

# ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ РАСПРОСТРАНЕНИЯ $H$ -ВОЛНЫ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ВОЛНОВОДЕ С ВКЛЮЧЕНИЕМ НЕЛИНЕЙНОГО ДИЭЛЕКТРИКА

М. В. Исаков, В. А. Пермяков

Анализ распространения стационарных электромагнитных волн в ограниченных нелинейных средах представляет значительные трудности в общем случае, когда требуется численное решение нелинейных уравнений Максвелла. Возможные алгоритмы прямого численного решения подобных задач предложены в [1-4]. В настоящем сообщении обсуждается реализация поискового метода решения краевой задачи нелинейной электродинамики [3].

Рассмотрим распространение волны типа  $H_{0m}$  в прямоугольном волноводе, заполненном в ограниченной области средой с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon(|E|^2)$ . Единственная компонента электрического поля удовлетворяет скалярному нелинейному уравнению

$$\Delta E + k_0^2 \varepsilon E = 0, \quad \varepsilon = \varepsilon(|E|^2), \quad z \in [0, l], \quad \varepsilon = 1, \quad z \notin [0, l]. \quad (1)$$

Граничные условия при  $z=0$  и  $z=l$  и удержании конечного числа волноводных мод сводятся к виду

$$\sum_{m=1}^M (E_{\Pi}^m + E_0^m) \sin \frac{m\pi y}{d} = E(y, z) |_{z=0}, \quad (2)$$

$$\sum_{m=1}^M \gamma_m (-E_{\Pi}^m + E_0^m) \sin \frac{m\pi y}{d} = \frac{\partial E(y, z)}{\partial z} \Big|_{z=0};$$

$$E(y, z) |_{z=l} = \sum_{m=1}^M E_{\Pi}^m \exp(-\gamma_m l) \sin \frac{m\pi y}{d}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial E(y, z)}{\partial z} \Big|_{z=l} = - \sum_{m=1}^M \gamma_m E_{\Pi}^m \exp(-\gamma_m l) \sin \frac{m\pi y}{d}.$$

Здесь  $\gamma_m = \sqrt{(m\pi/d)^2 - k_0^2}$ ,  $d$  — ширина волновода, парциальные амплитуды падающего поля  $E_{\Pi}^m$  заданы, необходимо найти парциальные амплитуды отраженного ( $E_0^m$ ) и прошедшего ( $E_{\Pi}^m$ ) полей.

Поисковая процедура численного решения краевой задачи (1)–(3) сводится к следующему. Перейдем от исходной задачи к краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), используя, например, метод прямых.

Зададимся некоторым набором амплитуд  $\tilde{E}_{\Pi}^m$  и, определив с помощью (3) начальные условия для системы ОДУ, решим задачу Коши на отрезке  $[0, l]$ . Далее с помощью условия (2) восстановим амплитуды падающих волн  $\tilde{E}_{\Pi}^m$  при  $z=0$ . Поскольку амплитуды прошедших волн были заданы произвольно, восстановленные с помощью (2) амплитуды  $\tilde{E}_{\Pi}^m$  не совпадают с заданными  $E_{\Pi}^m$ . Это позволяет образовать целевую функцию

$$\Phi = \sum_{m=1}^M |\tilde{E}_{\Pi}^m - E_{\Pi}^m|^2, \quad (4)$$

глобальные минимумы которой ( $\Phi=0$ ) дают искомое решение.

При практической реализации предложенного алгоритма использовался метод Рунге—Кутты—Фелберга 4–5 порядков точности для интегрирования системы ОДУ и поисковый метод Хука—Дживса для минимизации целевой функции.

Численное исследование проведено для плоской вставки из нелинейного диэлектрика с проницаемостью  $\varepsilon_0 + \varepsilon_2 |E|^2$ . Амплитуда падающего поля при этом достигала значений 1–1,5, в прошедшем и отраженном полях учитывалось 3–15 мод. На рис. 1 приведены распределения амплитуд первой (а) и третьей (б) гармоник в нелинейном слое при возбуждении первой гармоникой падающего поля с амплитудой  $E_{\Pi}^1 = 1$  (толщина слоя  $k_0 l = 0,8$ ). Кривые 1 и 2 относятся к узкому волноводу ( $k_0 d = 4$ ) с отрицательной ( $\varepsilon_0 = 1, \varepsilon_2 = -1$ ) и положительной ( $\varepsilon_0 = 1, \varepsilon_2 = 1$ ) нелинейностью соответственно, кривые 3 и 4 — к широкому волноводу ( $k_0 d = 12$ ) с отрицательной и, соответственно, положительной нелинейностью. Размеры волноводов таковы, что в узком волноводе без нелинейного заполнения распространяющейся является первая пространственная гармоника, а в широком — первая и третья гармоники. Из числен-

ных результатов следует, что распределение амплитуды первой моды в нелинейном слое качественно меняется с изменением типа нелинейности и несущественно зависит от ширины волновода. Распределение амплитуды третьей моды в слое, напротив, существенно меняется с увеличением ширины волновода и слабо зависит от типа нелинейности. При этом амплитуда третьей моды невелика по сравнению с основной модой, а вклад высших ( $m > 3$ ) мод в полное поле пренебрежимо мал.

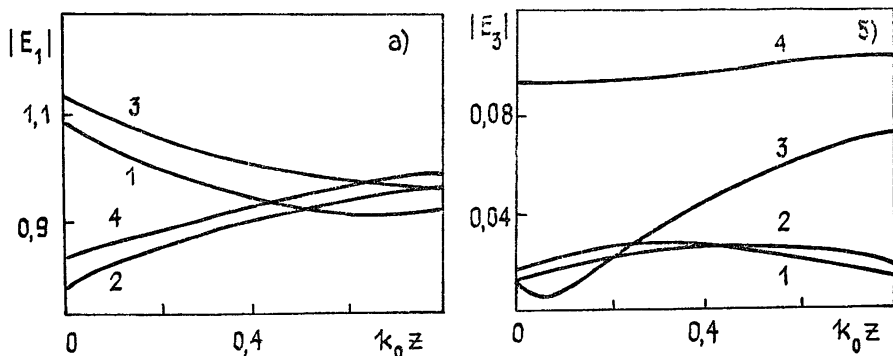


Рис. 1.

Такое поведение пространственных гармоник поля в нелинейном слое объясняется тем, что несмотря на сильную нелинейность поперечная структура поля в слое остается близкой к структуре основной моды незаполненного волновода. Учитывая малость высших пространственных гармоник, используем для описания поля в нелинейном слое одномодовое приближение [9]. Представим поле в слое в виде [9]  $E(y, z) = F(z) \sin(\pi y/d)$ , подставим это выражение в (1) и, применив неполный метод Галеркина, получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 F}{dz^2} + k_0^2 \left( \epsilon_0 + \frac{3\epsilon_2}{4} |F|^2 - \left( \frac{\pi}{k_0 d} \right)^2 \right) F = 0. \quad (5)$$

Решение (5) графически совпадает с распределением амплитуды первой гармоники, следующим из численного решения системы (1)–(3), и дает для случая  $|E_1^i| = 1,5$ ,  $\epsilon_0 = 1$ ,  $\epsilon_2 = -1$ ,  $k_0 d = 4$  ошибку менее 4% для определения амплитуды полного поля в волноводе. Одномодовое приближение просто объясняет вид распределения основной моды в волноводе. Из линеаризации (5) при  $z \sim l$  следует, что отраженное от задней границы нелинейного слоя электрическое поле синфазно с падающим при  $\epsilon_2 = 1$  и противофазно при  $\epsilon_2 = -1$ , откуда сразу следует рост при  $\epsilon_2 = -1$  (убывание при  $\epsilon_2 = 1$ ) полного поля при движении от задней к передней границе слоя и малой (меньше четверти длины волны в среде) толщине слоя. Существенное влияние ширины волновода на распределение амплитуд третьих гармоник качественно объяснимо, если линеаризовать нелинейное уравнение (1) в приближении заданного поля первой гармоники. На этом пути удастся показать, что для узкого волновода третьи гармоники являются нераспространяющимися и имеют близкие постоянные затухания для обоих типов нелинейности. Для широкого волновода третья гармоника является распространяющейся при  $\epsilon_2 = 1$  и нераспространяющейся при  $\epsilon_2 = -1$ , причём постоянная затухания в последнем случае значительно меньше постоянных затухания третьих гармоник в узком волноводе.

Из численных экспериментов следует, что прямое численное решение (1) оказывается устойчивым при  $k_0 l \ll 1$ . Поэтому результаты численного эксперимента служат обоснованием применимости одномодового приближения при небольших толщинах слоя. На основании полученных результатов можно также полагать, что одномодовое приближение должно фактически иметь более широкие границы применимости. Указанием на это служит, во-первых, малый уровень высших пространственных гармоник в одномодовых волноводах, который должен сохраниться и при больших толщинах слоя, и, во-вторых, возможность интегрирования уравнения (5) на больших дистанциях без потери устойчивости.

Полученные результаты могут быть полезны, например, при волноводной СВЧ диагностике параметров нелинейных диэлектриков или плазмы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Никольский В. В., Корниенко Д. И. // Труды МИРЭА, 1969. Вып. 40. С. 17.
2. Орлов В. П. // Труды МИРЭА, 1969. Вып. 40. С. 66.
3. Пермяков В. А. // Труды МЭИ, 1979. Вып. 399. С. 79.
4. Ванзин П. А., Исаков М. В., Лебедев А. М. и др. // Тезисы докл. XIV Всесоюзной конф. по распространению радиоволн. — М.: Наука, 1984. Ч. 1. С. 244.
5. Ванзин П. А., Пермяков В. А. // Межведомств. сб. трудов. — М.: Энергетический ин-т, 1985. Вып. 75. С. 40.