ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том 32, № 11 РАДИОФИЗИКА 1989

УДК 538.573

ПОЛЕ ТОЧЕЧНОГО ИСТОЧНИКА В СЛУЧАЙНО-СЛОИСТОЙ СРЕДЕ. I. МЕТОД РЕЗОНАНСНОГО РАЗЛОЖЕНИЯ

Ю. В. Тарасов, В. Д. Фрейлихер

Изложен метод, позволяющий рассчитывать межчастотные корреляторы полей, распространяющихся в случайно-слоистой среде. В его основе лежат приближенные представления для случайного показателя преломления и искомого волнового поля, учитывающие резонансный характер рассеяния. Рассчитана когерентная составляющая сигнала, излучаемого точечным источником.

1. Слоистая структура, показатель преломления которой зависит только от одной координаты, часто используется в качестве модели среды при решении задач распространения волн в атмосфере, ионосфере, океане. Это обусловлено тем, что в пространственном спектре показателя преломления таких сред можно выделить две (или более) статистически независимые области — мелкомасштабную, турбулентную, и крупномасштабную, которая, как правило, является сильно анизотропной [1] и при выполнении определенных условий может описываться функцией одной переменной [2]. Это обстоятельство является одной из причин большого интереса к вопросам распространения волн в одномерных случайных средах. В настоящее время практически решены задачи о падении плоской волны на одномерный нерегулярный слой и о поле, создаваемом в таком слое одномерным «точечным» источником, т. е. расположенной в точке $z=z_0$ бесконечной излучающей плоскостью [4, 5]. Однако для практических целей (например, для нахождения поля излучения по заданному распределению токов в антенне) необходимо иметь решение задачи о трехмерном точечном источнике. При ее статистическом анализе возникают дополнительные сложности, связанные с необходимостью определения корреляторов полей плоских волн, падающих на слой под различными (в том числе и комплексными) углами.

Действительно, рассмотрим уравнение

$$[\Delta+k^2\varepsilon(z)]\,G(\boldsymbol{R},\boldsymbol{R}_0)=4\pi\delta(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{R}_0)\qquad(k=\omega/c)\,. \tag{1}$$

Вместе с условиями убывания на бесконечности оно описывает поле, создаваемое в точке $\boldsymbol{R}=(x,y,z)$ точечным монохроматическим источником с координатами $\boldsymbol{R}_0=(x_0,y_0,z_0)$. Диэлектрическая проницаемость $\varepsilon(z)$ является случайной функцией вида $\varepsilon(z)=\varepsilon_0+\delta\varepsilon(z)$, причем $\langle\delta\varepsilon(z)\rangle=0$ ($\langle\ldots\rangle$ означает усреднение по ансамблю реализаций). Будем искать решение (1) в виде

$$G(\boldsymbol{R},\boldsymbol{R}_0)=(2\pi)^{-2}\int d\boldsymbol{\varkappa}\exp(i\boldsymbol{\varkappa}\boldsymbol{\rho})\,G(q;z,z_0)\,,$$
$$\boldsymbol{\rho}=(x-x_0,\quad y-y_0).\quad q^2=k^2\varepsilon_0-\varkappa^2\,, \tag{2}$$

где $G(q;z,z_0)$ удовлетворяет одномерному уравнению

$$[d^2/dz^2+q^2+k^2\delta\varepsilon(z)]\,G(q;z,z_0)=4\pi\delta(z-z_0)\,. \tag{3}$$

Из представления (2) следует, что корреляционная функция поля

$K(\boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2; \boldsymbol{R}_0) = \langle G(\boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_0) G^*(\boldsymbol{R}_2, \boldsymbol{R}_0)\rangle$ выражается через корреляторы функций $G(q_1; ...)$ и $G(q_2; ...)$:

$$K(\boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2; \boldsymbol{R}_0) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int\int d\boldsymbol{\varkappa}_1 d\boldsymbol{\varkappa}_2 \exp(i\boldsymbol{\varkappa}_1 \boldsymbol{\rho}_1 - i\boldsymbol{\varkappa}_2 \boldsymbol{\rho}_2) K(q_1, q_2; z_1, z_2; z_0); \quad (4а)$$

$$K(q_1, q_2; z_1, z_2; z_0) = \langle G(q_1; z_1, z_0) G^*(q_2; z_2, z_0)\rangle . \quad (4б)$$

Корреляторы по частотам типа (4б) появляются также при вычислении интенсивности импульсного сигнала в случайной среде [3]. При этом разные q соответствуют разным частотам ω: $q_{1,2} = \omega_{1,2}/c$.

Метод укороченных уравнений Фоккера—Планка (усреднение по быстрой переменной), успешно применяемый в одномерных задачах [4, 5], при расчете средних (4б) приводит к значительным и пока не преодоленным трудностям. Аналогичные корреляторы возникают в теории неупорядоченных конденсированных систем, где высокочастотная проводимость неидеальных металлов выражается через бинарные комбинации одночастичных функций Грина уравнения Шредингера, описывающего движение частицы в поле со случайным потенциалом [6]. В работе [8] была разработана диаграммная техника, позволившая решить задачу о высокочастотной проводимости одномерных металлов. Развитый в [8] подход основывается на том, что в одномерном случае определяющий вклад в проводимость вносят не «лестничные» диаграммы (приводящие в задачах распространения к уравнению переноса излучения [7]), а так называемые сильносвязанные, в которых происходит компенсация быстро осциллирующих фазовых множителей. В методе укороченных уравнений Фоккера—Планка отбору таких диаграмм фактически соответствует усреднение по быстрой переменной.

В работах [9–11] идеи [8] нашли дальнейшее развитие и были применены для решения ряда задач теории неупорядоченных металлов. Ниже мы изложим развитый [8–11] метод вычисления корреляторов типа (4б) и применим его для расчета когерентной составляющей и средней интенсивности (ч. II) поля точечного источника в случайно-стратифицированной среде.

В разд. 2 показано, что для широкого класса случайных полей $\delta\varepsilon(z)$ волновое уравнение можно приближенно свести к матричному дифференциальному уравнению первого порядка, коэффициенты которого являются дельта-коррелированными случайными функциями. В третьем разделе в рамках сделанных в разд. 2 приближений получено специальное операторное представление для функции $G(q; z, z_0) \to \hat{G}(q; z, z_0)$, такое, что вычисление корреляторов $\langle G(q_1) \ldots G^*(q_n)\rangle$ сводится к нахождению среднего значения шпура произведения соответствующих матриц $\mathrm{Sp}\langle \hat{G}(q_1) \ldots \hat{G}^+(q_n)\rangle$. Матричные элементы G_{ik} представлены в виде функционалов от гауссовых дельта-коррелированных случайных полей, для которых выписаны соответствующие дифференциальные уравнения. В разд. 4 рассчитано среднее поле точечного источника (когерентная составляющая) в бесконечной «одномерной» случайной среде.

2. Рассмотрим уравнение

$$\psi''(z) + q^2\psi(z) + k^2\delta\varepsilon(z)\psi(z) = 0, \quad (5)$$

которое описывает распространение в одномерной случайной среде гармоники с волновым вектором $\boldsymbol{k} = (\varkappa_x, \varkappa_y, q)$ или, что то же самое, движение частицы с энергией $E = q^2$ в случайном потенциале $-k^2\delta\varepsilon(z)$. Этот процесс можно трактовать как последовательность актов рассеяния на флуктуациях $\delta\varepsilon$, при которых порождаются волны, распространяющиеся в различных направлениях, т. е. имеющие все возможные q_i (двумерный вектор $\boldsymbol{\varkappa}$ сохраняется). Результирующее поле в каждой точке является суммой полей, рассеянных из всех направлений (q_i)

в данное (q). Если флуктуации $\delta\varepsilon$ интегрально малы, так что

$$k^4\sigma_\varepsilon^2 l^2/q^2 \ll 1, \qquad \sigma_\varepsilon^2 = \langle\delta\varepsilon^2\rangle \tag{6}$$

(l — корреляционная длина флуктуаций $\delta\varepsilon$), рассеяние можно считать слабым, т. е. мало изменяющим величину $E=q^2$ в единичном акте. При этом имеется всего две возможности — рассеяние в исходном направлении распространения волны ($q \to q$) и в зеркальном ($q \to -q$). Поскольку рассеяние на малых флуктуациях имеет резонансный характер (в борновском приближении сечение рассеяния из $\boldsymbol{k}_1$ в $\boldsymbol{k}_2$ пропорционально квадрату модуля амплитуды пространственных гармоник в спектре флуктуаций $\delta\varepsilon$ с периодом $\Lambda=2\pi/|\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}_2|$ [7]), ясно, что основной вклад в формирование поля дают спектральные компоненты $\delta\varepsilon$ с очень большими пространственными периодами (рассеяние вперед) и с $\Lambda \sim \pi/q$ (зеркальное рассеяние с изменением знака q при $\varkappa = \text{const}$).

Приведенные рассуждения позволяют в случае слабого рассеяния на слоистых нерегулярностях случайную функцию $\delta\varepsilon(z)$ приближенно заменить суммой только резонансных гармоник:

$$\delta\varepsilon(z) = \delta\varepsilon_1(z) + \delta\varepsilon_2(z)\exp(2iqz) + \delta\varepsilon_2^*(z)\exp(-2iqz) . \tag{7а}$$

Здесь

$$\delta\varepsilon_1(z) = \int_{-\Delta q}^{\Delta q} dt \exp(itz)\,\delta\tilde{\varepsilon}(t), \quad \delta\varepsilon_2(z) = \int_{-\Delta q}^{\Delta q} dt \exp(itz)\,\delta\tilde{\varepsilon}(t+2q), \tag{7б}$$

$\delta\tilde{\varepsilon}(t)$ — фурье-образ случайной функции $\delta\varepsilon(z)$, причем $\delta\varepsilon_{1,2}(z)$ мало меняются на расстояниях $\Delta z \sim q^{-1}$, так что $\Delta q \ll q$. С другой стороны, будем полагать интервал Δq достаточно большим, чтобы $\delta\varepsilon_{1,2}(z)$ существенно изменялись на длинах, много меньших тех, на которых меняются интересующие нас величины—огибающая волновой функции, когерентная составляющая поля и т. д. Характерным пространственным масштабом изменения указанных функций является так называемый радиус локализации L (см. [12] и разд. 4 настоящей статьи). Неравенство $(\Delta q)^{-1} \ll L$ позволяет при вычислении таких «медленных» величин считать функции $\delta\varepsilon_{1,2}(z)$ дельта-коррелированными гауссовыми процессами.

В методе укороченных уравнений Фоккера—Планка флуктуации $\delta\varepsilon$ предполагаются δ-коррелированными по сравнению с «поперечной» длиной волны $\lambda_z=2\pi/q$. Характерный масштаб l изменения $\delta\varepsilon(z)$ при этом должен удовлетворять системе неравенств

$$(kl)^2\sigma_\varepsilon \ll 1; \tag{8а}$$

$$ql \ll 1; \tag{8б}$$

$$kl\sigma_\varepsilon^2 (k/q)^3 \ll 1 . \tag{8в}$$

Соотношения (8а) и (8б) позволяют произвольную случайную функцию $\delta\varepsilon(z)$ считать δ-коррелированной; условие (8в) является следствием неравенства $qL \gg 1$ и необходимо для выполнения усреднения по быстрой (с масштабом λ_z) переменной. Для перехода же к представлению (7а) нужно только, чтобы существовал интервал Δq, такой, что $L^{-1} \ll \Delta q \ll l$, т. е. неравенство (8б) заменяется на гораздо менее жесткое условие

$$L \gg l, \tag{9}$$

совпадающее с неравенством (6). Неравенство (8а) вообще оказывается лишним. Окончательный критерий применимости резонансного приближения можно представить в виде

$$kl\sigma_{\varepsilon_{1,2}}^2 (k/q)^3 (1+ql) \ll 1 \tag{10}$$

(из (7б) ясно, что $\sigma_{\varepsilon_{1,2}} < \sigma_\varepsilon$). Такое ослабление неравенств происходит благодаря тому, что ограничения накладываются только на выделенные в представлении (7а) огибающие резонансных гармоник $\delta\varepsilon_1(z)$ и $\delta\varepsilon_2(z)$, которые должны быть дельта-коррелированы в смысле (9). При этом «неработающая» часть спектра может быть в значительной степени произвольной.

В соответствии с представлением (7а) для $\delta\varepsilon(z)$ исключим быструю переменную и в искомом поле ψ, т. е. будем искать решение уравнения (5) в виде

$$\psi(z) = \psi_1(z)\exp(-iq'z)+\psi_2(z)\exp(iq'z),$$
$$|q'^2 - q^2| \ll q^2, \tag{11a}$$

причем

$$\psi_{1,2}^{-1}\frac{d\psi_{1,2}}{dz} \sim L^{-1} \ll q. \tag{11б}$$

Подставляя (11а) и (7а) в (5) и отбрасывая в силу (11б) слагаемые $d^2\psi_{1,2}/dz^2$, а также быстро осциллирующие нерезонансные слагаемые, получаем систему уравнений

$$-2iq\psi_1' + k^2\delta\varepsilon_1\psi_1+k^2\delta\varepsilon_2\psi_2=\hat{E}\psi_1,$$
$$2iq\psi_2' + k^2\delta\varepsilon_1\psi_2+k^2\delta\varepsilon_2^*\psi_1=\tilde{E}\psi_2 \quad (\tilde{E}=q'^2-q^2), \tag{12a}$$

которая может быть записана в виде одного матричного уравнения

$$\hat{H}\Psi = \tilde{E}\Psi, \tag{12б}$$

где $\hat{H} = -2iq\hat{\sigma}_3(d/dz)+k^2(\delta\varepsilon_1+\delta\varepsilon_2\hat{\sigma}_1+\delta\varepsilon_2^*\hat{\sigma}_2)$,

$$\Psi = \begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_1 = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_2 = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_3 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}. \tag{12в}$$

Здесь $\delta\varepsilon_1(z)$ — вещественный, а $\delta\varepsilon_2(z)$ — комплексный гауссовы δ-коррелированные (в смысле неравенства (9)) процессы с корреляционными свойствами

$$\langle\delta\varepsilon_{1,2}(z)\rangle = 0, \quad \langle\delta\varepsilon_2(z)\delta\varepsilon_2(z')\rangle=0,$$
$$\langle\delta\varepsilon_1(z)\delta\varepsilon_1(z')\rangle = D_1\delta(z-z'), \quad \langle\delta\varepsilon_2(z)\delta\varepsilon_2^*(z')\rangle = D_2\delta(z-z'). \tag{13}$$

Величины $D_{1,2} = 2l_{1,2}\sigma^2_{\varepsilon_{1,2}}$ определяются из (7б) и соответствующих условий нормировки.

3. Фурье-образ поля точечного источника $G(q; z, z_0)$ является функцией Грина уравнения (5) или эквивалентного ему (при условии (10)) уравнения (12б). Операторная форма функции Грина этого уравнения имеет вид

$$\hat{G}(\tilde{E}) = 4\pi(\tilde{E} - \hat{H})^{-1}, \tag{14}$$

причем условию убывания на бесконечности соответствует наличие у аргумента $\tilde{E}$ в (14) малой положительной мнимой части: $\tilde{E} \to \tilde{E}+i0$.

Ниже мы схематично изложим, следуя [11], процедуру отыскания $G(q; z, z_0)$, т. е. обращения оператора $\hat{T}=\tilde{E}-\hat{H}$ в координатном и двумерном псевдоспинорном пространствах (последнее связано с векторной структурой $\Psi(z)$).

На первом этапе обратим оператор $\hat{T}$ в пространстве, связанном с двумерными матрицами $\hat{\sigma}_{1,2}$. Для этого представим прямой оператор $\hat{T}$ и обратный $\hat{G}$ в виде разложения по базисным матрицам:

$$\hat{T}=\tilde{E}-\hat{H}=T_{11}\hat{\sigma}_1\hat{\sigma}_2+T_{22}\hat{\sigma}_2\hat{\sigma}_1+T_{12}\hat{\sigma}_1+T_{21}\hat{\sigma}_2=\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{21} \end{pmatrix}; \tag{15а}$$

$$\hat{G}=\begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix}. \tag{16а}$$

Матричные элементы в (15а) имеют вид

$$\begin{gathered} T_{11}=\tilde{E}+2iq(d/dz)-k^2\delta\varepsilon_1(z), \quad T_{12}=-k^2\delta\varepsilon_2(z), \\ T_{21}=-k^2\delta\varepsilon_2^*(z), \quad T_{22}=\tilde{E}-2iq(d/dz)-k^2\delta\varepsilon_1(z). \end{gathered} \tag{15б}$$

Воспользовавшись тождеством $\hat{T}\hat{G}=4\pi\hat{I}$ ($\hat{I}$ — единичный оператор) и учитывая некоммутативность операторов T_{ik} из (15б). получим элементы G_{ik} матрицы (16а) в следующей операторной форме:

$$\begin{gathered} G_{11}=4\pi[\tilde{E}+2iq(d/dz)-k^2\delta\varepsilon_1-k^4\delta\varepsilon_2(\tilde{E}-2iq(d/dz)-k^2\delta\varepsilon_1)^{-1}\delta\varepsilon_2^*]^{-1}, \\ G_{22}=4\pi[\tilde{E}-2iq(d/dz)-k^2\delta\varepsilon_1-k^4\delta\varepsilon_2^*(\tilde{E}+2iq(d/dz)-k^2\delta\varepsilon_1)^{-1}\delta\varepsilon_2]^{-1}, \\ G_{12}=k^2(\tilde{E}+2iq(d/dz)-k_2\delta\varepsilon_1)^{-1}\delta\varepsilon_2 G_{22}, \\ G_{21}=k^2(\tilde{E}-2iq(d/dz)-k^2\delta\varepsilon_1)^{-1}\delta\varepsilon_2^* G_{11}. \end{gathered} \tag{16б}$$

Теперь задача состоит в получении координатного представления операторных функций (16б). Введем «невозмущенные» операторные функции

$$G^{(0)}_{\substack{11\\22}}(\tilde{E})=4\pi(\tilde{E}\pm 2iq(d/dz)-k^2\delta\varepsilon_1)^{-1}, \tag{17}$$

координатные матричные элементы которых равны

$$G^{(0)}_{\substack{11\\22}}(\tilde{E}; z_1, z_2)=-\frac{2\pi i}{q}\theta[\pm(z_1-z_2)]\exp\left\{\pm\frac{i}{2q}\int_{z_2}^{z_1}[\tilde{E}-k^2\delta\varepsilon_1(z)]dz\right\}. \tag{18}$$

Здесь $\theta(z)$ — ступенчатая функция, $\theta(z)=1$ при $z>0$, $\theta(z)=1/2$ при $z=0$, $\theta(z)=0$ при $z<0$. Из первого соотношения (16б) и определения (17) следует, что $G_{11}(\tilde{E})$ является решением операторного уравнения

$$G_{11}=G^{(0)}_{11}+\frac{k^4}{(4\pi)^2}G^{(0)}_{11}\delta\varepsilon_2 G^{(0)}_{22}\delta\varepsilon_2^* G_{11}, \tag{19}$$

которое с учетом (18) можно представить в виде следующего интегрального уравнения:

$$G_{11}(\tilde{E}; z_1, z_2) = -\frac{2\pi i}{q}\,\theta(z_1 - z_2)\exp\left\{\frac{i}{2q}\int_{z_2}^{z_1} dz[\tilde{E} - k^2\delta\varepsilon_1(z)]\right\} -$$

$$-\frac{k^4}{4q^2}\int_{-\infty}^{z_1} dz'\delta\varepsilon_2(z')\exp\left\{\frac{i}{2q}\int_{z'}^{z_1} dz[\tilde{E} - k^2\delta\varepsilon_1(z)]\right\}\times \tag{20}$$

$$\times\int_{z'}^{\infty} dz''\delta\varepsilon_2^*(z'')\exp\left\{\frac{i}{2q}\int_{z'}^{z''} dz[\tilde{E} - k^2\delta\varepsilon_1(z)]\right\} G_{11}(\tilde{E}; z'', z_2)\,.$$

Аналогичным образом получается интегральное уравнение для $G_{22}(\tilde{E}; z_1, z_2)$.

Представим теперь G_{11}, G_{22} в виде

$$G_{\substack{11\\22}}(\tilde{E}; z_1, z_2) = -\frac{2\pi i}{q}\exp\left\{\pm i\int_{z_2}^{z_1}\left[\frac{\tilde{E}}{2q} - \eta(z)\right]dz\right\}\Phi_{1,2}(z_1, z_2)\,, \tag{21}$$

где $\Phi_{1,2}$ удовлетворяют соотношениям

$$\Phi_1(z_1, z_2) = \theta(z_1 - z_2) - \int_{-\infty}^{z_1} dz'\xi(z')\int_{z'}^{\infty} dz''\xi^*(z'')\Phi_1(z'', z_2),$$

$$\Phi_2(z_1, z_2) = \theta(z_2 - z_1) - \int_{z_1}^{\infty} dz'\xi^*(z')\int_{-\infty}^{z'} dz''\xi(z'')\Phi_2(z'', z_2). \tag{22}$$

Здесь введены обозначения

$$\xi(z) = \frac{k^2}{2q}\delta\varepsilon_2(z)\exp\left\{-2i\int_0^z dz'\left[\frac{\tilde{E}}{2q} - \eta(z')\right]\right\},$$

$$\eta(z) = \frac{k^2}{2q}\delta\varepsilon_1(z). \tag{23}$$

Матричные элементы $G_{\substack{12\\21}}(\tilde{E}; z_1, z_2)$ записываются аналогично:

$$G_{\substack{12\\21}}(\tilde{E}; z_1, z_2) = -\frac{2\pi}{q}\exp\left\{\pm i\left(\int_0^{z_1} + \int_0^{z_2}\right)dz\left[\frac{\tilde{E}}{2q} - \eta(z)\right]\right\}\Phi_{3,4}(z_1, z_2), \tag{24}$$

причем функции $\Phi_{3,4}(z_1, z_2)$ связаны с $\Phi_{1,2}(z_1, z_2)$ соотношениями

$$\Phi_3(z_1, z_2) = \int_{-\infty}^{z_1} dz'\xi(z')\Phi_2(z', z_2),$$

$$\Phi_4(z_1, z_2) = \int_{z_1}^{\infty} dz'\xi^*(z')\Phi_1(z', z_2)\,. \tag{25}$$

Итак, задача определения матричной функции Грина уравнения (12б) свелась к решению уравнений (22) относительно функций Φ_1 и Φ_2. Получить для них замкнутые выражения при произвольных $\xi(z)$ не удается. Тем не менее структура уравнений (22) позволяет сделать важный для дальнейшего шаг — представить функции $\Phi_{1,2}(z_1, z_2)$, являющиеся решением граничной задачи, в виде комбинации конечного числа функций от одной переменной, каждая из которых есть решение задачи Коши для соответствующего нелинейного дифференциального уравнения первого порядка (в [11] эта процедура проделана при $\eta(z)\equiv 0$). Так как в дальнейшем нам будет необходимо усреднять функции Грина с разными q, заменим величину $\tilde{E}$ на $\tilde{E}+\Omega$.

Оставляя в фазовых множителях формул (21) и (24) только параметр $\tilde{E}$, всю зависимость от Ω перенесем на функции $\Phi_{1,2}(z_1, z_2)$. Для новых функций $\Phi_i^\Omega(z_1, z_2)$ получаются следующие выражения:

$$\Phi_{1,2}^\Omega(z_1, z_2) = \exp\left[\pm\frac{i\Omega}{2q}(z_1 - z_2)\right] A^\Omega(z_2)\left\{\theta \pm \frac{\pi_\pm^\Omega(z_1)}{\pi_\pm^\Omega(z_2)} - \right.$$
$$\left. - \theta_\mp \frac{\gamma_\mp^\Omega(z_1)}{\pi_\mp^\Omega(z_2)} \Gamma_\pm^\Omega(z_2)\exp\left[\mp\frac{i\Omega}{q}(z_1 - z_2) - 2i\int_{-\infty}^{\infty} dz\eta(z)\right]\right\}; \tag{26а}$$

$$\Phi_3^\Omega(z_1, z_2) = \exp\left[\frac{i\Omega}{2q}(z_1 + z_2) - 2i\int_{-\infty}^{0} dz\eta(z)\right] A^\Omega(z_2)\times$$
$$\times\left[\theta_+ \frac{\pi_+^\Omega(z_1)}{\pi_+^\Omega(z_2)} \Gamma_-^\Omega(z_2)\exp\left(-\frac{i\Omega}{q}z_2\right) + \theta_- \frac{\gamma_-^\Omega(z_1)}{\pi_-^\Omega(z_2)}\exp\left(-\frac{i\Omega}{q}z_1\right)\right]; \tag{26б}$$

$$\Phi_4^\Omega(z_1, z_2) = \exp\left[-\frac{i\Omega}{2q}(z_1 + z_2) - 2i\int_0^{\infty} dz\eta(z)\right] A^\Omega(z_2)\times$$
$$\times\left[\theta_+ \frac{\gamma_+^\Omega(z_1)}{\pi_+^\Omega(z_2)}\exp\left(\frac{i\Omega z_1}{q}\right) + \theta_- \frac{\pi_-^\Omega(z_1)}{\pi_-^\Omega(z_2)} \Gamma_+^\Omega(z_2)\exp\left(\frac{i\Omega}{q}z_2\right)\right]; \tag{26в}$$

$$A^\Omega(z) = \left\{1+\Gamma_+^\Omega(z)\Gamma_-^\Omega(z)\exp\left[-2i\int_{-\infty}^{\infty} dz'\eta(z')\right]\right\}^{-1},$$
$$\Gamma_\pm^\Omega(z) = \gamma_\pm^\Omega(z)(\pi_\pm^\Omega(z))^{-1}. \tag{26г}$$

Фигурирующие в (26а)—(26г) величины $\Gamma_\pm^\Omega$, $\pi_\pm^\Omega$ являются функционалами случайных полей и удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\frac{d\Gamma_+^\Omega(z)}{dz} = -\frac{i\Omega}{q}\Gamma_+^\Omega(z) - \xi^*(z)\exp\left[2i\int_0^{\infty} dz'\eta(z')\right] +$$
$$+\xi(z)\exp\left[-2i\int_0^{\infty} dz'\eta(z')\right][\Gamma_+(z)]^2; \tag{27а}$$

$$\frac{d\Gamma_-^\Omega(z)}{dz}=\frac{i\Omega}{q}\Gamma_-^\Omega(z)+\xi(z)\exp\left[2i\int_{-\infty}^{0}dz'\eta(z')\right]-$$

$$-\xi^*(z)\exp\left[-2i\int_{-\infty}^{0}dz'\eta(z')\right][\Gamma_-^\Omega(z)]^2; \tag{27б}$$

$$\frac{d}{dz}\frac{1}{\pi_+^\Omega(z)}=\frac{\Gamma_+^\Omega(z)}{\pi_+^\Omega(z)}\xi(z)\exp\left[-2i\int_{0}^{\infty}dz'\eta(z')\right]; \tag{27в}$$

$$\frac{d}{dz}\frac{1}{\pi_-^\Omega(z)}=-\frac{\Gamma_-^\Omega(z)}{\pi_-^\Omega(z)}\xi^*(z)\exp\left[-2i\int_{-\infty}^{0}dz'\eta(z')\right] \tag{27г}$$

со следующими граничными условиями:

$$\left.\begin{matrix}\Gamma_+^\Omega(z)\to 0\\ \pi_+^\Omega(z)\to 1\end{matrix}\right|_{z\to\infty},\qquad \left.\begin{matrix}\Gamma_-^\Omega(z)\to 0\\ \pi_-^\Omega(z)\to 1\end{matrix}\right|_{z\to-\infty}. \tag{28}$$

Индекс «плюс» у искомых функций означает, что, будучи функционалами случайных полей $\delta\varepsilon_1(z')$, $\delta\varepsilon_2(z')$ и $\delta\varepsilon_2^*(z')$, они определяются значениями этих полей только при $z<z'$, а индекс «минус» относится к функционалам, в которые входят лишь случайные поля с координатами $z>z'$. Это обстоятельство является очень важным, так как благодаря δ-коррелированности случайных полей среднее от произведения произвольных функционалов типа «плюс» и «минус» сводится к произведению средних от функционалов одного «знака».

Заметим, что $\Gamma_\pm(z)$ при $\Omega=0$ имеют вполне определенный физический смысл [4, 11]. Так, $\Gamma_-(z)$ является плавной частью (огибающей) амплитудного коэффициента отражения влево в точке z волны, распространяющейся из $-\infty$. Соответственно $\Gamma_+(z)$ имеет тот же смысл, но для волны, пришедшей в точку z из $+\infty$.

Хотя уравнения (27а)—(27г) решить не удается, тем не менее матричное представление функции Грина с помощью функций (26а)—(26г) является конструктивным при вычислении различных средних по ансамблю реализаций случайной диэлектрической проницаемости. Это связано прежде всего с тем, что в рамках резонансного приближения (см. (7а), (11а) и далее) при усреднении произведения некоторого числа матриц (16а) отличными от нуля оказываются лишь те элементы, которые образуют след этого произведения. Для вычисления таких средних не нужно знать явный вид функционалов $\Gamma_\pm^\Omega$ и $\pi_\pm^\Omega$, а можно воспользоваться рекуррентными соотношениями, вывод которых основан на функциональной форме уравнений (27а)—(27г) и условиях (28). Эти соотношения будут приведены в ч. II при вычислении интенсивности. В следующем же разделе данной статьи мы рассмотрим более простую задачу определения среднего поля (когерентной составляющей) точечного источника в одномерной случайной среде.

4. В соответствии с формулой (2) среднее поле представляется интегралом

$$\langle G(\boldsymbol{R},\boldsymbol{R}_0)\rangle=\int_0^{\varkappa_m}\frac{\varkappa d\varkappa}{q}J_0(\varkappa\rho)\langle[G_{11}(z,z_0)\exp[iq(z-z_0)]+$$

$$+G_{22}(z,z_0)\exp[-iq(z-z_0)]]\rangle. \tag{29}$$

Здесь $J_0(\varkappa)$ — функция Бесселя, $\rho=|\boldsymbol{\rho}|$, $\varkappa_m=k\sqrt{\varepsilon_0}$. Формула (29) учитывает вклад в поле только гармоник с $E=q^2>0$. Гармоники с $E<0$

рассеиваются сильно и локализованы по координате z в слое $|z-z_0|\sim L^{(-)}$, толщина которого $L^{(-)}$ значительно меньше радиуса локализации слабо рассеивающихся гармоник с $E>0$ [6]. Далее мы всюду будем предполагать выполненным неравенство

$$|z-z_0|\gg L^{(-)}, \tag{30}$$

позволяющее пренебречь гармониками с $E<0$.

Рассмотрим величину

$$Y_1(z,z_0)=G_{11}(z,z_0)\exp\left[iq(z-z_0)\right]. \tag{31}$$

Подставив (26а) в (21), запишем дробь $A(z)$ из (26г) в виде ряда по степеням второго слагаемого в знаменателе. Учитывая, что функционалы типа «плюс» и «минус» усредняются независимо, получим в результате усреднения (31) из всех членов ряда отличным от нуля только первый, не содержащий $\Gamma_\pm(z_0)$. Это связано с тем, что в указанных функционалах, в отличие от $\pi_\pm$, содержится неравное количество полей ξ и ξ^*. По этой же причине в формуле (26а) для Φ_1 следует оставить только слагаемое с θ_+.

Сделаем преобразование Фурье величины Y_1 из (31):

$$\begin{gathered}Y_1^s(z_0)=\int dz\exp\left[-is(z-z_0)\right]Y_1(z,z_0)=\\=i\int_{z_0}^{\infty}dz\exp\left[i(q-s)(z-z_0)-i\int_{z_0}^{z}dz'\eta(z')\right]\frac{\pi_+(z)}{\pi_+(z_0)}.\end{gathered} \tag{32}$$

Эта функция удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\begin{gathered}\frac{dY_1^s(z)}{dz}=-i+i[s-q+\eta(z)]Y_1^s(z)+\Gamma_+(z)Y_1^s(z)\times\\\times\,\xi(z)\exp\left[-2i\int_0^{\infty}dz'\eta(z')\right]\end{gathered} \tag{33}$$

с очевидным граничным условием $Y_1^s(z)\to 0$ $(z\to\infty)$. Для статистически однородной среды, усредняя (33), получим соотношение

$$\begin{gathered}(s-q)\langle Y_1^s(z)\rangle+\langle\eta(z)Y_1^s(z)\rangle-\\-i\langle\tilde{\xi}(z)\Gamma_+(z)Y_1^s(z)\rangle=1.\end{gathered} \tag{34}$$

Здесь мы ввели новое случайное поле

$$\tilde{\xi}(z)=\xi(z)\exp\left[-2i\int_0^{\infty}dz'\eta(z')\right], \tag{35}$$

корреляционные свойства которого совпадают с корреляционными свойствами поля $\xi(z)$.

Второй и третий корреляторы в левой части (34) могут быть вычислены с помощью формулы Новикова—Фуруцу [4]. Для этого необходимо знать функциональные производные от усредняемых величин по полям $\tilde{\xi}^*(z')$ и $\eta(z')$ при $z'\to z+0$. Из уравнений (27а) и (33) следует

$$\frac{\delta\Gamma_+(z)}{\delta\tilde{\xi}^*(z+0)}=1,\qquad\frac{\delta Y_1^s(z)}{\delta\tilde{\xi}^*(z+0)}=0,\qquad\frac{\delta Y_1^s(z)}{\delta\eta(z+0)}=-iY_1^s(z). \tag{36}$$

С помощью формул (36) из (34) находим

$$\langle Y_1^s(z)\rangle = \left[q - s + \frac{i}{2}(L_1^{-1} + L_2^{-1})\right]^{-1}. \tag{37}$$

Здесь величины $L_{1,2}(q) = 4q^2/k^4D_{1,2}$ (см. (13)) имеют смысл радиусов локализации (длин экстинкции), связанных с рассеянием «вперед» (L_1) и «назад» (L_2) q-й гармоники поля.

Выполняя аналогичные расчеты для второго слагаемого в (29), получим следующий результат:

$$\langle Y_2^s(z)\rangle = \left[q + s + \frac{i}{2}(L_1^{-1} + L_2^{-1})\right]^{-1}. \tag{38}$$

Обратное преобразование Фурье суммы величин (37) и (38) дает формулу для среднего поля:

$$\langle G(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{R}_0)\rangle = -i \int_0^{\varkappa_m} \frac{\varkappa d\varkappa}{q} J_0(\varkappa\rho) \exp\left\{\left[-\frac{1}{2}(L_1^{-1} + L_2^{-1}) + iq\right]|z - z_0|\right\}. \tag{39}$$

Поскольку среднее поле в области координат, удовлетворяющей неравенству

$$\varkappa_m|z - z_0| \gg 1, \tag{40}$$

определяется в основном гармониками с $\varkappa \ll \varkappa_m$, показатель экспоненты в (39) можно разложить по малым $\varkappa/\varkappa_m$ и распространить интегрирование по $\varkappa$ до бесконечности:

$$\langle G(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{R}_0)\rangle \simeq -\frac{1}{|z - z_0|} \exp\left\{i\frac{\varkappa_m\rho^2}{2|z - z_0|} + i\varkappa_m|z - z_0| - \right.$$
$$\left. - \frac{|z - z_0|}{2}(L_{1m}^{-1} + L_{2m}^{-1})\left[1 + \frac{\rho^2}{(z - z_0)^2}\right]\right\}. \tag{41}$$

Здесь L_{1m}, L_{2m} — радиусы локализации гармоники с $\varkappa = 0$ ($q = \varkappa_m$).

Как видно из (41), убывание среднего поля по координате z определяется, вообще говоря, обоими радиусами локализации $L_{1,2m}$, т. е. потеря когерентности происходит как за счет рассеяния назад, так и вследствие рассеяния вперед. Напротив, в убывание средней интенсивности сигнала рассеяние «вперед» в рамках резонансного приближения вообще вклада не дает. Интенсивность определяется интерференцией полей, многократно рассеянных «назад» (зеркально), и затухает в z-направлении на расстоянии L_2. Подробный расчет средней интенсивности, а также среднего потока энергии через бесконечную плоскость $z = \mathrm{const}$ будет приведен в части II данной работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фрейлихер В. Д., Фукс И. М. Препринт ИРЭ АН СССР № 9 (381). М., 1984.
2. Кукушкин А. В., Фрейлихер В. Д., Фукс И. М. // Изв. вузов. Радиофизика. 1983. Т. 26. № 9. С. 1064.
3. Абрамович Б. С., Гурбатов С. Н. // Изв. вузов. Радиофизика. 1980. Т. 23. № 4. С. 442.
4. Кляцкин В. И. Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах. — М.: Наука, 1980.
5. Кляцкин В. И. Метод погружения в теории распространения волн. — М.: Наука, 1987.
6. Лифшиц И. М., Гредескул С. А., Пастур Л. А. Введение в теорию неупорядоченных систем. — М.: Наука, 1982.
7. Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И. Введение в статистическую радиофизику. — М.: Наука, 1978. Ч. II.

8. Березинский В. Л. // ЖЭТФ. 1973. Т. 65. № 1. С. 125.
9. Abrikosov A. A., Ryzhkin I. A. // Adv. Phys. 1978. V. 27. № 2. P. 147.
10. Gogolin A. A. // Phys. Reports. 1982. V. 86. № 1. P. 1.
11. Kaner E. A., Chebotarev L. V. // Phys. Reports. 1987. V. 150. № 3—4. P. 179.
12. Гредескул С. А., Фрейлихер В. Д. // Изв. вузов. Радиофизика. 1987. Т. 31. № 10. С. 1210.

Институт радиофизики и электроники
АН УССР

Поступила в редакцию
1 февраля 1988 г.

FIELD FROM A POINT SOURCE IN A RANDOM STRATIFIED MEDIUM. I. RESONANCE EXPANSION TECHNIQUE

Yu. V. Tarasov, V. D. Freulicher

A method for calculating the frequency correlators of wave fields propagating through a random stratified medium is presented. It proceeds from approximate representations for the random refractive index and the wave field, with allowance for the resonance character of scattering. The coherent component of the field from the point source has been calculated.

ПЕРЕЧЕНЬ СОВЕТСКИХ ЖУРНАЛОВ, ПЕРЕИЗДАННЫХ ЗА РУБЕЖОМ В ПОЛНОМ ОБЪЕМЕ

(Продолжение)

126. Проблемы передачи информации
127. Проблемы прочности
128. Программирование
129. Радиотехника
130. Радиотехника и электроника
131. Радиохимия
132. Сварочное производство
133. Сверхтвердые материалы
134. Сибирский математический журнал
135. Станки и инструмент
136. Стекло и керамика
137. Теоретическая и математическая физика
138. Теоретическая и экспериментальная химия
139. Теоретические основы химической технологии
140. Теория вероятности и ее применение
141. Теория вероятности и математическая статистика
142. Теплофизика высоких температур
143. Теплоэнергетика
144. Трение и износ
145. Труды МИАН им. Стеклова
146. Труды Московского математического общества
147. Украинский математический журнал
148. Украинский химический журнал
149. Успехи математических наук
150. Успехи физических наук
151. Успехи химии
152. Физика горения и взрыва
153. Физика и техника полупроводников
154. Физика и химия стекла
155. Физика металлов и металловедение
156. Физика низких температур
157. Физика плазмы
158. Физика твердого тела
159. Физика элементарных частиц и атомного ядра
160. Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых
161. Физико-химическая механика материалов
162. Физиология растений
163. Физиология человека
164. Функциональный анализ и его приложения
165. Химико-фармацевтический журнал

(Окончание см. с. 1403)