

УДК 534.2:519.6

ПРИМЕНЕНИЕ ПРИНЦИПА ПРЕДЕЛЬНОЙ АМПЛИТУДЫ ДЛЯ РАСЧЕТА ПОЛЕЙ В СЛОИСТОЙ СРЕДЕ

Н. К. Вдовичева, И. А. Шерешевский

На основе принципа предельной амплитуды выводятся интегральные представления для поля и мощности излучения гармонического источника в слоистой среде. Приводятся результаты модельных расчетов, иллюстрирующие возможности программ, разработанных на базе этих интегральных представлений.

В настоящей работе с помощью принципа предельной амплитуды [1] получено интегральное представление решения уравнения Гельмгольца в слоистой среде. Это представление отличается от «представления в виде преобразования Ганкеля» [2, 3] тем, что формальному выражению, содержащему расходящийся интеграл, придан ясный математический смысл, позволяющий, в частности, построить численный алгоритм. Отметим, что последовательное применение принципа предельной амплитуды позволяет избежать использования «условий излучения» при построении решения уравнения Гельмгольца, которые в волноводной ситуации формулируются довольно сложно. С точки зрения численной реализации это представление, на наш взгляд, удобнее, чем представления с интегралами вдоль линий ветвления и комплексными полюсами [4], так как вычисление последних представляет значительные трудности.

Использование принципа предельной амплитуды (или эквивалентного ему принципа предельного поглощения) позволяет также строго вывести сравнительно простое интегральное представление для мощности излучения гармонического источника в слоистой среде*. Заметим, что мощность излучения является важной характеристикой источника, но расчеты ее с учетом влияния неоднородностей среды ранее не проводились. Построенное интегральное представление позволяет разработать достаточно быстродействующие программы расчета мощности излучения в слоистой среде. Некоторые результаты модельных расчетов приведены в последнем разделе работы.

Авторы благодарят М. А. Антонца и И. Ш. Фикса за многочисленные плодотворные обсуждения.

1. Принцип предельной амплитуды и представление решения уравнения Гельмгольца в слоистой среде. Пусть \hat{A} — самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве \tilde{H} . Рассмотрим задачу Коши:

$$\begin{cases} -i(\partial u / \partial t) = \hat{A}u + f(t) \\ u(0) = u_0, \quad u(t), f(t) \in \tilde{H} \end{cases} \quad (1)$$

Пусть $f(t) = e^{i(\omega + i\varepsilon)t}$, $\varepsilon, \omega > 0$, а $u_\varepsilon(t)$ — решение задачи (1) с такой правой частью. Предположим, что существует слабый предел

$$v = \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} e^{-i\omega t} u_\varepsilon(t). \quad (2)$$

* На 11-й Всесоюзной конференции «Техника и методика акустического зондирования океана» (сентябрь 1987 г.), где докладывались результаты этой работы, был представлен также доклад Журавлева, Кобозева и Кравцова, в котором другим путем получено аналогичное выражение для мощности излучения [12].

Тогда v называется стационарным решением уравнения (1) частоты ω .
Ниже мы покажем, что v удовлетворяет стационарному уравнению

$$(\omega - \hat{A})v = (1/i)f_0, \quad (3)$$

и приведем условия, при которых существует предел (2).

В силу самосопряженности оператора \hat{A} существует сильно непрерывная полугруппа операторов $\hat{U}(t)$, такая, что [5]

$$i \frac{d\hat{U}(t)}{dt} = \hat{A}\hat{U}(t), \quad \hat{U}(0) = \hat{E}.$$

Решение задачи (1) может быть записано в виде

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(t) &= \hat{U}(t)u_0 + \int_0^t \hat{U}(t-\tau)f_\varepsilon(\tau)d\tau = \\ &= \hat{U}(t)u_0 + (1/i)(\omega + i\varepsilon - \hat{A})^{-1}[e^{i(\omega+i\varepsilon)t}\hat{E} - \hat{U}(t)]f_0. \end{aligned} \quad (4)$$

Предположим, что для любого $\omega \in \tilde{H}$ $\hat{U}(t)\omega$ слабо сходится к нулю при $t \rightarrow \infty$. Эта гипотеза является основной для применения принципа предельной амплитуды. Физический смысл ее состоит в том, что на больших временах можно пренебречь вкладом в решение начального возмущения u_0 . Для справедливости ее достаточно абсолютной непрерывности спектра оператора \hat{A} . Если эта гипотеза выполнена, из (4) следует, что

$$v = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} ((1/i)(\omega + i\varepsilon - \hat{A})^{-1}f_0). \quad (5)$$

Если этот предел существует, то

$$\begin{aligned} ((\omega - \hat{A})v, \omega) &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} ((1/i)(\omega + i\varepsilon - \hat{A})^{-1}(\omega - \hat{A})f_0, \omega) = \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} ((1/i)f_0, \omega) - i\varepsilon((1/i)(\omega + i\varepsilon - \hat{A})^{-1}f_0, \omega) = 1/i(f_0, \omega), \end{aligned} \quad (6)$$

откуда следует, что v есть обобщенное решение уравнения (3).

Рассмотрим волновое уравнение в слоисто-неоднородной среде

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c^2(z)\Delta\varphi + \Phi(t, \mathbf{x}), & \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad \mathbf{x} = (x, y, z) \\ \varphi(0, \mathbf{x}) = \varphi_0(\mathbf{x}) \\ \varphi'_t(0, \mathbf{x}) = \varphi_1(\mathbf{x}) \end{cases}, \quad (7)$$

где $\varphi(t, \mathbf{x})$ — волновой потенциал, $\Phi(t, \mathbf{x})$ — плотность распределения источников. Для того чтобы свести эту задачу к виду (1), введем гильбертово пространство \tilde{H} , состоящее из вектор-функций

$$u = (u_0, u_1, u_2, u_3), \quad u_j \in L_2(\mathbb{R}^3), \quad (u, u') = \sum_j (u_j, u'_j),$$

и рассмотрим в \tilde{H} оператор

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & -ic(x_3) \frac{\partial}{\partial x_1} & -ic(x_3) \frac{\partial}{\partial x_2} & -ic(x_3) \frac{\partial}{\partial x_3} \\ -i \frac{\partial}{\partial x_1} c(x_3) & 0 & & \\ -i \frac{\partial}{\partial x_2} c(x_3) & 0 & & \\ -i \frac{\partial}{\partial x_3} c(x_3) & 0 & & \end{pmatrix}, \quad (8)$$

где $(x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$. Нетрудно проверить, что \hat{A} симметричен в \bar{H} и уравнение (1) с оператором (8) и правой частью $f = (c^{-1}\Phi_0, 0, 0, 0)$ сводится к уравнению (7) для функции $\varphi = cu_0$. Обратное, если положить $u_0 = c^{-1} \frac{\partial \varphi}{\partial t}$, $u_j = \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}$, где φ — решение (7), то вектор u будет решением задачи (1) с оператором (8).

Таким образом, мы можем применить принцип предельной амплитуды для построения стационарного решения уравнения (7). Для этого необходимо, чтобы оператор (8) удовлетворял условию (5). Строгое доказательство этого довольно сложно [6], а физический смысл в данном случае состоит в том, что локализованные в пространстве начальные возмущения на больших временах уходят на бесконечность в силу уравнения (7). Для волнового уравнения в однородной среде этот факт хорошо известен, и мы будем предполагать его выполненным в рассматриваемом случае.

Для вычисления стационарного решения необходимо, в силу (5), решить уравнение

$$(\omega + i\varepsilon - \hat{A})u_\varepsilon = -if_0, \quad (9)$$

где \hat{A} — оператор вида (8), а $f_0 = (c^{-1}\Phi_0(x), 0, 0, 0)$, и затем перейти к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Уравнение (9) несложным преобразованием сводится к виду

$$c\Delta cu_{0,\varepsilon} + (\omega + i\varepsilon)^2 u_{0,\varepsilon} = -i(\omega + i\varepsilon)c^{-1}\Phi_0. \quad (10)$$

Поскольку оператор $c\Delta c$ самосопряжен, а $\text{Im}(\omega + i\varepsilon)^2 \neq 0$, это уравнение имеет единственное решение в $L^2(\mathbf{R}^3)$, если $\Phi_0 \in L_2(\mathbf{R}^3)$. Для вычисления этого решения воспользуемся тем, что функция зависит только от $x_3 = z$, и сделаем преобразование Фурье по x_1, x_2 . Тогда (10) сведется к краевой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения

$$c \frac{d^2}{dz^2} \tilde{c}u_{0,\varepsilon} - \xi^2 c^2(z) \tilde{u}_{0,\varepsilon} + (\omega + i\varepsilon)^2 \tilde{u}_{0,\varepsilon} = -i(\omega + i\varepsilon)c^{-1}\tilde{\Phi}_0, \quad (11)$$

где

$$\tilde{u}(\xi, x_3) = \int u(x_1, x_2, x_3) \exp[i(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2)] dx_1 dx_2, \quad \xi^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2.$$

а краевые условия для \tilde{u} имеют вид $\tilde{u}(\xi, \pm\infty) = 0$, если уравнение рассматривать во всем пространстве \mathbf{R}^3 или $\tilde{u}(\xi, +\infty) = 0$, $\tilde{u}(\xi, 0) = 0$, и (7) рассматривается в полупространстве $x_3 > 0$ с условием $\varphi(x_1, x_2, 0) = 0$. Далее мы будем использовать именно такие граничные условия.

Для решения (11) введем функции $\psi_\pm(z, \xi^2, \lambda)$, так что

$$c \frac{d^2}{dz^2} c\psi_\pm - \xi^2 c\psi_\pm + \lambda\psi_\pm = 0 \quad (12)$$

и $\psi_+(0, \xi^2, \lambda) = 0$, $\psi_- (+\infty, \xi^2, \lambda) = 0$. Нетрудно проверить, что вронскиан $W(\psi_+, \psi_-) = \psi_+ \psi'_- - \psi'_+ \psi_- = c^{-2}(z) W(\xi^2, \lambda)$ при $\text{Im } \lambda \neq 0$. Для двух точек z, z' обозначим $z_< = \min(z, z')$, $z_> = \max(z, z')$. Тогда решение уравнения (11) можно записать в виде

$$\tilde{u}_{0, \varepsilon}(\xi, z) = -i \int_0^\infty dz' \frac{\psi_+(z_<, \xi^2, \lambda) \psi_-(z_>, \xi^2, \lambda)}{W(\xi^2, \lambda)} \frac{\omega + i\varepsilon}{c^2(z')} \Phi_0(\xi, z'),$$

где $\lambda = (\omega + i\varepsilon)^2$. Применяв обратное преобразование Фурье, получим решение (10) в виде

$$u_{0, \varepsilon}(x) = \frac{(\omega + i\varepsilon)}{2\pi i} \int_0^\infty dz' \int_0^\infty dx'_\perp \Phi_0(x'_\perp, z') c^{-2}(z') \times \quad (13)$$

$$\times \int_0^\infty \xi d\xi J_0(\xi |x_\perp - x'_\perp|) \frac{\psi_+(z_<, \xi^2, \lambda) \psi_-(z_>, \xi^2, \lambda)}{W(\xi^2, \lambda)},$$

где $x_\perp = (x, y)$. Эта формула аналогична известному «представлению в виде преобразования Ганкеля» [3], но в отличие от него не содержит особенностей в подынтегральном выражении.

Чтобы закончить построение стационарного решения, необходимо перейти к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ в выражении (13). Для этого заметим, что при вещественных λ функция $W(\xi^2, \lambda)$ как функция комплексной переменной ξ^2 имеет простые нули на вещественной оси при $\xi^2 = \xi_m^2$, где ξ_m^2 — точки дискретного спектра оператора Штурма—Лиувилля:

$$\hat{L}_\omega = d^2/dz^2 + \omega^2/c^2(z). \quad (14)$$

Как известно [2], этих точек конечное число и они расположены в области $\omega^2/c^2(\infty) < \xi_m^2 < \omega^2/c_{\min}^2$. Функции ψ_\pm имеют предел при $\varepsilon \rightarrow 0$ для всех ξ , что позволяет применить для вычисления предела (6) формулы Сохоцкого [7]. Окончательно получаем

$$u_0(x) = \int_0^\infty dz' \int_0^\infty dx'_\perp \Phi_0(x'_\perp, z') c^{-2}(z') \left\{ \frac{\omega}{4} \sum_m J_0(\xi_m |x_\perp - x'_\perp|) \frac{\tilde{\psi}_m(z) \tilde{\psi}_m(z')}{c(z) c(z')} - \right. \quad (15)$$

$$\left. - \frac{i\omega}{2\pi} \int_0^\infty \xi d\xi J_0(\xi |x_\perp - x'_\perp|) \frac{\tilde{\psi}_+(z_<, \xi^2, \omega^2) \tilde{\psi}_-(z_>, \xi^2, \omega^2)}{W(\xi^2, \omega^2)} \right\},$$

где $\tilde{\psi}_m(z)$ — собственные функции оператора (14), нормированные условием $\int_0^\infty \tilde{\psi}_m^2(z) dz = 1$, $\tilde{\psi}_\pm(z)$ — предельные значения решений уравнения

$$(\hat{L}_\omega - \xi^2) \tilde{\psi}_\pm = 0 \quad (16)$$

при $\text{Im } \omega \downarrow 0$, удовлетворяющие граничным условиям, соответственно, при $z=0(+)$ и $z=\infty(-)$, \int — интеграл в смысле главного значения.

Из (3) и (10) следует, что функция $u_0(x)c(z)$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца. Выражение в фигурных скобках, входящее в пред-

ставление (15), есть функция Грина уравнения Гельмгольца и может быть положено в основу численного алгоритма.

2. Мощность излучения источника в слоистой среде. В этом разделе мы используем формулы (13) и (15) для вывода интегрального представления для мощности излучения.

Согласно [8] мощность излучения гармонического источника задается выражением

$$N = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} \operatorname{Re} p v_n^* ds, \quad (17)$$

где p , v_n — комплексные амплитуды давления и нормальной к поверхности Σ компоненты колебательной скорости, Σ — замкнутая поверхность, окружающая источник. Величины p и v выражаются через волновой потенциал соотношениями

$$p = i\omega\rho u, \quad v = -\nabla u, \quad (18)$$

а сам потенциал u представляет собой удовлетворяющее принципу предельной амплитуды решение уравнения Гельмгольца (10). Для простоты мы рассмотрим здесь случай, когда плотность распределения источников имеет вид $\delta(\mathbf{r})f(z)$, скорость распространения волн $c(z) = c_1$ при $z > H$ и плотность среды $\rho(z) = 1$.

Согласно принципу предельной амплитуды $N = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} N_\varepsilon$, где N_ε выражается через решение u_ε уравнения (10) с помощью формул (17) и (18). Выберем в качестве Σ поверхность цилиндра радиуса R и высоты z , ось которого совпадает с прямой $R=0$. Тогда $N_\varepsilon = N_\varepsilon^0(R) + N_\varepsilon^v(z, R) + N_\varepsilon^g(z, R)$, где слагаемые справа — интегралы по верхнему и нижнему основаниям и боковой поверхности цилиндра Σ соответственно. В силу граничных условий $N_\varepsilon^0(R) = 0$, так что $N = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} N_\varepsilon^v(z, R) + \lim_{\varepsilon \downarrow 0} N_\varepsilon^g(z, R)$. Поскольку N не зависит от выбора Σ , то $N = \lim_{z \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} N_\varepsilon^v(z, R) + \lim_{z \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} N_\varepsilon^g(z, R)$. Так как функции $u(z, R)$ и $(\partial u / \partial R)(z, R)$ равномерно ограничены по R при $z \rightarrow \infty$, первый из этих пределов не превосходит величины aR^2 , где a — некоторая константа. Во втором слагаемом можно поменять местами пределы по ε и z . Обозначим $N_R = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} N_\varepsilon^g(\infty, R)$. Ниже мы покажем, что величина N_R не зависит от R . В силу приведенной оценки отсюда следует, что $\lim_{z \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} N_\varepsilon^v(z, R) = 0$ и $N = N_R$.

Для вычисления $N_R^g(\infty, R)$ введем скалярное произведение

$$(f, g) = \int_0^\infty dz f(z) g^*(z)$$

(*) означает комплексное сопряжение). Тогда $N_R^g(\infty, R)$ можно записать в виде

$$N_R^g(\infty, R) = -\pi R \omega \operatorname{Im}(u_\varepsilon, \partial u_\varepsilon / \partial R).$$

Согласно (13),

$$u_\varepsilon(z, R) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \xi d\xi (\hat{L} - \lambda_\varepsilon^2)^{-1} f J_0(\xi R),$$

где \hat{L} определяется выражением (14), а $\lambda_\varepsilon^2 = \xi^2 - i\varepsilon$. Поэтому

$$\left(u, \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial R}\right) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_0^\infty \xi d\xi \xi' d\xi' J_0(\xi, R) \frac{\partial J_0(\xi, R)}{\partial R} ((\hat{L} - \lambda_\varepsilon^2)f, (\hat{L} - \lambda_\varepsilon'^2)f).$$

Из самосопряженности \hat{L} следует, что

$$((\hat{L} - \lambda)^{-1}f, (\hat{L} - \mu)^{-1}f) = ((\hat{L} - \mu^*)^{-1}(\hat{L} - \lambda)^{-1}f, f),$$

откуда с помощью уравнения Гильберта для резольвенты [5]

$$(\hat{L} - \lambda)^{-1}(\hat{L} - \mu)^{-1} = \frac{1}{\lambda - \mu} ((\hat{L} - \lambda)^{-1} - (\hat{L} - \mu)^{-1})$$

получим

$$\begin{aligned} \left(u_\varepsilon, \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial R}\right) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty \xi d\xi \frac{\partial J_0(\xi R)}{\partial R} ((\hat{L} - \lambda_\varepsilon^2)^{-1}f, f) \int_0^\infty \frac{\xi' J_0(\xi' R) d\xi'}{\xi^2 - \xi'^2 + 2i\varepsilon} - \\ &- \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty \xi d\xi J_0(\xi R) ((\hat{L} - \lambda_\varepsilon^2)^{-1}f, f) \int_0^\infty \frac{\xi' (\partial J_0(\xi' R) / \partial R) d\xi'}{\xi'^2 - \xi^2 + 2i\varepsilon}. \end{aligned} \quad (19)$$

С помощью соотношений [9]

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{J_0(ax) dx}{x-y} = -Y_0(a|y|), \quad -\infty < y < \infty$$

можно показать, что

$$\int_0^\infty \frac{\xi' d\xi' J_0(\xi' R)}{(\xi^2 - \xi'^2) + 2i\varepsilon} = \frac{-i\pi}{2} H_0^{(1)}(\sqrt{\xi^2 + 2i\varepsilon} R), \quad (20)$$

$$\int_0^\infty \frac{\xi' d\xi' J_0(\xi' R)}{-(\xi^2 - \xi'^2) + 2i\varepsilon} = \frac{-i\pi}{2} H_0^{(2)}(\sqrt{\xi^2 - 2i\varepsilon} R).$$

Подставив (20) и переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, получим по формуле Сохоцкого [7], что

$$\left(u, \frac{\partial u}{\partial R}\right) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left(u_\varepsilon, \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial R}\right) = \frac{-i}{8\pi} \int_0^\infty \xi d\xi \left\{ \frac{\partial J_0(\xi R)}{\partial R} H_0^{(1)}(\xi R) ((\hat{L} - \xi^2 - i0)^{-1}f, f) - \right. \quad (21)$$

$$\left. - J_0(\xi R) \frac{\partial H_0^{(2)}(\xi R)}{\partial R} ((\hat{L} - \xi^2 + i0)^{-1}f, f) \right\} +$$

$$+ \frac{1}{16} \sum_m |a_m|^2 \left\{ \frac{\partial J_0(\xi_m R)}{\partial R} H_0^{(1)}(\xi_m R) + J_0(\xi_m R) \frac{\partial H_0^{(2)}(\xi_m R)}{\partial R} \right\},$$

где $a_m = \int_0^\infty f \varphi_m dz / \int_0^\infty \varphi_m^2 dz$ — коэффициент возбуждения m -й моды. Учитывая, что вронсиан $W(J(z), Y(z)) = 2/\pi z$, нетрудно видеть, что мнимая часть суммы в (21) есть

$$\text{Im} \left(\frac{1}{16} \sum_m |a_m|^2 \left\{ \frac{\partial J_0(\xi_m R)}{\partial R} H_0^{(1)}(\xi_m R) + J_0(\xi_m R) \frac{\partial H_0^{(2)}(\xi_m R)}{\partial R} \right\} \right) = \frac{-1}{8\pi R} \sum_m |a_m|^2.$$

Разобьем интеграл в (21) на сумму интегралов по интервалам $(0, k_l)$ и (k_l, ∞) , где $k_l = \omega/c_l$. Обозначим

$$G(z, z', \lambda) = \frac{\tilde{\psi}_+(z <, \lambda) \tilde{\psi}_-(z >, \lambda)}{W(\tilde{\psi}_+, \tilde{\psi}_-)},$$

где $\tilde{\psi}_\pm$ — те же, что и в (16). Тогда

$$((\hat{L} - \lambda)^{-1}f, f) = \int_0^\infty \int_0^\infty dz dz' G(z, z', \lambda) f(z) f^*(z'). \quad (22)$$

Поскольку при $\xi > k_l$ функции $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \tilde{\psi}_\pm(z, \lambda)$ вещественны, то вещественна и квадратичная форма $((\hat{L} - \xi^2 \pm i0)^{-1}f, f)$. Пользуясь этим, нетрудно показать, что

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \left(\frac{-i}{8\pi} \int_{k_l}^\infty \xi d\xi \left\{ \frac{\partial J_0(\xi R)}{\partial R} H_0^{(1)}(\xi R) ((L - \xi^2 - i0)^{-1}f, f) - J_0(\xi R) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \frac{\partial H_0^{(2)}(\xi R)}{\partial R} ((\hat{L} - \xi^2 + i0)^{-1}f, f) \right\} \right) = 0. \end{aligned}$$

При $\xi \leq k_l$ положим $((\hat{L} - \xi^2 - i0)^{-1}f, f) = A(\xi) - iB(\xi)$. Тогда

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \left(-\frac{i}{8\pi} \int_0^{k_l} \xi d\xi \left\{ \frac{\partial J_0(\xi R)}{\partial R} H_0^{(1)}(\xi R) ((\hat{L} - \xi^2 - i0)^{-1}f, f) - J_0(\xi R) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \frac{\partial H_0^{(2)}(\xi R)}{\partial R} ((\hat{L} - \xi^2 + i0)^{-1}f, f) \right\} \right) = \frac{1}{4\pi^2 R} \int_0^{k_l} \xi B(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Для определения $B(\xi)$ заметим, что

$$\operatorname{Im}(\tilde{\psi}_-(z >) W^*(\tilde{\psi}_+, \tilde{\psi}_-)) = -(k_l^2 - \xi^2)^{-1/2} \tilde{\psi}_+(z >). \quad (23)$$

Подставляя (23) в выражение для мнимой части (22), получим

$$B = \frac{\sqrt{k_l^2 - \xi^2}}{|W(\tilde{\psi}_+, \tilde{\psi}_-)|^2} \left| \int_0^\infty f(z) \tilde{\psi}_+(z) dz \right|^2,$$

причем $W(\tilde{\psi}_+, \tilde{\psi}_-) = \tilde{\psi}'_+(H) + i\sqrt{k_l^2 - \xi^2} \tilde{\psi}_+(H)$.

Таким образом,

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \left(u, \frac{\partial u}{\partial R} \right) = -\frac{1}{4\pi^2 R} \int_0^{k_l} \frac{\xi d\xi \sqrt{k_l^2 - \xi^2}}{(\tilde{\psi}'_+(H))^2 + (k_l^2 - \xi^2)(\tilde{\psi}_+(H))^2} \times \\ \times \left| \int_0^\infty f(z) \tilde{\psi}_T(z) dz \right|^2 - \frac{1}{8\pi R} \sum_m |a_m|^2. \end{aligned}$$

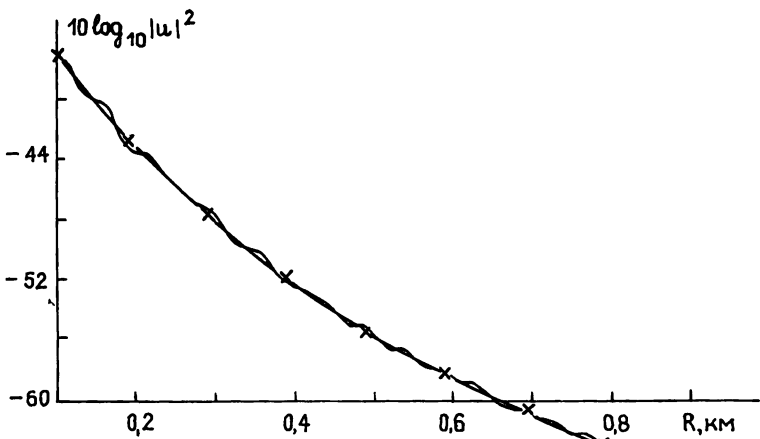


Рис. 1.

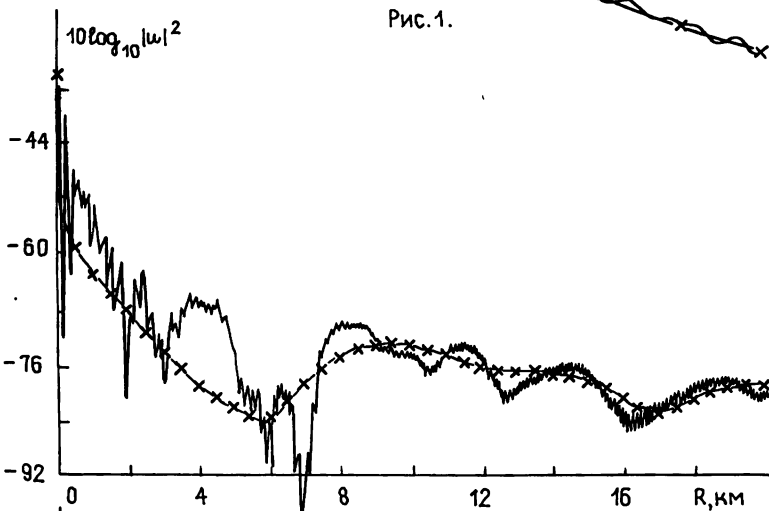


Рис 2.

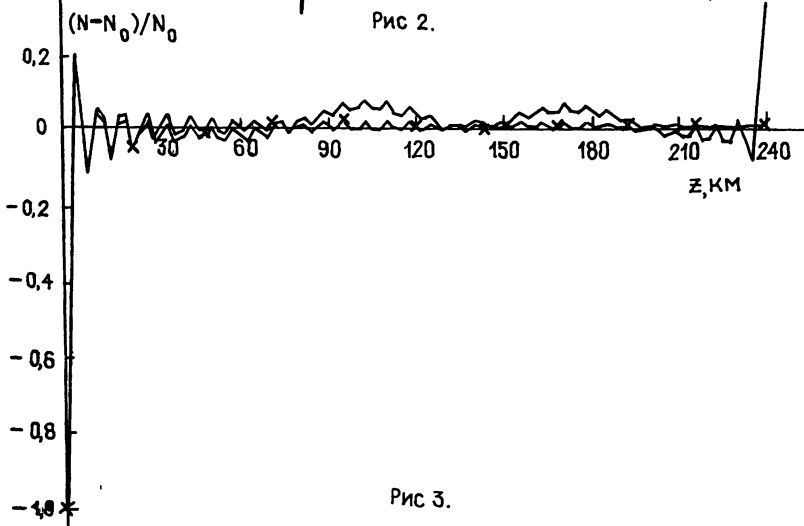


Рис 3.

Рис. 1. Поле в «почти однородном полупространстве» (—) и точное решение в однородном полупространстве (—X—).

Рис. 2. Полное поле (—) и поле нормальных волн (—X—) в модели слоистой среды.

Рис. 3. Мощность излучения источника в однородном полупространстве (—X—) и мощность в модели слоистой среды (—).

Отсюда следует, что $N_R = -\pi R \omega \operatorname{Im}(u, \partial u / \partial R)$ не зависит от R и поэтому мощность излучения источника $N = N_R$ задается выражением

$$N = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{k_l} \frac{\xi d\xi \sqrt{k_l^2 - \xi^2}}{(\psi'_+(H))^2 + (k_l^2 - \xi^2)(\psi_+(H))^2} \left| \int_0^\infty f(z) \tilde{\psi}_+(z) dz \right|^2 + \frac{\omega}{8} \sum_m |a_m|^2, \quad (24)$$

где a_m определены в (21).

Из этой формулы следует, что мощность излучения источника в слоистой среде, вообще говоря, отличается от мощности излучения того же источника в однородном пространстве.

Соотношение (24) позволяет разработать эффективный численный алгоритм, с помощью которого можно анализировать влияние неоднородностей среды на мощность излучения сложных источников.

3. Некоторые результаты модельных расчетов. На основе формул (15) и (24) разработаны программы расчета поля и мощности излучения источника в слоистой среде. Алгоритм расчета поля по формуле (15) подробно описан в препринте авторов [10], и мы не будем здесь на нем останавливаться. При расчете мощности излучения по формуле (24) используются те же самые алгоритмы вычисления функции Грина, собственных значений и собственных функций оператора \hat{L}_ω (14), что и в [10]. Вычисление интеграла в этом случае проще, так как он не содержит особенностей и имеет конечные пределы.

Проиллюстрируем работу программ в некоторых модельных ситуациях. Рассмотрим вначале точечный источник, помещенный в «почти однородное полупространство», в котором функция $c^{-2}(z)$ имеет вид

$$c^{-2}(z) = \begin{cases} c_0^{-2} + \frac{2}{H}(c_l^{-2} - c_0^{-2}), & 0 \leq z \leq H, \\ c_l^{-2}, & z \geq H \end{cases}, \quad (25)$$

где $c_0 = 1,49$ км/с, $c_l = 1,5$ км/с, $H = 1$ км, $z_{\text{ист}} = 100$ м, $F = 5$ Гц. Вычисленный по формуле (15) разрез поля при $z = 110$ м можно сравнить с точным решением для поля точечного источника в однородном полупространстве с $c(z) = c_l$, которое, как известно, задается выражением

$$u(z, r) = \frac{\exp \left[i \frac{\omega}{c_l} \sqrt{(z - z_{\text{ист}})^2 + r^2} \right]}{\sqrt{(z - z_{\text{ист}})^2 + r^2}} - \frac{\exp \left[i \frac{\omega}{c_l} \sqrt{(z + z_{\text{ист}})^2 + r^2} \right]}{\sqrt{(z + z_{\text{ист}})^2 + r^2}}, \quad z > 0. \quad (26)$$

На рис. 1 приведены результаты расчетов по формулам (15) и (26), которые, как видно, хорошо совпадают. Отметим, что в модели среды (25) на частоте $F = 5$ Гц нет распространяющихся нормальных волн, так что (15) сводится в этом случае к интегралу без особенностей. В этой же модели проводились расчеты мощности излучения точечного источника, давшие хорошее совпадение с точным выражением для мощности в однородном полупространстве [11]

$$N = \frac{\omega k}{8\pi} \left(1 \pm \frac{\sin kd}{kd} \right).$$

Рассмотрим теперь модель среды, в которой скорость распространения волн задается табл. 1.

Т а б л и ц а 1

z , км	0	0,03	0,09	0,12	0,24	0,724
$c(z)$, км/с	1,5	1,4995	1,4985	1,498	1,5	1,505

Между табличными значениями функция $c^{-2}(z)$ интерполируется ли-

нейно. На рис. 2 приведен разрез поля при $z=0,09$ км для источника, помещенного в точке $z_{ист}=0,03$ км с частотой $F=100$ Гц. В этой ситуации имеется четыре нормальные волны; разрез поля, вычисленный методом нормальных волн, также показан на рис. 2. Видно, что с увеличением расстояния до источника поле лучше описывается суммой нормальных волн, но даже на довольно значительных расстояниях разница между полным полем и суммой нормальных волн может достигать нескольких децибел. На рис. 3 приведены результаты расчета мощности излучения источника как функции координаты z для этой модели и для однородного полупространства с $c=1,5$ км/с. Как видим, разница может достигать значительных величин и, следовательно, при расчете мощности излучения необходимо учитывать неоднородности среды.

Таким образом, программы, разработанные на основе формул (15) и (24), позволяют анализировать различные эффекты распространения волн в слоистой среде и исследовать погрешности приближенных методов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1967.
2. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. — М.: Наука, 1973.
3. Распространение волн и подводная акустика / Ред. Дж. Б. Келлер и Дж. С. Пападакис. — М.: Мир, 1980.
4. Акустика океана / Ред. Дж. Де Санто. — М.: Мир, 1982.
5. Рип М., Саймон Б. Методы современной математической физики. — М.: Мир, 1978. Т. 2.
6. Вайнберг Б. Р. Асимптотические методы в уравнениях математической физики — М.: Гос ун-т, 1982.
7. Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физике. — М.: Наука, 1979.
8. Caruthers J. W. Fundamentals of Marine Acoustics Elsevier Scientific Publishing company, Amst.—Oxf.—N. Y., 1977, 154 p.
9. Бейтман Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. — М.: Наука, 1970.
10. Вдовичева Н. К., Шерешевский И. А. Препринт ИПФ АН СССР № 175. Горький, 1987.
11. Скучик Е. Основы акустики. — М.: Мир, 1976. Т. 2.
12. Журавлев В. А., Кобозев И. К., Кравцов Ю. А. // Акуст. журн. 1987. Т. 33. Вып. 6. С 1051.

Институт прикладной физики
АН СССР

Поступила в редакцию
5 января 1988 г.

ON THE USE OF THE LIMITING-AMPLITUDE PRINCIPLE FOR THE FIELD COMPUTATION IN SHALLOW MEDIUM

N. K. Vdovicheva, I. A. Shereshevskij

Integral representations for the field and emitted power of a harmonic source in shallow medium are obtained using the limiting-amplitude principle. The results of model computation illustrating the possibilities of the programs based on these representations are reported.