наконец, систему в изолированных состояниях, поскольку H_{eD} — непрерывная функция от α_n — дважды меняет знак при переходе от $\alpha_n \to 0$ к $\alpha_n \to \infty$ и, следовательно, дважды принимает нулевые значения.

Предположим теперь, что состояние исследуемого объекта зависит от большого числа процессов противоположного смысла, протекающих с одинаковыми скоростями ($v_1 = \ldots v_{\cdot} = v_e$). В этом случае можно показать, что при неограниченном росте числа процессов распределение Дирихле может быть приближенно заменено гамма-распределением с плотностью

$$\gamma(x) = \frac{x^{v_e-1}}{\Gamma(v_e)} \exp(-x), \quad x \geqslant 0, \quad v_e > 0 \tag{10}$$

и энтропией

$$H_\gamma = v_e + \ln\Gamma(v_e) - (v_e - 1)\psi(v_e). \tag{11}$$

Действительно, если $\alpha_n = nv_e$, то коэффициент асимметрии и показатель эксцесса распределения Дирихле равны

$$\beta_{3e} = \frac{m_3}{m_2^{3/2}} = \frac{2(n-2)(nv_e+1)^{1/2}}{(nv_e+2)(n-1)^{1/2}}; \tag{12}$$

$$\beta_{2e} = \frac{m_4}{m_2^2} = \frac{3}{2}\,\frac{nv_e+2}{nv_e+3}\,\beta_{3e}^2 + 3\,\frac{nv_e+1}{nv_e+3}, \tag{13}$$

где m_2, m_3, m_4 — второй, третий и четвертый центральные моменты (6). При неограниченном росте n из (13) следует

$$\beta_{2e} = \frac{3}{2}\,\beta_{3e}^2 + 3, \tag{14}$$

т. е. уравнение линии, на которой определено (10) в плоскости $\beta_3 0 \beta_2$.

Из сравнения (8) и (9), равных при $\alpha_n = nv_e$

$$H_{iD} = n[\ln\Gamma(v_e) - (v_e-1)\psi(v_e)]; \tag{15}$$

$$H_{eD} = -\ln\Gamma(nv_e) + n(v_e-1)\psi(v_e), \tag{16}$$

и (11) можно прийти к выводу о том, что (15) и (16) отражают процессы, протекающие в объекте, тогда как энтропия гамма-распределения (11) позволяет судить лишь о состоянии объекта исследования, представленного этой моделью. Здесь уместно вспомнить восходящее к [5] определение энтропии как универсальной функции состояния. Следовательно, гамма-распределение, которое находит широкое применение в задачах зондирования (см., например, [6]), представляет собой лишь в той степени удовлетворительную модель наблюдения состояния объекта, в какой возможна реализация неограниченно возрастающего числа процессов, протекающих с одинаковыми скоростями. Отметим, что (10) при $v_e = 1$ переходит в экспоненциальное распределение — общеизвестную модель наблюдения (но не механизма) радиоактивного распада.

Перечисленное позволяет сделать вывод о возможности эффективного применения семейства распределений Дирихле в качестве статистических моделей в задачах зондирования и диагностики.

ЛИТЕРАТУРА

1. Розенберг Г. В. // Изв. АН СССР. Сер. ФАО. 1976. Т. 12. № 11. С. 1159.
2. Перельман А. Я., Шифрин К. С. // Опт. и спектр. 1969. Т. 27. Вып. I. С. 137.
3. Середа Ю. С. // ЖТФ. 1982. Т. 52. № 9. С. 1725.
4. Середа Ю. С. В кн.: Всесоюзное совещание по самоорганизации в физических, химических и биологических системах «Синергетика-86».—Кишинев: Штиинца, 1986. С. 25.
5. Вернадский В. И. // Изв. АН СССР. Сер. VIII. 1933. С. 395.
6. Кармов Х. Н. // Изв. вузов. Радиофизика. 1986. Т. 29. № 10. С. 1156.

Научно-исследовательский институт механики при Горьковском университете

Поступила в редакцию 4 февраля 1988 г.

STATISTICAL MODELS IN SOUNDING PROBLEMS

A. V. Ilyakhinskij, Yu. S. Sereda

Utilization of continuous distributions as statistical models in sounding problems is considered. Dirichlet distribution is shown to be the most realistic moael when solving these problems.

ПИСЬМО В РЕДАКЦИЮ «РАДИОФИЗИКИ»

(Окончание)

сового коэффициента на величину $\Delta\varphi_{дин} = \operatorname{arctg} \dot{\varphi}\tau_э \simeq \dot{\varphi}\tau_э$ и уменьшении его модуля в соответствии с множителем $(\sqrt{1 + (\dot{\varphi}\tau_э)^2})^{-1}$. Следовательно, в данном случае имеются две независимые составляющие динамической ошибки измерения весового коэффициента, каждая из которых приводит к снижению эффективности автокомпенсатора. Соответственно коэффициент подавления помехи по мощности с учетом динамических ошибок описывается выражением

$$K_п = \frac{|U_0|^2}{|U_0 - U_к W|^2} = \frac{1 + (\dot{\varphi}\tau_э)^2}{(G^2)^{-1} + (\dot{\varphi}\tau_э)^2} \tag{5}$$

и сложным образом зависит от величины G и τ. В предположении $G \gg \dot{\varphi}\tau$ или $\dot{\varphi}\tau_э \ll 1$, использованном авторами [1], получим

$$1/K_п = 1/K_{п0} + 1/K_{п1}, \tag{6}$$

где $K_{п0} = G^2$ — коэффициент подавления помехи по мощности в статическом режиме, $K_{п1} = (\dot{\varphi}^2\tau_э^2)^{-1}$ — коэффициент подавления помехи по мощности, обусловленный динамической ошибкой измерения весового коэффициента по скорости.

Таким образом, коэффициент подавления помехи по мощности является средним геометрическим величин $K_{п0}$ и $K_{п1}$ и зависит от параметров G и $\tau_э$ (или τ). Сказанное не отменяет утверждения авторов [1], а дополняет его и позволяет проследить механизм влияния динамических свойств автокомпенсатора на его эффективность.

И. Н. Давыденко

ЛИТЕРАТУРА

1. Содин Л. Г., Мазманишвили А. С. // Изв. вузов. Радиофизика. 1989. Т. 32. № 2. С. 199.