

УДК 533.951

НЕЛИНЕЙНАЯ СТАДИЯ РАЗВИТИЯ ВЫСОКОЧАСТОТНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В СИСТЕМЕ ПОТОК — МАГНИТОАКТИВНАЯ ПЛАЗМА

B. B. Тамойкин, С. М. Файнштейн

Проведено исследование резонансного нелинейного трехволнового взаимодействия двух встречных электромагнитных волн и пучковой волны с отрицательной энергией, имеющей промежуточную частоту, в слое магнитоактивной плазмы, пронизываемой пучком электронов. Решена нелинейная краевая задача для амплитуд (интенсивностей) волн. Показана возможность эффективной генерации ЭМ волны наивысшей частоты за счет энергии пучка. Приведены численные оценки для ионосферной и лабораторной плазмы.

Как известно, в неравновесных средах, таких, как пучок заряженных частиц или система поток—плазма, может существовать волна отрицательной энергии [1–3]. В ряде работ показано, что в условиях, когда такая волна участвует в резонансном нелинейном взаимодействии с волнами положительной энергии, может возникать либо взрывная (см., например, [2, 4]), либо высокочастотная (ВЧ) неустойчивости [5]. Взрывная неустойчивость имеет место в том случае, когда волна отрицательной энергии имеет наивысшую частоту (процесс распада), в то время как ВЧ неустойчивость реализуется в процессе слияния волн (конверсия вверх по частоте). Существенно, что при конверсии вверх по частоте в такой системе в заданном поле накачки имеет место экспоненциальный рост сигнальной и генерируемой волн так же, как это осуществляется при распадной неустойчивости для волн положительной энергии [6]. Заметим, что в цитируемых работах, как правило, рассматривается лишь линейная стадия ВЧ неустойчивости, т. е. вычисляются соответствующие инкременты.

В настоящей работе исследована нелинейная стадия ВЧ неустойчивости двух встречных электромагнитных (ЭМ) волн (ВЧ ЭМ волны и вистлеры) и одной пучковой волны с отрицательной энергией в магнитоактивной плазме, пронизываемой электронным пучком. При этом трудность анализа нелинейной краевой задачи преодолена здесь за счет сведения ее к причинной задаче для полутных волн, решение которой известно [2]. Решение для исходной системы удается получить на основе сложного трансцендентного уравнения. Показано, что за счет энергии пучка электронов энергия вышедшей из нелинейного слоя ЭМ волны высшей частоты может сильно превышать (с одновременным ростом частоты) энергию падающего вистлера *. Полученные результаты предлагаются использовать для экспериментов в лабораторной и ионосферной плазме.

Исходными являются уравнения Максвелла, уравнения непрерывности и уравнения движения для электронов пучка и плазмы:

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi e}{c} (N\mathbf{v} + N_s \mathbf{v}_s) + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (1)$$

* Предполагается, что частота падающей волны много больше гирочастоты ионов и много меньше гирочастоты электронов.

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \operatorname{div} N \mathbf{v} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = \frac{e}{m} \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{H} + \mathbf{H}_0] \right\},$$

$$\frac{\partial N_s}{\partial t} + \operatorname{div} N_s \mathbf{v}_s = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} + (\mathbf{v}_s \nabla) \mathbf{v}_s = \frac{e}{m} \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_s, \mathbf{H} + \mathbf{H}_0] \right\},$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi e (N + N_s - N_0 - N_{0s}).$$

Здесь \mathbf{E} , \mathbf{H} — электрическое и магнитное поля волн, \mathbf{H}_0 — постоянное магнитное поле, $\mathbf{v}_s = V_0 + \tilde{\mathbf{v}}$, (V_0 — равновесная скорость пучка, $\tilde{\mathbf{v}}$ — волновое возмущение скорости электронов пучка), $N = N_0 + N_s$, $N_s = N_{0s} + \tilde{N}_s$, N_0 , N_{0s} — равновесные концентрации плазмы и пучка, e/m — удельный заряд электрона, \mathbf{v} — скорость электронов плазмы.

В линейном приближении из (1) легко получить дисперсионные уравнения для нормальных волн. Для ЭМ волн, распространяющихся вдоль $0z \parallel \mathbf{H}_0 \parallel \mathbf{V}_0$,

$$k_{1,3}^2 = (\omega_{1,3}^2/c^2) \epsilon_{1,3}, \quad (2)$$

$$\epsilon_{1,3} = 1 - \omega_0^2/\omega_{1,3}(\omega_{1,3} - \omega_H) - \omega_{0s}^2(\omega_{1,3} - k_{1,3}V_0)/\omega_{1,3}^2 (\omega_{1,3} - k_{1,3}V_0 - \omega_H)$$

$$(\omega_H = eH_0/mc, \quad \omega_0^2 = 4\pi N_0 e^2/m, \quad \omega_{0s}^2 = 4\pi N_{0s} e^2/m).$$

Для продольных волн, бегущих вдоль $0z$,

$$\epsilon(\omega_2, k_2) = 1 - \omega_0^2/\omega_2^2 - \omega_{0s}^2/(\omega_2 - k_2 V_0)^2 = 0. \quad (3)$$

Из (3) видно, что величина $\frac{\partial \epsilon}{\partial \omega_2} < 0$ при $\omega_2 - k_2 V_0 < 0$ и при $\frac{N_{0s}}{N_0} > \beta_1 - 1$; $\beta_1 = \frac{V_0}{c} \left(\frac{\omega_H}{\omega_H - \omega_1} \right)^{1/2}$. Это условие соответствует пучковой волне с отрицательной энергией. Оно получено с учетом того, что при слабой нелинейности в (1) указанные волны участвуют в резонансном трехволновом взаимодействии, если удовлетворяются условия синхронизма *

$$\omega_3 = \omega_1 + \omega_2, \quad k_3 = k_2 - k_1, \quad (4)$$

где ω_i , k_i — частоты и волновые векторы волн. Из анализа (2), (3) следует, что равенства (4) выполнены при условиях **

$$|k_2| \simeq |k_1| \gg k_3, \quad k_1 \simeq \frac{\omega_0}{c} \sqrt{\frac{\omega_H}{\delta_1}}, \quad \delta_1 = \omega_H - \omega_1,$$

$$k_3 \simeq \frac{\sqrt{2\omega_0 \omega_H}}{c}, \quad \omega_3 \simeq \omega_0 + \omega_H, \quad \frac{2\delta}{\omega_0} \simeq \frac{N_{0s}}{N_0 (\beta_1 - 1)^2} = \gamma \ll 1,$$

$$\omega_2 \simeq \omega_0 + \delta, \quad \omega_0 \gg \omega_H.$$
(5)

Решение системы (1) ищем в виде

$$E_x = a_1(z) \exp[i(\omega_1 t + k_1 z)] + a_3(z) \exp[i(\omega_3 t - k_3 z)] + \text{к. с.},$$

$$E_z = a_2(z) \exp[i(\omega_2 t - k_2 z)] + \text{к. с.} \quad (E_y = iE_x).$$

* Знак минус в (4) означает, что волна с волновым вектором k_1 распространяется против оси $0z$.

** В формулах (5) не учитывается инкремент обычной пучковой неустойчивости. Это справедливо, если нелинейный инкремент ВЧ нестабильности много больше линейного инкремента пучковой неустойчивости, т. е. $\frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{N_{0s}}{N_0} \right)^{1/3} \frac{\omega_0}{v_{gr_2}} \ll |a_1| \sqrt{\frac{\sigma_2 \sigma_3}{v_{gr_2} v_{gr_3}}}$ (v_{gr_j} — групповые скорости волн) (см. формулы (7)).

Тогда с помощью асимптотического метода при учете малой квадратичной нелинейности из (1) получаем стационарные уравнения для медленно изменяющихся комплексных амплитуд указанных волн

$$\frac{da_1}{dz} = \sigma_1 a_3 a_2^*, \quad \frac{da_2}{dz} = \sigma_2 a_3 a_1^*, \quad \frac{da_3}{dz} = \sigma_3 a_1 a_2, \quad (6)$$

где коэффициенты нелинейного взаимодействия равны

$$\begin{aligned} \sigma_1 &\simeq \frac{e (\omega_H/\omega_0) (\omega_H/\delta_1)}{mc^2 \gamma}, \quad \sigma_2 \simeq \frac{e (\omega_H/\delta_1)^{3/2} (\omega_0/\omega_H)}{2mc^2 \beta}, \\ \sigma_3 &\simeq \frac{e (\omega_H/\delta_1)^{3/2} (\omega_0/\omega_H)^{3/2}}{\sqrt{2} mc^2 \gamma}, \quad \beta = V_0/c. \end{aligned} \quad (7)$$

Амплитуды a_i должны удовлетворять граничным условиям $a_1(L) = a_1^0$, $a_2(0) = a_2^0$, $a_3(0) = a_3^0$, следовательно, здесь приходится иметь дело с краевой задачей, решение которой значительно сложнее, чем в случае причинной задачи, когда граничные условия для амплитуд всех трех волн задаются на одном конце. Можно, однако, формально получить решение системы (6), как в задаче Коши, предполагая временно, что известно значение a_1^0 . Тогда совместно с условиями $a_3(0) = a_3^0$ и $a_2(0) = a_2^0$ такая задача становится причинной, и можно воспользоваться ее решением, которое хорошо известно [2].

Обозначим $a_i(z) = A_i(z) \exp(i\varphi_i)$ ($i=1, 2, 3$) и введем новые функции

$u_i = \sqrt{\sigma_j \sigma_m} A_i$, $i \neq j \neq m$, $i, m, j = 1, 2, 3$, $\Phi(z) = \varphi_3 - \varphi_2 - \varphi_1$. Тогда для $u_i(z)$ и $\Phi(z)$ из (6) получается система уравнений [2]

$$\frac{du_j}{dz} = u_i u_k \cos \Phi, \quad \frac{d\Phi}{dz} = -\sin \Phi \sum_{i \neq j \neq k} \frac{u_i u_j}{u_k}, \quad i, j, k = 1, 2, 3 \quad (i \neq j \neq k).$$

Следуя [2] и учитывая, что система (8) имеет независимые интегралы

$$u_3^2(z) - u_2^2(z) = M_1, \quad u_3^2(z) - u_1^2(z) = M_2, \quad u_1 u_2 u_3 \sin \Phi = \Gamma, \quad (9)$$

для функции

$$x(z) = (u_1^2(z) - u_1^2(0)) \equiv (u_2^2(z) - u_2^2(0)) \equiv (u_3^2(z) - u_3^2(0))$$

получим уравнение [2]

$$(dx/dz)^2 + G(x) = 0,$$

где

$$G(x) = -4(x^3 + Ax^2 + Bx + C),$$

$$A = u_1^2(0) + u_2^2(0) + u_3^2(0), \quad B = u_1^2(0) u_2^2(0) + u_1^2(0) u_3^2(0) + u_2^2(0) u_3^2(0),$$

$$C = u_1^2(0) u_2^2(0) u_3^2(0) - \Gamma^2.$$

Решение полученного уравнения в общем случае запишется в форме эллиптического интеграла

$$2z = \int_0^x dx / \sqrt{G(x)}, \quad (10)$$

обращая который, можно получить выражение для амплитуд (интенсивностей) взаимодействующих волн. Существенно, что в краевой исходной задаче известны лишь значения $A_1(L)$ и $\varphi_1(L)$, а не значения $u_1(0)$ и $\Phi(0)$.

Решение $x(z)$ зависит от корней уравнения $G(x) = 0$. Рассмотрим некоторые частные случаи.

$$1. \quad u_3^2(0) = u_2^2(0) \neq u_1^2(0), \quad \Phi(0) = 0.$$

Очевидно, из (9) и условия $\Phi(0) = 0$ следует, что $\Phi(z) \equiv 0$ при любых z .

Корни уравнения $G(x) = 0$ равны $x_1 = -u_1^2(0)$, $x_2 = x_3 = -u_3^2(0)$. Вычисляя интеграл (10), получаем

$$\begin{aligned} x(z) &= [u_1^2(0) - u_3^2(0)] \times \\ &\times \frac{\left[\frac{u_1(0) + \sqrt{u_1^2(0) - u_3^2(0)}}{u_1(0) - \sqrt{u_1^2(0) - u_3^2(0)}} \exp(-2z\sqrt{u_1^2(0) - u_3^2(0)}) + 1 \right]^2}{\left[\frac{u_1(0) + \sqrt{u_1^2(0) - u_3^2(0)}}{u_1(0) - \sqrt{u_1^2(0) - u_3^2(0)}} \exp(-2z\sqrt{u_1^2(0) - u_3^2(0)}) - 1 \right]} z - u_1^2(0). \end{aligned} \quad (11)$$

Из (11) видно, что формально интенсивности всех волн обращаются в бесконечность на конечном расстоянии

$$z_b = \frac{1}{2\sqrt{\sigma_2 \sigma_3} \sqrt{A_1^2(0) - A_3^2(0)} (\sigma_1/\sigma_3)} \ln \frac{A_1(0) + \sqrt{A_1^2(0) - A_3^2(\sigma_1/\sigma_3)}}{A_1(0) - \sqrt{A_1^2(0) - A_3^2(0)} (\sigma_1/\sigma_3)}, \quad (12)$$

что в случае попутных волн соответствовало бы возникновению взрывной неустойчивости. Отличие рассматриваемой краевой задачи состоит в том, что волна отрицательной энергии имеет промежуточную частоту, а не наивысшую, как это имеет место для попутных волн. Кроме того, для существования «взрыва» необходимо, чтобы падающий на слой встречный вистлер с частотой ω_1 при $z=z_b$ имел бесконечную интенсивность. Это означает, строго говоря, что толщина плазменного слоя должна удовлетворять неравенству $L < z_b$.

Для построения окончательного решения необходимо знать значение $u_1(0)$ (или $A_1(0)$), которое должно быть найдено из граничного условия $A_1(z=L) = A_1(L)$. Используя (11) и предполагая, что выполнено неравенство

$$A_1^2(0) \gg A_3^2(0) (\sigma_1/\sigma_3) = A_3^2(0) \frac{\sqrt{2}(\omega_H/\omega_0)^{5/2}}{(\omega_H/\delta_1)^{1/2}} = A_3^2(0)/4\gamma_0^2, \quad (13)$$

$$4\gamma_0^2 = (\omega_H/\delta_1)^{1/2}/\sqrt{2}(\omega_H/\omega_0)^{5/2} \gg 1,$$

получаем трансцендентное уравнение для отыскания $A_1(0)$:

$$\xi \frac{[4\xi^2 \exp(-p\xi) + 1]}{[4\xi^2 \exp(-p\xi) - 1]} = M. \quad (14)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\xi = 2\gamma_0 A_1(0)/A_3(0), \quad M = 2\gamma_0 A_1(L)/A_3(0), \quad p = A_3(0) \sqrt{\sigma_1 \sigma_2} L.$$

Задавая значения p и M , на основе численного расчета легко определить корни уравнения (14):

$p = 0,1$	и	$M = 400$	$\xi_0(0,1; 400) \simeq 101,$
$p = 0,1$	и	$M = 760$	$\xi_0(0,1; 760) \simeq 104;$
$p = 0,3$	и	$M = 34$	$\xi_0(0,3; 34) \simeq 20,$
$p = 0,3$	и	$M = 150$	$\xi_0(0,3; 150) \simeq 25.$

Определим коэффициент преобразования по энергии в ЭМ волну наивысшей частоты $\eta = A_3^2(L)/A_1^2(L)$. Из (11) и (14) имеем

$$\eta \simeq 64\gamma_0^2 \xi_0^2 \exp(-p\xi_0) [4\xi_0^2 \exp(-p\xi_0) + 1]^{-2}. \quad (15)$$

Естественно, этот коэффициент существенно зависит от p и M . Подставляя найденные значения корней $\xi_0(p, M)$, находим

$$\begin{aligned}\eta(0,1; 400) &\simeq 3,76\gamma_0^2, \quad \eta(0,1; 760) \simeq 3,92\gamma_0^2, \\ \eta(0,3; 34) &\simeq 2,40\gamma_0^2, \quad \eta(0,3; 150) \simeq 3,88\gamma_0^2.\end{aligned}$$

Таким образом, при выбранных значениях p и M коэффициент преобразования по энергии с точностью до численного множителя порядка единицы определяется фактором $\gamma_0^2 \gg 1$. При этом лишь часть энергии черпается из встречной ЭМ волны с частотой ω_1 , а подавляющую долю энергии в ЭМ волну наивысшей частоты отдает электронный пучок.

$$2. \quad u_2^2(0) = u_3^2(0) \neq u_1^2(0), \quad \Phi(0) = \pi/2.$$

В случае, когда выполнено неравенство (13), корни уравнения $G(x)=0$ равны

$$x_2 \simeq -2u_3^2(0), \quad x_1 \simeq 0, \quad x_3 \simeq -u_1^2(0).$$

При этом решение исходного уравнения (10) запишется в виде

$$x(z) = 2u_3^2(0) [\operatorname{сп}^{-2}(2z/\mu, k) - 1], \quad (16)$$

где $\operatorname{сп}(u, k)$ — эллиптическая функция Якоби, $\mu = 2/A_1(0)\sqrt{\sigma_2\sigma_3}$, $k \simeq \sqrt{1 - \xi_0^{-2}}$ — модуль эллиптического интеграла.

Из (16) видно, что длина взрыва определится из условия

$$2z_{\text{в}}/\mu = K(k). \quad (17)$$

Здесь $K(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода. Учитывая, что величина k близка к единице, ниже воспользуемся приближенными выражениями для $K(k)$ и $\operatorname{сп}(u, k)$ [7]:

$$K(k) \simeq \ln 4/(1 - k^2) \simeq (1/2) \ln 8\xi_0^2, \quad \operatorname{сп}(u, k) \simeq \operatorname{ch}^{-1}(u). \quad (18)$$

В результате имеем

$$z_{\text{в}} \simeq (2\sqrt{\sigma_2\sigma_3} A_1(0))^{-1} \ln(8\xi_0^2), \quad L < z_{\text{в}}, \quad (19)$$

а величина ξ_0 (либо $A_1(0)$), согласно (16), (18), может быть определена из трансцендентного уравнения

$$M^2 \simeq \xi_0^2 + 2 \operatorname{ch}(p\xi_0/2), \quad (20)$$

решение которого проводилось численным способом. В частности, при $p=0,1$ и $M^2 \simeq 940$ $\xi_0 = 30$, а при $p=0,1$ и $M^2 = 2797$ $\xi_0 \simeq 50$. При этом коэффициент преобразования по энергии η равен

$$\eta \simeq (4\gamma_0^2/M^2) [2 \operatorname{ch}^2(p\xi_0/2) - 1], \quad (21)$$

т. е. $\eta \simeq 4\gamma_0^2 \gg 1$, по крайней мере, в условиях, когда

$$M^2 \gg \xi_0^2.$$

В заключение приведем численные оценки характерного масштаба усиления ЭМ волны L и коэффициента преобразования η для условий ионосферной и лабораторной плазмы *.

а) Ионосферная плазма. Амплитуду поля падающей на ионосферу волны с частотой, меньшей ω_H , можно оценить по известной формуле

$$A_1(L) = 300 \sqrt{WG}/z, \quad (22)$$

где WG — эквивалентная мощность, W — мощность наземного передатчика, G — коэффициент направленного действия (W в кВт), z —

* В данной работе рассмотрено взаимодействие трех когерентных волн в слое плазмы, хотя для приложений не меньший интерес представляет изучение взаимодействия волн с широким спектром.

расстояние от передатчика до области взаимодействия в ионосфере (z в км), при этом $A_1(L)$ берется в мВ/м. Для наземного передатчика в г. Васильсурске $W \sim 150$ кВт, $G \sim 50$. При $z \sim 300$ км получаем: $A_1(L) \approx 86$ мВ/м. Для пучка электронов с энергией 10 кэВ скорость $V_0 \sim 5 \cdot 10^9$ см/с. Равновесную концентрацию в пучке N_{0s} оценим из условия, что характерный поток высывающихся электронов $\langle I \rangle \approx \approx 10^8$ см $^{-2}$ с $^{-1}$. Тогда имеем $N_{0s} \approx 2 \cdot 10^{-2}$ см $^{-3}$ и при $N_0 \approx 2 \cdot 10^5$ см $^{-3}$ получаем

$$N_{0s}/N_0 \approx 10^{-7} > [\beta(\omega_H/\delta_1)^{1/2} - 1]^3. \quad (23)$$

Отсюда $\omega_1/\delta_1 \geq 36$. Полагая, кроме того, $(\omega_0/\omega_H) \approx 3$, $(A_1^2(0)/A_3^2(0)) \approx 10^2$, из формул (12) и (14) имеем

$$L < z_B \approx 25 \text{ км}, \quad \eta \approx 4V_0^2 \approx 60.$$

б) Лабораторная плазма. При облучении лабораторной плазмы с $N_0 \approx 5 \cdot 10^{14}$ см $^{-3}$ ($\omega_0 \approx 1,3 \cdot 10^{12}$ с $^{-1}$) с помощью МЦР-генератора с $\lambda_1 \approx 8$ мм мощностью порядка 1 кВт (сечение СВЧ пучка принимаем ~ 1 см 2) можно оценить амплитуду $A_1(L)$, которая оказывается порядка 0,6 кВ/см. При токе 80 А/см 2 и энергии электронного потока ~ 280 кэВ концентрация в пучке $\sim 5 \cdot 10^{10}$ см $^{-3}$. Учитывая эти значения и считая, что $\omega_1 \ll \omega_H \sim 2,4 \cdot 10^{11}$ с $^{-1}$, т. е. $H_0 \approx 13,6$ кЭ, а $\left[\left(\frac{\omega_H}{\delta_1} \right)^{1/2} \frac{V_0}{c} - 1 \right]^3 < \frac{N_{0s}}{N_0} \left(\frac{\omega_H}{\delta_1} \approx 10 \right)$, получим $L \leq 14$ см, а коэффициент преобразования по энергии $\eta \approx 217$ ($\lambda_{EM} \approx \lambda_1 (\omega_H/\omega_0) \approx 1,5$ мм). Следовательно, с помощью МЦР-генератора и реальной лабораторной плазменной установки можно создать достаточно мощный усилитель ЭМ излучения.

Авторы признательны А. В. Гапонову за полезную дискуссию.

ЛИТЕРАТУРА

- Кадомцев Б. Б., Михайловский А. Б., Тимофеев А. В. // ЖЭТФ. 1964. Т. 7. С. 1266.
- Вильхельмссон Х., Вейланд Я. Когерентное нелинейное взаимодействие волн в плазме. — М.: Энергоиздат, 1981.
- Незлин М. В. Динамика пучков в плазме. — М.: Энергоиздат, 1982.
- Файнштейн С. М. // ЖЭТФ. 1976. Т. 71. С. 1021.
- Рабинович М. И., Файнштейн С. М. // ЖЭТФ. 1972. Т. 63. С. 1672.
- Ораевский В. Н., Сагдеев Р. З. // ЖТФ. 1962. Т. 32. С. 1291.
- Справочник по специальным функциям // Под ред. М. Абрамовича, И. Стигана. — М.: Наука, 1979.

Научно-исследовательский
радиофизический институт

Поступила в редакцию
26 сентября 1986 г.

NONLINEAR STAGE IN DEVELOPMENT OF HIGH-FREQUENCY INSTABILITY OF ELECTROMAGNETIC WAVES IN FLUX-MAGNETOACTIVE PLASMA SYSTEM

V. V. Tamojkin, S. M. Fajnshtejn

The paper investigates the resonance nonlinear three-wave interaction between two opposite electromagnetic waves and a beam wave with a negative energy having an intermediate frequency in the magnetooactive plasma layer being penetrated by a beam of electrons. The nonlinear boundary problem has been solved for amplitudes (intensities) of waves. A possibility is shown for the effective EM wave generation of the highest frequency due to the beam energy. Numerical estimations are given for the ionospheric and laboratory plasmas.