

УДК 517.9+532.59

МЕТОД СУММИРОВАНИЯ ГАУССОВЫХ ПУЧКОВ

(Обзор)

В. М. Бабич, М. М. Попов

СОДЕРЖАНИЕ

I. Введение

- 1.1. Метод Френеля
- 1.2. Равномерные асимптотические разложения
- 1.3. Метод канонического оператора В. П. Маслова
- 1.4. Интерференционный интеграл
- 1.5. Метод суммирования гауссовых пучков

II. Суммирование гауссовых пучков в стационарных задачах

- II.1. Что такое гауссовы пучки?
- II.2. Интеграл по гауссовым пучкам
- II.3. Что показывают численные эксперименты?
- II.4. О роли свободных параметров гауссовых пучков

III. Гауссовые пучки в нестационарных задачах

- III.1. Задачи о распространении волновых пакетов и пространственно-временной лучевой метод
- III.2. Пространственно-временные гауссовые пучки
- III.3. Суммирование пространственно-временных гауссовых пучков
- III.4. Результаты численных экспериментов

IV. Заключение. О границах применимости МСГП

I. ВВЕДЕНИЕ

Цель настоящей статьи — дать по возможности полный обзор работ, посвященных недавно предложенному и с каждым годом находящему все более широкое применение методу суммирования гауссовых пучков (МСГП). МСГП — это метод численного решения задач теории дифракции коротких волн. В нем нет необходимости, если поле лучей рассматриваемой задачи нигде не теряет регулярности. Тогда достаточно обычного лучевого метода. В реальных задачах нарушения регулярности, т. е. каустики, практически всегда имеют место. Напомним, что каустикой называется огибающая поля лучей. Огибающая может иметь особые точки или в каком-либо смысле вырождаться. Геометрия каустик — это область скорее математики, чем физики, причем область уникальная тем, что за три века своего существования не потеряла актуальности. В XVII веке зажигательными* линиями интересовались Я. Бернулли, Лопиталь, Чирнгауз. К работам Х. Гюйгенса восходит понятие эволюты и эвольвенты. Если эвольвенту отождествить с волновым фронтом, то эволюта является каустикой, соответствующей этому волновому фронту.

Для расчета волновых полей в окрестности каустик предложен ряд методов. Первый по времени восходит к классическим работам Х. Гюйгенса и Френеля. В последние десятилетия предложены методы канонического оператора Маслова (КОМ), интерференционного интеграла, равномерных разложений, МСГП.

* По старой русской терминологии каустические линии и поверхности назывались зажигательными линиями и поверхностями.

В статье излагаются основные идеи этих методов. Особенно подробно рассматривается МСГП. Большое внимание уделяется полученным с помощью МСГП численным результатам. Обсуждаются приоритетные вопросы.

I.1. Метод Френеля. Теоретически изучать волновое поле стало возможным лишь после классических работ Френеля, который, основываясь на известном построении Х. Гюйгенса, предложил весьма широко применимый способ аналитического описания высокочастотного волнового поля. Изложим коротко основные идеи метода.

Пусть в какой-то фиксированный момент времени волновой фронт совпадает с поверхностью S_0 . Чтобы найти волновой фронт через t единиц времени, следует построить «элементарные» центральные волновые фронты с центрами на S_0 , соответствующие данному времени t . Тогда положение волнового фронта S_t в момент t есть огибающая указанных центральных волновых фронтов. Таков классический принцип Гюйгена (1678 г.).

Френелю [1] принадлежит замечательная идея рассчитывать высокочастотные волновые поля, полагая каждую элементарную волну с центром на S_0 имеющей классическое выражение $(C/r) \exp[ikr]$, где k — волновое число, r — расстояние, C — неопределенный множитель. Последний находится из тех соображений, чтобы наложение элементарных волн приводило, как мы сказали бы теперь, к главному члену лучевого разложения, см. [2], гл. 7. Так возникает представление для волнового поля в виде интеграла $I = \iint_{(S_0)} \frac{C(\alpha_1, \alpha_2)}{r} \exp[ikr] d\alpha_1 d\alpha_2$, где

α_1, α_2 — некоторые параметры на поверхности S_0 .

Пусть теперь в процессе своего распространения поле лучей теряет регулярность и возникнет каустика. Результат суммирования элементарных волн — интеграл I — все равно продолжает описывать волновое поле. И скалярные, и векторные, вообще говоря, анизотропные волновые поля как в окрестности регулярных точек каустики, так и вблизи любых ее сингулярностей можно описать, пользуясь представлением Френеля. Оно применимо не только в однородных, но и в неоднородных средах.

Разумеется, намеченные здесь построения не совпадают в точности с построениями Френеля, но являются их модернизацией. Во времена Френеля не был еще известен метод стационарной фазы. Он будет предложен приблизительно через 70 лет после публикации главных работ Френеля по теоретической оптике. Однако Френель преодолел эту трудность. Его доказательство прямолинейности распространения света, основанное на понятии «зон Френеля», — это первоначальный, еще несовершенный «физический» аналог метода стационарной фазы.

Метод Френеля излагался в учебниках физиками и для физиков, причем достаточно легко и с точки зрения строгой математики. По-видимому, этим и объясняется, что достаточно сложные функции, через которые аналитически выражаются волновые поля в окрестности каустик, были описаны не на базе метода Френеля. Только окрестность регулярной точки каустики еще в прошлом веке была в первом приближении исследована Эйри с помощью функции $Ai(z)$, носящей его имя, [2].

I.2. Равномерные асимптотические разложения. Функция Эйри* $v(t)$ вошла в физику и математику еще в прошлом веке именно в связи с необходимостью описать волновое поле вблизи регулярного участка каустики. Всякий вариант такого описания так или иначе связан

* Мы пользуемся обозначениями Фока. Подробное изложение теории и свойств функций Эйри можно найти, например, в [3, 4]. Функция $v(t)$ связана с $Ai(t)$ соотношением $Ai(t) = \pi^{-1/2} v(t)$.

с функцией Эйри. По-видимому, самый совершенный из них был предложен в 1964 году Кравцовым [5]: поле ищется в виде

$$u = e^{i\omega t} [Av(-\omega^{2/3}m) + i\omega^{-1/3}Bv'(-\omega^{2/3}m)]. \quad (I.2.1)$$

Здесь частота ω — большой параметр, $l(x, y, z)$ и $m(x, y, z)$ — функции, подлежащие определению, A и B — ряды по обратным степеням ω с коэффициентами, зависящими от x, y, z и тоже подлежащими определению. Подставляя выражение (I.2.1) (или по современной терминологии «анзатц») в исходное уравнение, описывающее волновой процесс,

мы получаем, что $l \pm \frac{2}{3}m^{3/2} = \tau_{\pm}$ будут эйконалами (τ_- соответствует

лучам, идущим к каустике, а τ_+ — идущим от каустики). Коэффициенты рядов A и B находятся из возникающей при этом регуррентной последовательности уравнений переноса. Анзатц Кравцова (I.2.1) пригоден для описания в окрестности каустики как скалярных, так и векторных волновых полей.

В 1966 году американский математик Людвиг переоткрыл анзатц Кравцова [6], где можно найти и формулу (I.2.1) и ее обобщения. Такой подход к описанию волновых полей на каустиках естественно называть методом равномерных асимптотических разложений, так как, например, формула (I.2.1) описывает поле как вблизи каустики, так и вдали от нее (в последнем случае можно функцию Эйри заменить асимптотикой и перейти к чисто лучевому разложению).

В дальнейшем этот метод развивался как в теоретическом плане, так и в приложениях для расчета волновых полей в конкретных задачах. Здесь мы укажем на работы Коннор с соавторами. В частности, в работе [7] помимо результатов по расчетам специальных функций, описывающих каустические особенности типа «ласточкин хвост», имеется историческая справка и обширная библиография, касающаяся обсуждаемого метода. Метод равномерных асимптотических разложений развивался также в работах [8, 9], а в общей форме его изложение содержится в статье [10].

Применение метода существенно опирается на априорные знания о поведении лучей. Действительно, нужно знать и положение каустик в пространстве, и их геометрическую структуру. Последняя как раз и определяет конкретный вид специальной функции, входящей в анзатц вида (I.2.1). Это представляется серьезным препятствием для реализации метода, когда эти сведения не удается получить аналитически и придется устанавливать их в процессе численного счета. Кроме того, расчет самой специальной функции — это отдельный, специфический алгоритм.

I.3. Метод канонического оператора В. П. Маслова. Этот метод в настоящее время столь широко известен, что, по-видимому, нет необходимости ни излагать его идеи, ни приводить библиографию, ему посвященную. Мы укажем на первоначальное (и довольно трудное) изложение метода канонического оператора (КОМ) в [11]. Из более поздних публикаций можно рекомендовать монографии [12, 13].

В настоящее время разработана и далеко продвинута численная реализация КОМ [14, 15].

Трудности применения КОМ к конкретным задачам связаны как с тем, что волновое поле описывается интегралом от быстро осциллирующих функций, так и с тем, что в зависимости от положения точки наблюдения волновое поле выражается разными формулами. Необходимость разбивать волновое поле на «карты» усложняет алгоритмы расчета.

Следует подчеркнуть, что КОМ позволяет получать специальные функции, называемые сейчас функциями волновых катастроф, которые описывают волновые поля вблизи всевозможных каустик. Так, КОМ приводит и к функции Эйри $v(t)$, описывающей поле в окрестности простой каустики [14].

I.4. Интерференционный интеграл. Идея получения новых и важных асимптотических решений с помощью суммирования каких-либо «элементарных» решений, по существу восходящая к классическим работам Френеля, оказалась весьма плодотворной. Исследования фундаментальных решений гиперболических уравнений с переменными коэффициентами, выполненные рядом математиков в 50—60 годы, основываются на суммировании лучевых решений.

В 1967 году появилась работа Людвига [16], посвященная построению коротковолновой асимптотики задачи дифракции волны на гладком выпуклом препятствии. В ней считается, что волновое поле описывается уравнением Гельмгольца и на границе тела выполняется условие Дирихле. С помощью суммирования каустических решений (типа (I.2.1)) автору удалось построить асимптотику поля, пригодную как в зоне полутени, так и в зоне тени. Интересно, что методика этой работы не распространяется ни на краевое условие Неймана, ни на векторные задачи.

В 1972 году Орлов предложил описывать высокочастотные волновые поля в плавно неоднородных средах в виде интеграла по лучевым [17], а затем [18] и по каустическим решениям вида (I.2.1). Это представление поля впоследствии получило название интерференционного интеграла. Заметим, что используемые здесь лучевые и каустические решения не связаны с тем полем лучей, которое порождается рассматриваемой конкретной задачей. Интерференционный интеграл пригоден для описания и расчетов поля в окрестности любых каустик, которые могут образовывать порождаемые данной задачей лучи. Развитию и применению интерференционного интеграла для расчета конкретных задач посвящены работы [19, 20]. Обзор результатов и библиография по методу интерференционного интеграла содержится в [21]*.

Оценивая этот метод с точки зрения использования его для расчетов на ЭВМ, следует подчеркнуть, что он также дает представление для асимптотики волнового поля в виде интеграла от осциллирующих функций. В трехмерных задачах он требует двухпараметрического семейства лучевых или каустических решений. Если исходное уравнение содержит две пространственные переменные, то нужно однопараметрическое семейство. В тех случаях, когда уравнение эйконала может быть решено разделением переменных, указанные решения описываются явными, относительно простыми формулами. Роль параметров играют постоянные разделения. Нам представляется, что интерференционный интеграл будет эффективным для расчета волновых полей именно в этих случаях (конкретные его применения в упомянутых выше работах относятся как раз к таким случаям). Объем вычислительной работы существенно возрастет, если нельзя будет соответствующее семейство решений построить в явном, аналитическом виде.

I.5. Метод суммирования гауссовых пучков. Как уже отмечалось выше, МСГП посвящено основное содержание обзора, поэтому в этом разделе мы останавливаемся лишь на самых общих чертах метода. Более подробно о МСГП см. следующую главу.

МСГП имеет то общее с методом Френеля и интерференционным интегралом, что волновое поле и здесь представляется в виде наложения некоторых «элементарных» решений. На этот раз этими «элементарными» решениями являются гауссовые пучки. Последние представляют собой приближенные (асимптотические при $\omega \rightarrow \infty$) решения исходных уравнений в частных производных, обладающие следующими свойствами. Во-первых, гауссов пучок оказывается сосредоточенным в окрестности одного изолированного луча, который называется центральным или опорным. Это значит, что при больших ω он будет экспоненциально мал всюду, кроме малой трубчатой окрестности опорного луча.

* См. также более поздние зарубежные работы [86, 87], в которых развивается аналогичная идея описания высокочастотной асимптотики волнового поля в виде осциллирующего интеграла (интеграла по решениям лучевого типа).

Во-вторых, гауссов пучок не имеет сингулярностей, сколько бы мы ни продолжали его вдоль центрального луча независимо от того, попадает ли этот луч на каустику или нет. Именно это свойство является решающим.

В случае нестационарных задач, о которых пойдет речь в части III обзора, возникают пространственно-временные гауссовые пучки с аналогичными свойствами. Вместо частоты ω там фигурирует другой параметр. МСГП дает представление волнового поля в виде единого интеграла. Его вычисление проводится независимо от того, находится ли точка наблюдения в области регулярности поля лучей или попадает в окрестность каустики, а также от того, какова сингулярность на этой каустике (или какова ее геометрическая структура).

Облегчает вычисление то обстоятельство, что входящие в подинтегральное выражение гауссовые пучки быстро убывают при удалении от опорного луча.

Трудность применения МСГП заключается прежде всего в том, что априори неясно, как выделить в источнике те лучи, что попадут в окрестность точки наблюдения, и какое количество гауссовых пучков нужно просуммировать для получения нужной точности расчетов. Кроме того, вопрос о границах применимости МСГП тоже достаточно сложен. Здесь большое влияние может оказывать выбор некоторых параметров гауссовых пучков, определяющих, например, ширину этих пучков.

В заключение раздела заметим, что представление асимптотики волнового поля в виде интеграла по гауссовым пучкам впервые было предложено в 1973 г. в работе Бабича и Панкратовой [22], посвященной исследованию разрывов функции Грина для волнового уравнения.

Метод суммирования гауссовых пучков как метод расчета волновых полей в высокочастотном приближении впервые был предложен в 1981 г. в работе Попова [23].

II. СУММИРОВАНИЕ ГАУССОВЫХ ПУЧКОВ В СТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧАХ

II.1. Что такое гауссов пучок? Гауссовые пучки (ГП) — это важный класс асимптотических решений уравнений, описывающих волновые процессы. ГП существенно отличны от нуля лишь в малой окрестности фиксированного (опорного) луча. Интерес к такого рода асимптотическим решениям возник в 60-е годы в связи с созданием лазеров. Строились ГП на основе техники «параболического» уравнения, см. [24, 4] и указанную там литературу.

Другой подход к построению ГП и некоторых их далеко идущих обобщений принадлежит Маслову [25] и основан на весьма непростом понятии комплексного лагранжева многообразия.

Нам представляется, что наиболее простой и естественный путь их построения — это использование лучевого метода с комплексным эйконалом, предложенный в работах [26, 27]. Он допускает обобщения по существу на случай любого волнового процесса, для которого в том или ином смысле есть лучевые решения. Наметим коротко построение ГП на примере уравнения Гельмгольца $(\Delta + \omega^2 C^{-2})u = 0$, где частота ω считается большим параметром, а скорость C — достаточно гладкой функцией. Как известно, лучевое разложение в данном случае имеет вид

$$u = \exp(i\omega\tau) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{u_j}{(-i\omega)^{j+\alpha}}, \quad \alpha = \text{const.} \quad (\text{II.1.1})$$

Функции τ и u_j должны удовлетворять, соответственно, уравнениям эйконала и переноса:

$$(\nabla\tau)^2 = C^{-2}, \quad 2(\nabla\tau, \nabla u_j) + u_j \Delta\tau = \Delta u_{j-1}, \quad u_{-1} \equiv 0. \quad (\text{II.1.2})$$

Пусть l — фиксированный луч, в окрестности которого будет построен ГП. Пусть эйконал τ имеет вблизи l неотрицательную мнимую часть

$\operatorname{Im} \tau \geqslant 0$, причем равенство осуществляется только на l . Тогда частные суммы ряда (II.1.1) при $\omega \rightarrow \infty$ будут экспоненциально малы всюду, кроме малой окрестности l . Пусть уравнение l задано в векторном виде $r = r_0(s)$, где $r = (x_1, x_2, x_3)$ — радиус-вектор, s — длина дуги l , отсчитываемая от некоторой точки на l . Дальнейшие построения удобно проводить в некоторой специальной ортогональной системе координат s, q_1, q_2 , предложенной в [28]. Вводится она формулой

$$r = r_0(s) + q_1 e_1(s) + q_2 e_2(s), \quad (\text{II.1.3})$$

где $e_1(s), e_2(s)$ — взаимно ортогональные единичные векторы, лежащие в ортогональной к l плоскости (при каждом s). С изменением s они вращаются определенным образом относительно главной нормали и бинормали луча, подробности см. в [4]. Будем искать τ и u_j в виде рядов

$$\tau = \tau_0 + \tau_1 + \tau_2 + \dots, \quad u_j = u_{j0} + u_{j1} + \dots, \quad (\text{II.1.4})$$

где τ_k, u_{jk} — однородные степени k полиномы по q_1, q_2 с коэффициентами, зависящими от s . Для того чтобы для частных сумм первого из рядов (II.1.4) выполнялось соотношение $\operatorname{Im} \tau \geqslant 0$ (равенство имеет место только на l , т. е. при $q_1 = q_2 = 0$), достаточно, чтобы коэффициенты τ_0, τ_1 были вещественны, а полином τ_2 имел бы вид $\tau_2 =$

$$-\frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^2 \Gamma_{jk}(s) q_j q_k \equiv \frac{1}{2} (\Gamma(s) q, q), \quad \text{где } \Gamma(s) \text{ — симметричная матрица}$$

2-го порядка с положительно определенной мнимой частью. Подставляя ряды (II.1.4) в уравнения (II.1.2) и приравнивая члены одинаковой степени по q_1, q_2 в обеих частях равенств, придем к рекуррентной системе уравнений для отыскания коэффициентов полиномов τ_k и u_{jk} . В некотором смысле ключевым из них является уравнение для Γ — матричное уравнение Риккати. Последнее сводится к системе линейных дифференциальных уравнений, имеющей отчетливый геометрооптический смысл: она эквивалентна системе уравнений, описывающей в линейном приближении лучи, близкие к опорному. Ее иногда называют системой уравнений в вариациях. Элементы искомой матрицы Γ удается выразить через решения этой системы. Когда Γ построена, уравнения для коэффициентов полиномов $\tau_k, k > 2$, и $u_{jr}, r > 0, j \geqslant 0$, решаются в квадратурах по s . В результате этой процедуры мы получаем ГП — искомое асимптотическое решение уравнения Гельмгольца.

Весьма важно, что ГП не имеет сингулярностей, сколько бы его не продолжать вдоль опорного луча.

В связи с задачами об открытых резонаторах, используемых для лазеров, ГП были построены в [29] для системы уравнений Максвелла. Тогда же были построены ГП в изотропной теории упругости. Здесь имеется большее разнообразие таких решений, чем в скалярных задачах. Построены ГП для продольных и поперечных волн в [30], а в [31, 32] — для поверхностных волн Лява и Рэлея. В последних случаях опорный луч лежит на поверхности и гауссов пучок сосредоточен по одной координате, ортогональной к лучу и изменяющейся на этой поверхности. Позднее были построены ГП для эллиптических систем уравнений довольно общего вида [27], охватывающих, в частности, уравнения как изотропной, так и анизотропной теории упругости.

В последнее время к ГП вновь возродился интерес. Появились статьи, переизлагающие результаты значительно более ранней работы [30], например [33]. В статье [34] ГП для поверхностных волн, построенные ранее в [31, 32], трансформируются к тому случаю, когда свободная от напряжений поверхность и сама неоднородная среда являются медленно меняющимися.

В конце 60-х — начале 70-х годов развивался другой подход к ГП, использующий комплексные лучи и идею «комплексного точечного источника». Например, в случае однородной среды аналитическое выражение

жение для ГП можно получить, используя фундаментальное решение уравнения Гельмгольца: $\text{const } R^{-1} \exp(i k R)$, где

$$R = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}.$$

Если «утопить» источник с координатами x_0, y_0, z_0 в комплексное пространство, положив $y_0=z_0=0$, а $x_0=i\alpha^2$, и, считая, что $|x-x_0|^2 \gg y^2+z^2$, разложить R в ряд по y и z , то получим ГП, распространяющийся вдоль оси x . Среди работ на эту тему мы укажем следующие [35–38], см. также библиографию в [38]*.

ГП можно отражать и преломлять. В скалярном случае по ГП, упавшему под некасательным углом на отражающую поверхность, можно найти отраженный ГП, см. [28, 4]. При этом опорный луч $l_{\text{отр}}$ строится по обычному закону геометрической оптики. Для эйконала $\tau^{\text{отр}}$ и $u_{jk}^{\text{отр}}$, соответствующих $l_{\text{отр}}$, следует написать выражения вида (II.1.4) и потребовать, чтобы выполнялись уравнения эйконала, переноса и краевые условия. Причем последние должны выполняться в окрестности точки падения. Из этих требований отраженный ГП определяется однозначно. В связи с лазерами отражение ГП для электромагнитных волн рассмотрено в [29].

Преломление рассматривается аналогично. Решение этих задач в теории упругости изложено в [39]. В этом случае необходимо, чтобы ни один из отраженных и преломленных по законам геометрической оптики опорных лучей не был касателен к границе. Тогда задача об отражении и преломлении не сталкивается с принципиальными трудностями.

Если же какой-либо из лучей касается границы, то связанное с ним волновое поле уже не может быть описано одним лишь гауссовым пучком, см. [40, 85].

II.2. Интеграл по гауссовым пучкам. Рассмотрим общую схему представления волнового поля в виде интеграла по ГП.

Пусть на некоторой достаточно гладкой поверхности S в трехмерном пространстве задано волновое поле, имеющее лучевую структуру. Поверхность S считаем заданной в виде $\mathbf{r}=\mathbf{r}(\gamma_1, \gamma_2)$, где γ_1, γ_2 — некоторые параметры, задающие точку на S . Выпустим из каждой точки S по некасательному направлению луч $l_{\gamma_1 \gamma_2}$ так, чтобы лучи образовывали лучевое поле, соответствующее некоторому эйконалу. Затем каждый такой луч $l_{\gamma_1 \gamma_2}$ возьмем в качестве опорного для некоторого ГП: $u_{\gamma_1 \gamma_2}(s, q_1, q_2; \omega)**$. Пусть далее $\Phi(\gamma_1, \gamma_2; \omega)$ — некоторая произвольная функция лучевых параметров γ_1, γ_2 , которую можно представить в виде разложения

$$\Phi = \omega^{-\beta} \left[\Phi_0(\gamma_1, \gamma_2) + \frac{1}{-i\omega} \Phi_1(\gamma_1, \gamma_2) + \dots \right], \quad \beta \geq 0. \quad (\text{II.2.1})$$

Рассмотрим интеграл по ГП с весом Φ :

$$U(M; \omega) = \iint_S d\gamma_1 d\gamma_2 \Phi(\gamma_1, \gamma_2; \omega) u_{\gamma_1 \gamma_2}(s, q_1, q_2; \omega), \quad (\text{II.2.2})$$

где интегрирование идет по поверхности S . В силу линейности исходных уравнений суперпозиция ГП — интеграл (II.2.2) — также является приближенным решением этих уравнений. Остается теперь подобрать вес Φ или, другими словами, начальные амплитуды ГП так, чтобы по-

* Отметим, что ранее в работе [38] для однородной среды (двумерный случай) получена формула для ГП на основе концепции комплексных лучей и из точного решения найдено выражение для такого пучка в дальней зоне (зона Фраунгофера).

** Координаты s, q_1, q_2 регулярны лишь в некоторой трубчатой окрестности опорного луча, поэтому и $u_{\gamma_1 \gamma_2}$ можно рассматривать в этой окрестности. За пределы ее $u_{\gamma_1 \gamma_2}$ нужно продолжить нулем с помощью срезающей функции. В силу сосредоточенности ГП эту срезку можно всегда осуществить в той области, где пучок будет достаточно мал. В результате можно считать, что $u_{\gamma_1 \gamma_2}$ определена во всем пространстве. Подробнее см. [22].

лучить искомое решение. Осуществляется это следующим образом. В некоторой окрестности S поле лучей остается регулярным, т. е. через каждую точку M проходит один и только один луч, и там волновое поле описывается известным лучевым разложением. С другой стороны, вычисляя в этой же окрестности асимптотику (II.2.2) при $\omega \rightarrow \infty$, также приходим к лучевому разложению. Из требования совпадения этих лучевых разложений могут быть найдены функции $\Phi_j(\gamma_1, \gamma_2)$ в (II.2.1). Тот факт, что асимптотика интеграла (II.2.2) при $\omega \rightarrow \infty$ в области регулярности поля лучей имеет лучевой вид, установлен в работе [22]. Техника получения этой асимптотики представляет собой аналог метода перевала. Критической (перевальной) точкой являются значения параметров $\gamma_j = \gamma_{j0}$, $j=1, 2$, которым соответствует луч, проходящий через точку наблюдения.

Интеграл по ГП (II.2.2) имеет то замечательное свойство, что какие бы каустики ни образовывали лучи, выпущенные с поверхности S , подынтегральное выражение в нем не будет иметь сингулярностей. Это потому, что каждый в отдельности ГП не имеет сингулярностей независимо от того, попадает ли опорный луч на каустику или нет.

Изложенная схема построения интеграла по ГП (II.2.2) применима, разумеется, для точечных источников. При этом возникает центральное поле лучей, т. е. множество лучей, выходящих из источника под всеми возможными углами. В качестве параметров γ_1, γ_2 можно взять углы θ, φ сферической системы координат. Подробный вывод формулы для первого члена $\Phi_0(\gamma_1, \gamma_2)$ весовой функции (II.2.1) для этого случая приведен в [23]. Он легко обобщается на векторные задачи теории упругости [39], а также на другие случаи [41].

Поскольку ГП можно отражать (преломлять), то интеграл вида (II.2.2) применим и в тех случаях, когда в среде имеются отражающие границы, а также границы раздела сред с разными характеристиками. Изменения принципиального характера здесь могут возникнуть в том случае, когда лучи касаются границы или последняя теряет гладкость (к интегралу (II.2.2) нужно добавлять поверхностные, краевые волны и т. д.). В статьях [42, 43] МСГП применялся к задаче дифракции плоской волны на полуплоскости. Результаты сравнивались с точным решением. Оказывается, что если ошибкой порядка 5–10% можно пренебречь в расчетах, то МСГП дает удовлетворительное описание поля и в окрестности границ свет—тень без привлечения интегралов Френеля.

Собственно МСГП состоит в вычислении интеграла вида (II.2.2). Алгоритм расчета волнового поля, к которому приводит метод, распадается на следующие три этапа: 1) Строится веер лучей, покрывающих некоторую окрестность точки наблюдения M , причем нет необходимости находить луч, попадающий в M . Одновременно с этим находятся локальные координаты s, q_1, q_2 точки M , связанные с каждым из лучей веера. 2) Для каждого из лучей веера как опорного луча строится гауссов пучок. Это требует интегрирования (как правило, численного) уравнений в вариациях, см. разд. II.1, вместе с решением уравнений Эйлера для лучей. 3) С помощью той или иной квадратурной формулы суммируются по всем лучам веера вклады ГП в M взятых с некоторой начальной амплитудой, определяемой источником поля. Здесь проявляется одно существенное обстоятельство: ГП содержит некоторые произвольные параметры, например значение комплексной матрицы Γ при $s=0$, т. е. в источнике. Выбор этих параметров в конкретных расчетах может оказывать влияние на результаты и вызывает в настоящее время оживленную дискуссию (ниже мы обсудим этот вопрос подробнее).

В заключение подчеркнем, что изложенный алгоритм не зависит от наличия или отсутствия каустик и не связан с расчетом каких-либо специальных функций. Это окажется особенно существенно в тех исследованиях, где в результате многократного решения прямой задачи осуществляется выбор модели среды или подбор ее параметров, поскольку

при изменении параметров среды или ее модели могут меняться как положения каустик, так и их структуры.

II.3. Что показывают численные эксперименты? Первые результаты расчетов поля с помощью МСГП были анонсированы на конференции в Будапеште в 1980 г. [44], подробное их изложение содержится в [45]. Рассматривались наиболее простые ситуации: волновое поле описывается уравнением Гельмгольца и возбуждается точечным источником (двумерная задача). Возникающее поле лучей было либо регулярным (однородная среда), либо образовывало простую каустику (однородный слой на полупространстве с линейно растущей скоростью).

Затем в работе 1981 г. [46] (см. также [47]), рассматривался волновод, образованный минимумом скорости. Волновое поле также описывалось уравнением Гельмгольца (двумерный случай) и возбуждалось точечным источником, помещенным на оси волновода. Лучи образовывали последовательность каустик с точками возврата, расположенными также на оси волновода. Волновое поле рассчитывалось в окрестности ветви простой каустики и в окрестности точки возврата каустики.

В 1981 году на VIII Всесоюзном симпозиуме по дифракции и распространению волн был представлен доклад [48], в котором рассчитывалось поле в окрестности простой каустики. Авторы использовали при этом по существу некоторый (не очень продвинутый с точки зрения математики) вариант МСГП.

В более поздних работах [42, 43, 49–52] МСГП применялся к модельным задачам, более сложным как с точки зрения геометрической структуры каустик, так и с точки зрения уравнений, описывающих волновые поля. Приблизительно в это же время за рубежом появляется ряд работ, посвященных МСГП и содержащих конкретные расчеты. Довольно полный перечень этих работ содержится в обзоре [53]. Многие из них содержат применение МСГП для построения теоретических сейсмограмм, т. е. к нестационарным задачам. Подробно мы на этом остановимся ниже, а здесь будем рассматривать и обсуждать только стационарные задачи.

Цель численных экспериментов — выяснить практическую эффективность метода и оценить границы его применимости. Одним из первых здесь возникает вопрос, какое количество гауссовых пучков нужно просуммировать для получения требуемой точности расчетов и зависит ли это число существенным образом от положения точки наблюдения M относительно каустики и структуры последней (вблизи M). Поскольку обсуждаемый метод является асимптотическим ($\omega \rightarrow \infty$), использование его для конкретных расчетов ставит еще ряд естественных вопросов. 1) Начиная с каких ω им можно пользоваться и не требует ли он более высоких частот, чем лучевой или другие асимптотические методы? 2) Не приведет ли он к дополнительным трудностям, если увеличивать расстояние от источника до точки наблюдения в связи, например, с возможным «расползанием» гауссовых пучков? 3) Как зависит точность удовлетворения краевым условиям на границах раздела сред от частоты и геометрических характеристик границы, например ее кривизны, в связи с тем, что при отражении (преломлении) гауссовых пучков соответствующие краевые условия выполняются асимптотически (т. е. приближенно)?

Получить ответы на эти вопросы из теоретических построений представляется весьма затруднительным. С другой стороны, исследование их в конкретных задачах не гарантирует, разумеется, универсальности или пригодности полученных ответов во всех случаях.

Уже первые численные эксперименты [46, 49–52] показали, что число пучков, которые нужно просуммировать для получения удовлетворительной точности, практически не зависит от того, находится ли точка наблюдения в области регулярности лучевого поля или попадает в окрестность каустики той или иной геометрической структуры. Это проверялось для простой каустики, окрестности точки возврата каустики [43, 46], а также в более сложной ситуации, когда в окрестности каусти-

ки с точкой возврата проходит ветвь другой каустики [49, 50]. Сохраняется подобная ситуация и в случае векторных уравнений теории упругости [51, 52].

Суммирование порядка 30—60 пучков уже дает удовлетворительные результаты в довольно широком диапазоне изменения других параметров исходных задач. Эти результаты устанавливались как путем анализа внутренней сходимости метода (т. е. зависимость результатов расчета от числа суммируемых пучков), так и сравнением с другими асимптотическими методами: лучевым методом, формулой для осевой волны рефракционного волновода [55, 54], методом нормальных мод. На ряде модельных акустических задач сравнивается эффективность МСГП, лучевого метода и метода нормальных волн в [56]. В работе [57] сопоставляются результаты расчета волнового поля в рефракционном волноводе, рассмотренном еще в статье [55], полученные с помощью МСГП [46] и с использованием канонического оператора Маслова. Как можно видеть из приведенных в этих работах графиков, оба метода дают хорошее совпадение*.

Влияние величины большого параметра — частоты ω — на точность МСГП рассматривалось в [51, 52] путем сравнения с лучевым методом. Результаты расчетов показывают, что оба метода дают близкие результаты уже при небольших значениях ω (относительная погрешность $\sim 5\%$ наблюдается для $\omega \approx 10$). Сейчас нет основания считать, что применение МСГП требует больших частот, чем лучевой метод. Однако, на наш взгляд, изучение границ применимости по частоте рассматриваемого метода в сравнении с другими асимптотическими методами (интерференционный интеграл, метод канонического оператора, лучевой метод) остается актуальным. Примыкающие к этим вопросам исследования имеются в работах [50, 58, 68].

Важным для приложений является вопрос о границах применимости МСГП по отношению к расстоянию до источника. Прежде всего следует заметить, что МСГП, так же как лучевой метод, метод канонического оператора, интерференционный интеграл, описывает асимптотику волнового поля по частоте, которая не является, как правило, равномерной по расстоянию**. Это означает, что при фиксированном значении частоты все указанные асимптотические методы пригодны для расчетов волнового поля лишь в ограниченной пространственной области.

В случае МСГП пучков это продемонстрировано в [49, 50] путем сравнения последнего с методом нормальных волн в задаче о приповерхностном волноводе. С ростом величины большого параметра расширялась область, где оба метода давали совпадающие результаты (здесь метод нормальных мод можно рассматривать как точный), см. также [58].

Как уже отмечалось, МСГП, в отличие от упомянутых выше асимптотических методов, содержит некоторые произвольные параметры. Этот факт подвергался и подвергается критике [38] и порождает серию работ, см., например, [59—61], где обсуждаются различные способы выбора этих параметров. Мы подчеркнем сразу же другую сторону этого факта: за счет специального подбора параметров оказывается возможным расширить область применимости метода при фиксированном большом параметре — частоте ω . Это было обнаружено и использовано уже в первых численных экспериментах [51, 45].

* В [48] при расчете поля в окрестности ветви простой каустики результат ошибочно увеличен в два раза. Авторы [57] допускают небрежность при ссылке на работу [48], приписывая ее авторам расчеты из [55] и неверно трактуя результаты расчета в окрестности ветви простой каустики (рассуждения по поводу «забытого» третьего луча).

** В отдельных случаях асимптотика по частоте является асимптотикой и по расстоянию, например, решение уравнения Гельмгольца с точечным источником описывается функцией Ханкеля $H_0^{(1)}(kr)$, k — волновое число, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ — расстояние. Здесь асимптотики по $k \rightarrow \infty$ и $r \rightarrow \infty$ совпадают.

II.4. О роли свободных параметров гауссовых пучков. Обратимся к рассмотренному в [62] простому примеру, иллюстрирующему роль произвольных параметров ГП. Предполагается, что волновое поле $u = u(x, y)$ удовлетворяет уравнению $(\Delta + k^2)u = \delta(x)\delta(y)$ и волновое число k считается большим параметром ($k \rightarrow \infty$). Точное решение имеет вид $u = -(i/4)H_0^{(1)}(kr)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $H_0^{(1)}$ — функция Ханкеля, и при $kr \rightarrow \infty$ имеем

$$u = -\frac{i}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \exp\left\{i\left(kr - \frac{\pi}{4}\right)\right\} \left[1 - \frac{i}{8kr} + O\left(\frac{1}{(kr)^2}\right)\right]. \quad (\text{II.4.1})$$

ГП $u_\Phi(s, n)$, распространяющийся вдоль луча, выходящего из источника $x=y=0$ под углом φ с осью x , имеет вид (в главном члене при $k \rightarrow \infty$)

$$u_\Phi(s, n) = \frac{1}{\sqrt{a_1 + ia_2 s}} \exp\left[ik\left(s + \frac{1}{2} - \frac{ia_2}{a_1 + ia_2 s}|n^2|\right)\right], \quad (\text{II.4.2})$$

где s — длина луча, отсчитываемая от источника, n — нормаль к лучу; постоянные a_1 и a_2 являются произвольными параметрами ГП (мы их берем здесь вещественными и положительными)*. Интеграл u по ГП описывается формулой

$$\tilde{u} = \int_{-\infty}^{2\pi} d\varphi \Phi(\varphi) u_\Phi(s, n), \quad \Phi(\varphi) = -\frac{i}{4\pi} \sqrt{a_1}. \quad (\text{II.4.3})$$

Вопрос состоит в том, как зависит модуль разности $|u - \tilde{u}|$ между точным решением и интегралом (II.4.3) от параметров a_1, a_2 в (II.4.2). Для получения ответа поступим следующим образом. Будем считать, что a_1, a_2 для всех лучей центрального поля одни и те же, т. е. не зависят от φ , и вычислим асимптотику интеграла (II.4.3) при $k \rightarrow \infty$ и фиксированном расстоянии r_0 от точки наблюдения до источника:

$$\tilde{u} = -\frac{i}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi kr_0}} \exp\left[i\left(kr_0 - \frac{\pi}{4}\right)\right] \left\{1 - \frac{i}{8kr_0} \left(1 - 3r_0^2 \frac{a_2^2}{a_1^2}\right) + O(k^{-2})\right\}. \quad (\text{II.4.4})$$

Сравним (II.4.1) с (II.4.4). Главные члены совпадают — так и должно быть. А следующие по порядку члены уже различные. Если расстояние r_0 и параметры a_1, a_2 фиксированы, а волновое число k достаточно велико, то $|u - \tilde{u}|$ будет мало. Если же фиксировать большой параметр k (как это обычно имеет место в приложениях!), то погрешность, даваемая интегралом (II.4.3), с ростом r_0 будет нарастать. Если, однако, при расчете поля в точке наблюдения M , удаленной от источника на расстояние r_0 , взять такие ГП (II.4.2), которые имеют минимальную ширину на этом расстоянии, т. е. положить $a_2/a_1 = r_0^{-1}$, то второе слагаемое в (II.4.4) принимает вид $\frac{i}{8kr_0} \left(1 - 3r_0^2 \frac{a_2^2}{a_1^2}\right) = -2 \frac{i}{8kr_0}$. Это означает, что погрешность интеграла (II.4.3) перестает расти с увеличением расстояний до источника (по крайней мере в членах порядка $k^{-3/2}$).

Таким образом, этот простой пример наглядно показывает, что при фиксированном волновом числе область применимости МСГП может быть расширена за счет специального выбора произвольных параметров.

В работе [23] указывалось на разумность такого подбора параметров, чтобы в окрестности точки наблюдения гауссовые пучки имели ми-

* В действительности в (II.4.2) имеется один произвольный параметр — отношение a_2/a_1 .

нимальную ширину. Затем в [51] было установлено, что подобный выбор параметров существен при расчетах поля на больших расстояниях от источников.

В работе [58] излагается и на численных примерах подробно исследуется другой способ выбора параметров: вещественная часть матрицы Γ для ГП должна обращаться в нуль в точке наблюдения. Авторы приходят к выводу, что такой выбор параметров является эффективным, по крайней мере в случае однородной среды.

В ряде работ, см. [38, 59, 63], изучается связь МСГП с упомянутой в II.1 идеей о «погружении» точечного источника в комплексное пространство. Эти исследования представляют интерес с точки зрения отыскания путей для оптимального выбора произвольных параметров ГП. Однако в настоящее время полной ясности в вопросе оптимального выбора этих параметров нет.

III. ГАУССОВЫ ПУЧКИ В НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧАХ

III.1. Задачи о распространении волновых пакетов и пространственно-временной лучевой метод. Пространственно-временной лучевой метод* (ПВЛМ) дает возможность описать такое важное явление, как распространение волновых пакетов в плавно неоднородной среде. В окрестности каустик (т. е. огибающих (возможно, в том или ином смысле вырожденных)) поля ПВ лучей ПВЛМ неприменим.

Для преодоления «каустических трудностей» в нестационарных задачах предлагается метод суммирования пространственно-временных (ПВ) гауссовых пучков. Он здесь играет роль, аналогичную той, что МСГП в стационарных задачах, но в данном случае имеется и существенное отличие: в нестационарных задачах есть два типа ПВ гауссовых пучков и применение какого-либо из них диктуется характером рассматриваемого волнового процесса.

Проиллюстрируем идеи ПВЛМ на примере волнового уравнения. Пусть волновой процесс описывается уравнением

$$Lu \equiv \frac{1}{C^s(x)} \frac{\partial^s u}{\partial t^s} - \Delta u = 0, \quad x = (x^1, x^2, x^3), \quad (\text{III.1.1})$$

тогда ПВ лучевое разложение имеет вид

$$u = \exp \{ip\theta(x, t)\} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{u_j(x, t)}{(ip)^j}, \quad (\text{III.1.2})$$

где p — большой параметр задачи, о физическом смысле которого мы скажем ниже. Функция $\theta(x, t)$ здесь называется ПВ эйконалом и удовлетворяет нестационарному уравнению эйконала:

$$\frac{1}{C^s(x)} \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^s - (\nabla \theta)^s = 0. \quad (\text{III.1.3})$$

Коэффициенты $u_j(x, t)$ ряда в (III.1.2) удовлетворяют рекуррентной системе уравнений переноса

$$\frac{2}{C^s} \frac{\partial \theta}{\partial t} \frac{\partial u_j}{\partial t} - 2(\nabla \theta, \nabla u_j) + u_j L\theta = Lu_{j-1}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, \quad u_{-1} \equiv 0. \quad (\text{III.1.4})$$

Пользуясь разложением в ряд Тейлора для θ и u_j в окрестности ПВ точки $M_0 = (x_0, t_0)$, можно убедиться, что ПВ лучевое разложение (III.1.2) в окрестности M_0 в первом приближении ведет себя как плоская волна с мгновенной частотой $\omega = -p(\partial \theta / \partial t)|_{M_0}$ и мгновенным волновым вектором $\mathbf{k} = p \nabla \theta|_{M_0}$. Если свойства среды меняются мало на расстоя-

* История создания ПВЛМ с соответствующими ссылками и его подробное изложение имеется в монографии [64].

ний порядка мгновенной длины волны $\lambda = 2\pi/|\mathbf{k}| = 2\pi/p|\nabla\theta|$, то для описания волнового процесса можно пользоваться ПВЛМ. При этом разложение (III.1.2) описывает локально плоскую волну, амплитуда, сдвиг фазы и направление распространения которой плавно меняются от точки к точке. Возможен такой случай, когда функции u_j существенно отличны от нуля лишь в некоторой области, размеры которой велики по сравнению с длиной волны. Тогда эта область, где волна имеет заметную величину, будет перемещаться, образуя так называемый волновой пакет.

Возбуждаться такие волновые процессы в неоднородных средах могут различными способами. В частности, если в некоторый начальный момент $t=0$ волновое поле описывается разложением типа (III.1.2), то при $t>0$ оно будет представлять модулированную волну или волновой пакет. Мы сосредоточим внимание на тех случаях, когда такие волновые процессы возбуждаются точечными источниками со специальной временной зависимостью, т. е. $Lu=F(t, x)$, и функция $F(t, x)$ имеет вид $F(t, x)=f(t)\delta(x-x_0)$, а $f(t)$ содержит плавную огибающую с высокочастотным заполнением. ПВ лучами являются характеристики уравнения эйконала (III.1.3). Если обозначить $p_0=\partial\theta/\partial t$, $p_j=\partial\theta/\partial x^j$,

$j=1, 2, 3$, и ввести функцию 'Гамильтона' $H=C(x)\sqrt{\sum p_j^2}$, то уравнения для характеристик (в гамильтоновой форме) принимают вид [65, 64]

$$\frac{dt}{ds}=1, \quad \frac{dp_0}{ds}=0, \quad \frac{dx^j}{ds}=\frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \frac{dp_j}{ds}=-\frac{\partial H}{\partial x^j}, \quad \frac{d\theta}{ds}=0, \quad (\text{III.1.5})$$

где s — вспомогательная переменная. Решения (III.1.5) $t=s+\text{const}$, $p_0=\text{const}$, $x^j=x^j(s)$, $p_j=p_j(s)$, $\theta=\text{const}$ будем интерпретировать как кривые в пространстве-времени $t=s+\text{const}$, $x^j=x^j(s)$, вдоль которых заданы θ и $p_j(s)$. Эти кривые и носят название ПВ лучей. Равенства $t=s+\text{const}$, $x^j=x^j(s)$ задают в пространстве x^1, x^2, x^3 движение точки вдоль экстремали функционала Ферма $\int C^{-1}ds$ со скоростью $C(x)$ [64].

Решения уравнений эйконала (III.1.3) и переноса (III.1.4) строятся по известному полю ПВ лучей аналогично тому, как это делается в стационарном варианте лучевого метода. Трудности возникают в окрестности ПВ каустик: на ПВ каустиках $u_j(x, t)$ обращаются в бесконечность. Обо всех этих вопросах подробно написано в монографии [64].

III.2. Пространственно-временные гауссовые пучки.

III.2.1. Квазифотон. С точки зрения наблюдателя волновое поле ПВ гауссова пучка, называемого квазифотоном, представляет собой сконцентрированный в малом объеме (размером порядка $1/\gamma p$) волновой пакет, летящий вдоль обычного стационарного луча со скоростью C . Решения волновых уравнений, имеющих вид таких ПВ гауссовых пучков, впервые рассмотрел Маслов [25], используя сложную технику комплексных лагранжевых многообразий. Излагаемый здесь более элементарный подход к построению квазифотонов базируется на работах [26, 66].

Основная идея состоит в том, что решение волнового уравнения (III.1.1) ищется в виде ПВ лучевого разложения (III.1.2), в котором эйконал θ считается комплексным, причем $\text{Im } \theta \leqslant 0$ и равенство имеет место лишь на самом ПВ луче. Пусть параметром вдоль ПВ луча взято время t , так что $s=t$, $x^j=x^j(t)$, $j=1, 2, 3$ — его уравнение. Удобно (см. [66]) ввести новые координаты $\eta^j=x^j-x^j(t)$. Эйконал θ и амплитуды u_j ищутся в виде рядов по степеням η^j , точнее,

$$\theta=\theta^{(0)}+\theta^{(1)}+\theta^{(2)}+\dots, \quad u_j=u_j^{(0)}+u_j^{(1)}+u_j^{(2)}+\dots, \quad (\text{III.2.1})$$

где $\theta^{(k)}$ и $u_j^{(k)}$ — однородные по η^j полиномы степени k с коэффициентами, зависящими от t . Уравнения для коэффициентов находятся после

подстановки разложений (III.2.1) в уравнение (III.1.3) и (III.1.4) и приравнивания нулю коэффициентов при одинаковых степенях переменных η^j . Интегрирование полученных уравнений во многом аналогично тому, как это делается для стационарных ГП. Так, например, если мы

$$\text{положим } \theta^{(2)} = \frac{1}{2} \sum_{j, k=1}^3 \Gamma_{jk} \eta^j \eta^k, \text{ где } (\Gamma_{jk}(t)) = \Gamma \text{ — симметричная матрица}$$

(3×3) с положительно-определенной мнимой частью, то для Γ возникает матричное уравнение Риккати, которое данной подстановкой сводится к линейной системе. Для $\theta^{(k)}, k > 2$, выводятся линейные уравнения, которые можно проинтегрировать в квадратурах.

Полученный на этом пути ПВ гауссов пучок, называемый квазифотоном, не имеет сингулярностей, сколько бы мы ни продолжали. Волновое поле в каждый момент времени t сосредоточено в окрестности порядка $1/\bar{\rho}$ точки $x^j = x^j(t), j = 1, 2, 3$, летящей со скоростью $C(x)$ вдоль стационарного луча. В главном члене квазифотон описывается формулой

$$u = \text{const} \frac{C_0}{\sqrt{\det Y}} \exp \left\{ ip \left[\sum_{j=1}^3 p_j(t) \eta^j + \frac{1}{2} \sum_{j, k=1}^3 \Gamma_{jk}(t) \eta^j \eta^k \right] \right\}, \quad (\text{III.2.2})$$

где C_0 — скорость на данном луче и $p_j(t)$ — обобщенные импульсы, соответствующие данному ПВ лучу, см. (III.1.5).

В первоначальных работах [25, 26] эти ПВ гауссовые пучки были построены вне всякой связи с МСИ ГП. В последнее время к ним вновь возникает интерес. В работе [67] аналог квазифотона построен в активной среде. Из зарубежных работ укажем [68, 69]. Первая из них посвящена построению ГВ гауссова пучка типа (III.2.2) и тем самым повторяет некоторые результаты работы [26]. В статье [69] строится аналог квазифотона (III.2.2) в случае анизотропной теории упругости.

III.2.2. Квазиструя. В отличие от квазифотона этот тип ПВ гауссова пучка в каждый момент времени сосредоточен в окрестности стационарного луча, т. е. проекции данного ПВ луча на пространство. Основой для построения и использования их послужила статья [70], содержащая все основные формулы. Ряд построений работы [71], посвященной модулированным гауссовым пучкам, имеет общее с некоторыми построениями работы [70].

Обратимся к выводу формул для квазиструи. Пусть параметром вдоль данного ПВ луча взята длина дуги s стационарного луча $x^j = x^j(s), j = 1, 2, 3$, тогда $t = \tau_0(s)$, где $\tau_0(s) = \int C_0^{-1}(s) ds$ — стационарный эйконал на луче $x^j = x^j(s)$ (это следует из уравнений для характеристик (III.1.3)). В окрестности стационарного луча $x^j = x^j(s)$ вводим те же координаты s, q_1, q_2 , что и в стационарном случае. Решение волнового уравнения ищем в виде разложения (III.1.2), где функции θ и u отыскиваются в виде степенных рядов по координатам q_1, q_2 с коэффициентами, зависящими от t и s . Эйконал считается комплексным, причем $\operatorname{Im} \theta \geqslant 0$ и $\operatorname{Im} \theta = 0$ на самом луче, т. е. при $q_1 = q_2 = 0$. Подставив разложения

$$\theta = \theta^{(0)} + \theta^{(2)} + \theta^{(3)} + \dots, \quad u_j = u_j^{(0)} + u_j^{(1)} + \dots, \quad (\text{III.2.3})$$

где уже $\theta^{(k)}$, $u_j^{(k)}$ — однородные полиномы только по координатам q_1, q_2 с коэффициентами, зависящими от t, s^* , в (III.1.3), (III.1.4), получим уравнения для искомых коэффициентов. В частности, для матрицы второго порядка ($\theta_{jk}^{(2)}$) возникает нелинейное уравнение Риккати. Схема интегрирования полученных уравнений аналогична той, что возникает

* В данном случае линейные по q_1, q_2 члены $\theta^{(1)}$ обращаются в нуль.

при построении стационарных ГП. Окончательная формула в главном члене асимптотики при $p \rightarrow \infty$ для квазиструи такова:

$$u(t, s, q_1, q_2) = \sqrt{\frac{C_0(s)}{\det Q}} \exp\left\{ip\left[\theta_{(t-s)}^{(0)} - \frac{1}{2} \dot{\theta}_{(t-s)}^{(0)}(P_{(s)}Q_{(s)}^{-1}q, q)\right]\right\}, \quad (\text{III.2.4})$$

где $C_0(s)$ — скорость на луче, $\dot{\theta}^{(0)} \equiv \partial\theta^{(0)}/\partial t$, а смысл остальных обозначений очевиден.

Подробно построение обсуждаемых ПВ гауссовых пучков, а также их отражение (преломление) на границе раздела двух сред изложены в [73, 72].

III.3. Суммирование пространственно-временных гауссовых пучков. Сразу после публикации первых работ по методу суммирования стационарных ГП последний стал применяться для построения теоретических сейсмограмм, т. е. в нестационарных задачах геофизики. К настоящему времени число работ на эту тему уже довольно велико и почти все они выполнены за рубежом. Обширная библиография этих работ содержится в обзоре [53].

Математический подход в них является традиционным для геофизики, см., например, [74]. Суть его состоит в том, что вначале рассматривается стационарная задача, для которой строится высокочастотная асимптотика (лучевым методом, например, или МСГП). Переход к нестационарному волновому полю осуществляется с помощью интеграла Фурье по частоте ω . Если спектральная плотность временного воздействия в источнике сосредоточена в области высоких частот и мала при малых ω , то на этом пути возникает приближенное описание нестационарного волнового поля. Ясно, что если стационарная асимптотика опирается на МСГП, то проблем с каустиками для нестационарного поля не возникает.

Вряд ли, однако, этот путь можно считать оптимальным. Главный недостаток, на наш взгляд, состоит в том, что при численной его реализации требуется вычислять преобразование Фурье по частоте для каждого гауссова пучка, дающего вклад в точке наблюдения. По сравнению со стационарным случаем возникает дополнительный интеграл по частоте, что приводит к росту объема вычислений. Кроме того, не всегда представляется ясным, какую аппроксимацию нестационарного волнового поля дает этот традиционный подход.

Метод суммирования ПВ гауссовых пучков имеет несомненное преимущество по сравнению с описанным выше подходом преодоления каустических трудностей в нестационарных задачах. Он описывает асимптотику сразу нестационарной задачи и не содержит интеграла по частоте, тем самым его численная реализация требует на одно интегрирование меньше. Кроме того, он применим для более широкого круга задач, например для движущихся источников и границ раздела, когда сведение к стационарным задачам с помощью фурье-преобразования затруднительно.

Однако метод этот накладывает условия на вид временного воздействия $f(t)$ в источнике: он применим тогда, когда источник порождает в среде волновой пакет или волну, модулированную по амплитуде и частоте. Причем использование квазиструи вместо квазифотона позволяет обслужить более широкий класс источников.

Прежде чем в общих чертах описать схему суммирования ПВ гауссовых пучков, отметим, что в работах [75–77] предложен подход к построению теоретических сейсмограмм, базирующийся на КОМ и поэтому решаящий проблему каустик в нестационарном случае.

Метод суммирования квазифотонов для уравнений изотропной неоднородной теории упругости излагается в работе [78]. Здесь подробно описана схема построения квазифотона в упругости и получены начальные амплитуды для источников типа центр расширения и центр вращения.

Методу суммирования квазиструй посвящены работы [73, 72]. Здесь рассматривается скалярное волновое уравнение, излагается схема построения ГП, их отражение (преломление) на границе раздела сред и найдены начальные амплитуды в случае точечного источника.

Схема суммирования ПВ гауссовых пучков для точечных источников вида $f(t)\delta(x-x_0)$ такова. Множество стационарных лучей образует центральное поле и параметризуется, например, углами ϑ, ϕ сферических координат, $x^j = x^j(\sigma, \vartheta, \phi)$, $j=1, 2, 3$, где σ — некоторый параметр вдоль луча. Семейство ПВ лучей трехпараметрическое и третьим параметром является время выхода t_0 луча из источника.

При каждом фиксированном t_0 семейство ПВ лучей выстилает некоторый гиперконус (по крайней мере вблизи источника, где ПВ лучи не образуют каустика). Для каждого из этих ПВ лучей строится ПВ гауссов пучок, который мы обозначим $u_{t_0, \vartheta, \phi}$. Это может быть и квазифотон и квазиструя. Затем эти ПВ пучки суммируются по углам ϑ и ϕ с некоторыми начальными амплитудами $\Phi(t_0, \vartheta, \phi)$. Получаем однопараметрическое семейство интегралов

$$U_{t_0} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\vartheta \Phi(t_0, \vartheta, \phi) u_{t_0, \vartheta, \phi}. \quad (\text{III.3.1})$$

Исключая, наконец, в (III.3.1) параметр t_0 с помощью уравнения для ПВ лучей, приходим к окончательному выражению для волнового поля в виде интеграла по ПВ гауссовым пучкам. Начальные амплитуды здесь также находятся из условия сшивания интеграла (III.3.1) с ПВ лучевым разложением исходной задачи вблизи источника. Полученный интеграл, разумеется, не имеет сингулярностей на каустиках.

Существенное отличие между квазифотоном и квазиструей в этой схеме заключено в следующем. Квазифотон можно использовать в том случае, когда временное воздействие представляет собой пакет с гауссовой огибающей, т. е. имеет вид $f(t) = \text{Re} \exp \{-\alpha t^2 p + ip\theta(t)\}$, где p — большой параметр, $\alpha > 0$ и $\exp[ip\theta(t)]$ описывает высокочастотное заполнение в этом пакете.

Квазиструя может быть использована, когда $f(t)$ представляет собой пакет с огибающей произвольной формы и высокочастотным заполнением, т. е. имеет вид $f(t) = \text{Re}[a(t) \exp(ip\theta(t))]$, где p — большой параметр, $a(t)$ — произвольная достаточно гладкая функция.

III.4. Результаты численных экспериментов. К настоящему времени нам известны лишь две работы, содержащие расчет нестационарных волновых полей методом суммирования ПВ гауссовых пучков [79, 80]. В них рассматривается ряд модельных примеров в рамках изотропной неоднородной теории упругости. Временное воздействие в точечном источнике типа центр расширения берется в виде $f(t) = 4\alpha t e^{-\alpha t} \sin \omega_0 t$, $f(t) = 0$ при $t < 0$, $\alpha > 0$, и в форме пакета с гауссовой огибающей $f(t) = e^{-\alpha t^2} \sin \omega_0 t$, $\alpha > 0$, причем ширина пакета не связана с большим параметром ω_0 — частотой заполнения.

В обоих этих случаях естественно использовать именно квазиструи (III.2.4).

Формально большим параметром, по которому интеграл типа (III.3.1) представляет асимптотику волнового поля, является параметр p . Он входит во временное воздействие в источнике. Для рассматриваемых конкретных случаев реальным безразмерным параметром оказывается число осцилляций внутри пакета.

Влияние числа осцилляций внутри пакета на точность расчета анализировалось путем сравнения с точным решением в случае однород-

ной среды. Здесь же изучалась зависимость точности расчетов от расстояния.

Эффективность метода в неоднородной среде оценивалась на основе внутренней сходимости. Расчеты проводились для квазидвумерных задач, которые позволяют избежать расчета по-настоящему трехмерных стационарных лучей, но сохраняют типичное для пространства убывание поля в зависимости от расстояния. (В этих задачах неоднородная среда инвариантна относительно сдвигов, например вдоль оси y , а источник и точка наблюдения находятся в одной плоскости $y=0$.) Модификация МСГП (в стационарном варианте) на такие задачи была описана ранее в работе [43], см. также [53].

В модельных примерах с неоднородной средой поле рассчитывалось в окрестности простой каустической поверхности и в окрестности ребра возврата каустики.

На основании этих численных экспериментов можно сделать следующие выводы.

1) Суммирование ПВ гауссовых пучков не требует увеличения числа пучков по сравнению со стационарным случаем.

2) Наибольшая погрешность наблюдается вблизи фронта, где обсуждаемый метод расчета может давать предвестники. Эта погрешность убывает с увеличением числа осцилляций в пакете. Форма импульса в точке наблюдения качественно воспроизводится уже для двух-трех осцилляций на длине пакета. Отметим, что возможность появления предвестников при расчете поля МСГП (в традиционном подходе) обнаружена была ранее в работе [81].

3) За счет специального подбора параметров, входящих в ПВ гауссов пучок, можно расширить границы применимости метода по расстоянию до источника. Положение здесь аналогично тому, что имеет место в стационарных задачах.

Для иллюстрации эффективности метода суммирования ПВ гауссовых пучков приведем два рисунка, взятые из работы [80]. На рис. 1 продемонстрирован характер совпадения точного решения (сплошная линия) и метода суммирования ПВ гауссовых пучков (пунктирная линия) в зависимости от числа осцилляций внутри волнового пакета. Временное воздействие $f(t)$ описывается формулой $f(t) = 4\alpha t \exp(-\alpha t) \times \sin \omega_0 t$ при $t \geq 0$ и $f(t) = 0$ при $t < 0$, $\alpha > 0$. Большим параметром является ω_0 . Расчеты проводились для уравнений упругости в однородной среде, источник — центр расширения, возбуждающий только продольную волну.

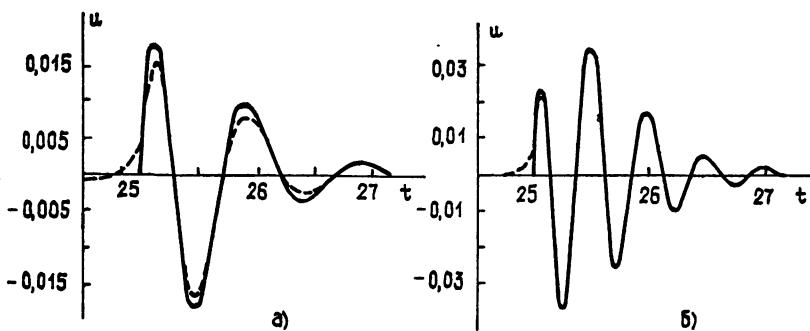


Рис. 1.

Рис. 2 соответствует тому же источнику, но в случае неоднородной среды, когда возникают каустические поверхности, имеющие ребро возврата. Метод суммирования ПВ гауссовых пучков позволяет рассчитывать поле в окрестности ребра возврата. На рис. 2а—г изображена деформация формы исходного импульса при переходе через ребро возврата каустики. На графике а) изображен импульс до ребра возврата, б) — на самом ребре (виден эффект фокусировки, см. масштаб по вер-

тической оси). На графиках в) и г) виден процесс отщепления волны за ребром возврата.

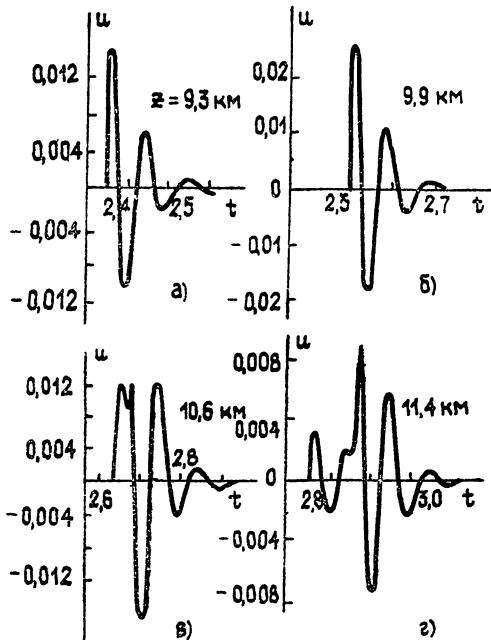


Рис. 2.

IV. ЗАКЛЮЧЕНИЕ. О ГРАНИЦАХ ПРИМЕНИМОСТИ МСГП

С точки зрения приложений по отношению к любому приближенному методу возникает вопрос: можно ли для решения данной конкретной задачи использовать приближенный (асимптотический) метод и какова при этом будет погрешность по сравнению с точным решением?

Можно сказать определенно, что ни для одного из упомянутых здесь асимптотических методов полного ответа на этот вопрос нет, хотя, например, лучевой метод уже широко используется более 30 лет. Вряд ли удастся получить полный ответ и для МСГП.

По-видимому, реально говорить здесь об отыскании эмпирических, приближенно верных условиях применимости метода. Они могут формулироваться на основе широкого проведения численных экспериментов. Они могут устанавливаться и на основе построения и анализа следующих за главным членов асимптотического разложения.

В работе [82] на простом примере (однородная среда, двумерный случай) устанавливаются условия применимости формул для изолированного стационарного ГП путем анализа последующих членов асимптотики. Имеются работы [83, 84] с весьма интригующим названием: «Область применимости лучевого метода и метода пучков в произвольных неоднородных средах...» Однако обоснованных критериев применимости МСГП эти работы не содержат.

В упомянутых выше работах, посвященных оптимальному выбору свободных параметров, также обсуждаются условия применимости МСГП. Численные эксперименты показывают, что нет основания ожидать, что границы применимости МСГП существенно отличаются от таковых для лучевого метода или метода КОМ. В целом, однако, этот вопрос нуждается в дополнительных исследованиях.

В последние годы активно дискутируется вопрос об установлении эвристических критериев применимости геометрической оптики и геометрической теории дифракции. Поскольку МСГП тесно связан с лучевым методом (или методом геометрической оптики), то такие критерии могут оказаться полезными и при выяснении границ применимости МСГП.

Ряд важных для данного обзора материалов авторам предостави-

ли Ю. А. Кравцов и А. В. Демин. Авторы считают своим долгом выразить им свою глубокую благодарность. Авторы искренне признательны А. П. Качалову за оказанную им помощь при написании обзора.

ЛИТЕРАТУРА

1. Френель О. Избранные труды по оптике. — М.: Гостехиздат, 1955.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. — М.: Наука, 1973.
3. Фок В. А. Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн. — М.: Сов. радио, 1970.
4. Бабич В. М., Булдырев В. С. Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. — М.: Наука, 1972.
5. Кравцов Ю. А. // Изв. вузов. Радиофизика. 1964. Т. 7. № 4. С. 664.
6. Ludwig D. // Commun. Pure Appl. Math. 1966. V. 19. № 2. P. 215.
7. Сопног J. N. L., Curtis P. R., Farrell D. // J. Phys. A: Math. Gen. 1984. V. 17. № 2. P. 283.
8. Levey L., Felsen L. B. // Radio Sci. 1969. V. 4. № 10. P. 959.
9. Орлов Ю. И. // Радиотехника и электроника. 1976. Т. 21. № 4. С. 730.
10. Кравцов Ю. А., Орлов Ю. И. // УФН. 1983. Т. 141. № 4. С. 591.
11. Маслов В. П. Теория возмущений и асимптотические методы. — М.: Гос. ун-т, 1965.
12. Маслов В. П., Федорюк М. В. Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики. — М.: Наука, 1976.
13. Вайнберг Б. Р. Асимптотические методы в уравнениях математической физики. — М.: Гос. ун-т, 1982.
14. Лукин Д. С., Палкин Е. А. Численный канонический метод в задачах дифракции и распространения электромагнитных волн в неоднородных средах. — М.: МФТИ, 1982.
15. Лукин Д. С., Ипатов Е. Б., Палкин Е. А. // Междудомств. сб. — М.: МФТИ, 1982. С. 21.
16. Ludwig D. // Commun. Pure Appl. Math. 1967. V. 20. № 1. P. 103.
17. Орлов Ю. И. // Труды МЭИ. 1972. Вып. 119. С. 82.
18. Орлов Ю. И. // Изв. вузов. Радиофизика. 1974. Т. 17. № 7. С. 1035.
19. Орлов Ю. И., Демин А. В. В кн.: Исследование условий распространения радиоволн. — М.: ИЗМИРАН, 1983. С. 48.
20. Демин А. В., Дудырева И. Л. // Тезисы докл. XIV Всесоюзной конференции по распространению радиоволн. — М.: Наука, 1984. Ч. 1. С. 251.
21. Авдеев В. Б., Демин А. В., Кравцов Ю. А., Тинин М. В., Ярыгин А. П. В кн.: Акустические волны в океане / Под ред. Л. М. Бреходских, И. Б. Андреевой. — М.: Наука, 1987.
22. Бабич В. М., Панкратова Т. Ф. В кн.: Проблемы математической физики. — Л.: Гос. ун-т, 1973. Вып. 6. С. 9.
23. Попов М. М. // Зап. научн. семинаров Ленингр. отд. Матем. ин-та АН СССР. 1981. Т. 104. С. 195.
24. Вайнштейн Л. А. Открытые резонаторы и открытые волноводы. — М.: Сов. радио, 1966.
25. Маслов В. П. Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях. — М.: Наука, 1977.
26. Бабич В. М., Улин В. В. // Зап. научн. семинаров Ленингр. отд. Матем. ин-та АН СССР. 1981. Т. 117. С. 5.
27. Номофилю В. Е. // Зап. научн. семинаров Ленингр. отд. Матем. ин-та АН СССР. 1981. Т. 104. С. 170.
28. Попов М. М. // Вестник Ленингр. ун-та. 1969. № 22. С. 43.
29. Панкратова Т. Ф. // Зап. научн. семинаров Ленингр. отд. Матем. ин-та АН СССР. 1969. Т. 15. С. 122.
30. Кирпичникова Н. Я. // Труды МИАН СССР. 1971. Т. 115. С. 103.
31. Кирпичникова Н. Я. // Зап. научн. семинаров Ленингр. отд. Матем. ин-та АН СССР. 1969. Т. 15. С. 91.
32. Кирпичникова Н. Я. // Труды МИАН СССР. 1971. Т. 115. С. 114.
33. Cerveny V., Psencik I. // Geophys. J. R. Astr. Soc. 1983. V. 72. P. 417.
34. Yamogida K. // Geophys. J. R. Astr. Soc. 1985. V. 82. P. 511.
35. Arnaud J. A., Kogelnik H. // Applied Optics. 1969. V. 8. P. 1687.
36. Deschamps G. A. // Electr. Lett. 1971. V. 7. P. 684.
37. Keller J. B., Streifer W. // J. Opt. Soc. Am. 1971. V. 61. P. 40.
38. Felsen L. B. // Geophys. J. R. Astr. Soc. 1984. V. 79. P. 77.
39. Попов М. М. // Изв. АН СССР. Сер. Физика Земли. 1983. № 9. С. 39.
40. Явор М. И. // Вестник Ленингр. ун-та. 1983. № 4. С. 84.
41. Klimes L. // Geophys. J. R. Astr. Soc. 1984. V. 79. P. 105.
42. Качалов А. П., Попов М. М., Пшеничник И. // Зап. научн. семинаров Ленингр. отд. Матем. ин-та АН СССР. 1983. Т. 128. С. 65.
43. Качалов А. П., Попов М. М. В кн.: Математические проблемы геофизики: моделирование, исследование и интерпретация. — Новосибирск, 1985. С. 3.
44. Роров М. М., Psencik I., Cerveny V. // EGS Meeting — Budapest, 1980.
45. Cerveny V., Роров М. М., Psencik I. // Geophys. J. R. Astr. Soc. 1982. V. 70. P. 109.

46. Качалов А. П., Попов М. М. // ДАН СССР. 1981. Т. 258. № 5. С. 1097.
47. Попов М. М., Качалов А. П. // Краткие тезисы докл. VIII Всесоюзного симпозиума по дифракции и распространению волн. — М., 1981. Т. 2. С. 253.
48. Еременко В. А., Черкашин Ю. А. // Краткие тезисы докл. VIII Всесоюзного симпозиума по дифракции и распространению волн. — М., 1981. Т. 2. С. 257.
49. Грикуров В. Э., Попов М. М. // Изв. АН СССР. Сер. Физика Земли. 1983. № 8. С. 101.
50. Грикуров В. Е., Роров М. М. // Wave motion. 1983. V. 5. P. 225.
51. Качалов А. П., Попов М. М. Препринт Ленингр. отд. Матем. ин-та АН СССР Р—9—82. 1982.
52. Katchalov A. P., Rorov M. M. // Geophys. J. R. Astr. Soc. 1985. V. 81. P. 205.
- V
53. Сегену V. // J. Geophys. 1985. V. 58. P. 44.
54. Булдырев В. С. // Труды МИАН СССР. 1971. Т. 115. С. 78.
55. Булдырев В. С., Ланин А. И., Янсон З. А. В кн.: Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. 1974. Т. 14. С. 84.
56. Porter M. B., Вискел Н. Р. // J. Acoust. Soc. Am. 1987. V. 82. № 4. P. 1349.
57. Крюковский А. С., Лукин Д. С., Палкин Е. А. // Изв. вузов. Радиофизика. 1986. Т. 29. № 1. С. 79.
58. Грикуров В. Э., Ипатов Е. Б., Крюковский А. С., Лукин Д. С., Палкин Е. А. // Междуведомств. сб. Дифракция и распространение волн в неоднородных средах. — М., 1987.
59. Norris A. N. // J. Opt. Soc. Am. A. 1986. V. 3. P. 2005.
60. Lu L. T., Felsen L. B., Ruan Y. Z. // Geophys. J. R. Astr. Soc. 1987. V. 89. P. 915.
61. White B. S., Norris A., Bayliss A., Burridge R. // Geophys. J. R. Astr. Soc. 1987. V. 89. P. 579.
62. Ланин А. И., Попов М. М. // Зап. научн. семинаров Ленингр. отд. Матем. ин-та АН СССР. 1985. Т. 148. С. 116.
63. Wu R. // Geophys. J. R. Astr. Soc. 1985. V. 83. P. 93.
64. Бабич В. М., Булдырев В. С., Молотков И. А. Пространственно-временной лучевой метод. Линейные и нелинейные волны. — Л.: Гос. ун-т, 1985.
65. Смирнов В. И. Курс высшей математики. — М.: Физматгиз, 1958. Т. 4.
66. Качалов А. П. // Зап. научн. семинаров Ленингр. отд. Матем. ин-та АН СССР. 1984. Т. 140. С. 73.
67. Курылев Я. В. // Зап. научн. семинаров Ленингр. отд. Матем. ин-та АН СССР. 1985. Т. 148. С. 104.
68. Norris A. N., White B. S., Schrieffler // Proc. R. Soc. Lond. A. 1987. V. 412. P. 93.
69. Norris A. N. // Wave motion. 1987. V. 9. № 6. P. 509.
70. Кирпичникова Н. Я., Попов М. М. // Зап. научн. семинаров Ленингр. отд. Матем. ин-та АН СССР. 1983. Т. 128. С. 72.
71. Киселев А. П. // Изв. вузов. Радиофизика. 1983. Т. 26. № 8. С. 1014.
72. Попов М. М. Препринт Ленингр. отд. Матем. ин-та АН СССР Р—6—86. Л., 1986.
73. Попов М. М. // Зап. научн. семинаров Ленингр. отд. Матем. ин-та АН СССР. 1987. Т. 165. С. 143.
74. Газарян Ю. Л. В кн.: Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. — Л.: Гос. ун-т, 1961. Т. 5. С. 90.
75. Chartrap C. H. // Geophys. J. R. Astr. Soc. 1978. V. 54. P. 481.
76. Chartrap C. H., Drummond R. // Bull. Seismol. Soc. Amer. 1982. V. 72. P. S277.
77. Chartrap C. H. // J. Geophys. 1985. V. 58. P. 27.
78. Качалов А. П. // Зап. научн. семинаров Ленингр. отд. Матем. ин-та АН СССР. 1985. Т. 148. С. 89.
79. Качалов А. П., Попов М. М. // Зап. научн. семинаров Ленингр. отд. Матем. ин-та АН СССР. 1986. Т. 156. С. 73.
80. Katchalov A. P., Rorov M. M. // Geophys. J. 1988. V. 93. P. 465.
81. Madariaga R. // Geophys. J. R. Astr. Soc. 1984. V. 79. P. 589.
82. Грикуров В. Э., Киселев А. П. // Изв. вузов. Радиофизика. 1986. Т. 29. № 3. С. 307.
83. Ben-Meir A., Beydoun W. B. // Geophys. J. R. Astr. Soc. 1985. V. 82. P. 207.
84. Beydoun W. B., Ben-Meir A. // Geophys. J. R. Astr. Soc. 1985. V. 82. P. 235.
85. Лялин М. А. Статья депонирована в ВИНТИ, рег. № 2878—B88. Деп. от 15 апреля 1988 г.
86. Agnold J. M. // Radio Science. 1982. V. 17. № 5. P. 1181.
87. Agnold J. M. // IEE Proc. 1986. V. 133. Pt. J. № 2. P. 165.
88. Кравцов Ю. А. // Изв. вузов. Радиофизика. 1967. Т. 10. № 9—10. С. 1283.

Ленинградское отделение

Математического института им. В. А. Стеклова
АН СССР

Поступила в редакцию

23 мая 1988 г.

Примечание при корректуре. В недавно вышедшей из печати работе Грикурова В. Э. (Акустика океанской среды / Под ред. Л. М. Бреховских, И. Б. Андреевой. — М.: Наука, 1989) предлагается и исследуется оригинальный способ выбора произвольных параметров ГП.