ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXXI, № 8 *РАДИОФИЗИКА* *1988*

УДК 621.385.6

О ГЕОМЕТРИИ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ЭЛЕКТРОННЫХ ПОТОКОВ В ОКРЕСТНОСТИ ПРОИЗВОЛЬНОГО ГЛАДКОГО ЭМИТТЕРА

В. А. Сыровой

На основе антипараксиальных разложений получены уравнения пространственных траекторий в окрестности гладкого эмиттера произвольной формы, работающего в режиме полного пространственного заряда. Приведены выражения для кривизны и кручения траекторий в трех требующих специального рассмотрения случаях: 1) при ненулевом касательном к эмиттеру магнитном поле H; 2) при $H=0$ и неоднородной плотности тока эмиссии J, 3) при $H=0$ и $J=\mathrm{const}$ Результаты могут быть использованы для повышения точности программ трехмерного анализа и для придания параксиальной теории пространственных потоков большей адекватности путем наиболее полного учета точных асимптотических выражений при выборе оси пучка.

Введение. Антипараксиальные разложения [1–3], учитывающие характер особенности при эмиссии с нулевой скоростью, могут использоваться как для решения задачи Коши, так и при рассмотрении краевой задачи. В первом случае [4, 5] считается известной форма эмиттера и вся физическая информация на нем (плотность тока J, нормальное электрическое поле E, компоненты самосогласованного магнитного поля) и решение строится в области, протяженность которой может быть увеличена за счет использования оптимальной системы координат [6], связанной с геометрией течения; оптимального параметра разложения [5] (при эмиссии со сферы таким параметром является логарифм радиуса); введения алгоритма сшивания полос [7] с разной асимптотикой решения в них. Во втором случае [6, 8] известна конфигурация эмиттера, режим эмиссии, а также форма и потенциал «коллектора» — близкой к эмиттеру не обязательно эквипотенциальной поверхности. Решение краевой задачи при эмиссии в ρ-режиме сводится к вычислению плотности тока J; при эмиссии в T-режиме J определяется температурой катода, а искомым является электрическое поле E на нем.

Решение краевой задачи на антипараксиальных разложениях [6] может быть использовано для повышения точности программ анализа, заменив собой обычно применяемую в них модель плоского диода. Практика работы [4–6] с антипараксиальными разложениями показывает, что достаточно высокая точность достигается в области, протяженность которой имеет порядок радиуса кривизны эмиттера. Здесь сосредоточена значительная часть пространственного заряда пучка, так что можно надеяться и на уменьшение числа последующих итераций по этому параметру. Заметим, что для целого класса практически важных задач с мощными релятивистскими пучками собственное магнитное поле вблизи эмиттера слабо возмущает распределение потенциала, но играет заметную роль в области компрессии. В этом случае алгоритм решения краевой задачи [6] может быть применен итеративно: в нулевом приближении учитывается только внешнее магнитное поле; интегрирование J по стартовой поверхности дает собственное поле и т. д. Аппарат антипараксиальных разложений позволяет выйти на неособую поверхность «коллектора», которая должна смыкаться с эммиттером на периферии последнего. Рассмотрение осесимметричных течений включает работа [3]. Ниже явные выражения для электронных траекторий получены в случае трехмерных потоков. Они позволяют вычислить кривизну и кручение траекторий вблизи эмиттера и представляют собой точные в асимптотическом смысле соотношения, которые необходимо ввести в теорию пространственных параксиальных потоков для придания ей большей адекватности.

При построении параксиальных уравнений теряется часть информации, которую содержали исходные уравнения пучка, например утрачена связь между градиентом плотности тока и кривизной траектории для электростатических течений. Кривизна и кручение оси пучка в том случае, когда она совпадает с одной из траекторий, представляют собой ничем не ограниченные с точки зрения параксиального подхода управляющие функции задачи. Приведенные ниже соотношения показывают, как в действительности эти характеристики связаны с геометрией эмиттера и физическими параметрами на нем.

Для выполнения намеченной программы потребуется ряд формул дифференциальной геометрии [9]. Пусть параметрические уравнения кривой C в системе x^i с метрическим тензором $g_{i\kappa}$ задаются выражениями

$$x^i = x^i(t), \qquad i = 1, 2, 3. \tag{1}$$

Пусть на C определен вектор $\boldsymbol{a}$ с контравариантными компонентами a^r. Абсолютная производная от a^r по параметру t определена формулой

$$\delta a^r/\delta t = da^r/dt + \Gamma^r_{mn}\, a^m\, dx^n/dt. \tag{2}$$

Длина дуги l кривой C удовлетворяет уравнению

$$(dl/dt)^2 = g_{i\kappa}(dx^i/dt)(dx^\kappa/dt). \tag{3}$$

Единичные векторы касательной λ^r, главной нормали ν^r и бинормали μ^r к C задаются соотношениями

$$\lambda^r = dx^r/dl, \qquad \nu^r = \text{к}^{-1}\delta\lambda^r/\delta l, \qquad \text{к} > 0, \qquad \mu^r = e^{rst}\lambda_s\nu_t. \tag{4}$$

Формулы Френе выражают абсолютные производные от λ^r, ν^r, μ^r через сами эти векторы, кривизну к и кручение $\varkappa$ кривой:

$$\delta\lambda^r/\delta l = \text{к}\nu^r, \qquad \delta\nu^r/\delta l = \varkappa\mu^r - \text{к}\lambda^r, \qquad \delta\mu^r/\delta l = -\varkappa\nu^r. \tag{5}$$

Последние можно вычислить, зная функции (1)

$$\text{к}^2 = g_{i\kappa}(\delta\lambda^i/\delta l)(\delta\lambda^\kappa/\delta l), \qquad \varkappa = \mu_r\delta\nu^r/\delta l. \tag{6}$$

1. Случай отличного от нуля касательного к эмиттеру магнитного поля $H \neq 0$. Траектории произвольного пространственного течения при эмиссии в ρ-режиме определяются следующими дифференциальными уравнениями*:

$$\frac{dx^2}{dx^1} = \frac{v^2}{v^1} = \frac{g_{11}\,v_2}{g_{22}\,v_1}, \qquad \frac{dx^3}{dx^1} = \frac{v^3}{v^1} = \frac{g_{11}\,v_3}{g_{33}\,v_1},$$

$$v_1 = a_0^{1/2} s^{2/3}(U_2 + U_4 s^{2/3} + U_5 s), \qquad v_2 = b_0^{1/2} s(V_3 + V_4 s^{1/3} + V_5 s^{2/3} + V_6 s), \tag{7}$$

$$v_3 = c_0^{1/2} s(W_3 + W_4 s^{1/3} + W_5 s^{2/3} + W_6 s), \qquad s = a_0^{1/2} x^1.$$

Здесь x^i — ортогональная система, связанная с эмиттером $x^1 = 0$, v_κ — ковариантные компоненты скорости, a_κ, b_κ, c_κ — коэффициенты разложений g_{11}, g_{22}, g_{33} по x^1. Функции U_κ, V_κ, W_κ, зависящие от x^2, x^3, определены формулами

---

* В работе [10] в несколько отличной форме повторены результаты [1], а также приведено низшее по сравнению с (7) приближение для компонент скорости, содержавшее неточности в коэффициентах V_5, W_5, и соответствующие уравнения траекторий в форме (10).

$$U_2=\left(\frac{9J}{2}\right)^{1/3},\quad U_4=-\frac{9}{20}\frac{H^2}{U_2},\quad U_5=U_2\left(\frac{2}{3}\frac{a_1}{a_0^{3/2}}+\frac{4}{15}T\right),$$

$$H^2=M^2+N^2,\quad V_3=-N,\quad V_4=\frac{3}{4}\frac{LM}{U_2},\quad V_5=U_2\left(\frac{1}{5}\frac{J'_P}{J}-\kappa_1+\frac{1}{10}\frac{L^2N}{J}\right),\tag{8}$$

$$T=\varkappa_1+\varkappa_2,$$

$$V_6=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\frac{a_1}{a_0^{3/2}}+\varkappa_1-\varkappa_2\right)N+\frac{1}{10}\frac{J'_a}{J}L+\frac{1}{20}\frac{LM}{J}(H^2-L^2)-\frac{1}{2}L'_Q.$$

Здесь и далее L, M, N — физические компоненты напряженности магнитного поля, $J'_P=g_{22}^{-1/2}\partial J/\partial x^2$, $J'_Q=g_{33}^{-1/2}\partial J/\partial x^3$ — физические компоненты градиента $J(x^2, x^3)$, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ — главные кривизны эмиттера, T — его полная кривизна, κ_1, κ_2 и δ_1, δ_2 — главные кривизны поверхностей $x^2=\mathrm{const}$, $x^3=\mathrm{const}$ соответственно. Все функции в (8) вычисляются при $x^1=0$. Выражения для $W_к$ получаются из $V_к$ при помощи следующих замен:

$$M\to N,\quad P\to Q,\quad \kappa_1\to\delta_1,\quad \kappa_2\to\delta_2,\quad N\to -M,$$
$$Q\to -P,\quad \delta_1\to-\kappa_1,\quad \delta_2\to-\kappa_2,\quad \varkappa_1\to\varkappa_2,\quad \varkappa_2\to\varkappa_1.\tag{9}$$

Будем сохранять в дифференциальных уравнениях траектории члены порядка $s^{4/3}$. Тогда

$$g_{11}=a_0(1+a_0^{-3/2}a_1 s),\quad g_{22}=b_0(1-2\varkappa_1 s),$$

$$g_{33}=c_0(1-2\varkappa_2 s),$$

в то время как функции x^2, x^3 не подлежат разложению, так как уже линейный член будет приводить к превышению точности в силу $\bar{x}^2$, $\bar{x}^3\sim s^{4/3}$ на траектории. Параметрические уравнения траектории (1). после интегрирования (7) могут быть представлены в виде

$$x^1=t^3,\quad \bar{x}^2=\beta_4t^4+\beta_5t^5+\beta_6t^6+\beta_7t^7,$$
$$\bar{x}^3=\gamma_4t^4+\gamma_5t^5+\gamma_6t^6+\gamma_7t^7.\tag{10}$$

Здесь $\bar{x}^2=x^2-x_0^2$, $\bar{x}^3=x^3-x_0^3$, а x_0^2, x_0^3 — координаты точки старта на поверхности $x^1=0$. Траекторные коэффициенты $\beta_к$ следующим образом выражаются через $\bar{U}_к=U_к/U_2$, $\bar{V}_к=V_к/U_2$:

$$\beta_4=(3/4)\bar{V}_3 b_0^{-1/2}a_0^{2/3},\quad \beta_5=(3/5)\bar{V}_4 b_0^{-1/2}a_0^{5/6}\quad \beta_6=(1/2)(\bar{V}_5-\bar{V}_3\bar{U}_4)b_0^{-1/2}a_0,$$
$$\beta_7=(3/7)[\bar{V}_6-\bar{V}_3\bar{U}_5-\bar{V}_4\bar{U}_4+\bar{V}_3(a_0^{-3/2}a_1+2\varkappa_1)]\,b_0^{-1/2}a_0^{7/6}.\tag{11}$$

Коэффициенты $\gamma_к$ получаются из (11) при помощи замен (9). Длина дуги l траектории в соответствии с (3), (10) определяется уравнением

$$dl/dt=3a_0^{1/2}t^2(1+L_2t^2+L_3t^3),\quad L_2=(8/9)a_0^{-1}(b_0\beta_4^2+c_0\gamma_4^2)=$$
$$=(1/2)U_2^{-2}H^2a_0^{1/3},\quad L_3=(20/9)a_0^{-1}(b_0\beta_4\beta_5+c_0\gamma_4\gamma_5)+(1/2)a_0^{-1}a_1=\tag{12}$$
$$=(1/2)a_0^{-1}a_1,\quad l=a_0^{1/2}t^3(1+(3/5)L_2t^2+(1/2)L_3t^3).$$

Перейдем в (10) от параметра t к длине дуги траектории l. Обращение формулы для l из (12) и подстановка результата в (10) дает

$$t = l^{1/3}(1 + T_2 l^{2/3} + T_3 l), \quad l = a_0^{-1/} l, \quad T_2 = (-1/5) L_2, \quad T_3 = (-1/6) L_3,$$

$$x^1 = a_0^{-1/2}(l + \bar{\alpha}_5 l^{5/3} + \bar{\alpha}_6 l^2), \quad \bar{\alpha}_5 = -(3/10) U_2^{-2} H^2, \quad \bar{\alpha}_6 = -(1/4) a_0^{-3/2} a_1,$$

$$\bar{x}^2 = b_0^{-1/2}(\bar{\beta}_4 l^{4/3} + \bar{\beta}_5 l^{5/3} + \bar{\beta}_6 l^2 + \bar{\beta}_7 l^{7/3}),$$

$$\bar{x}^3 = c_0^{-1/2}(\bar{\gamma}_4 l^{4/3} + \bar{\gamma}_5 l^{5/3} + \bar{\gamma}_6 l^2 + \bar{\gamma}_7 l^{7/3}),$$

$$\bar{\beta}_4 = b_0^{1/2} a_0^{-2/3} \beta_4 = -(3/4) U_2^{-1} N, \quad \bar{\beta}_5 = b_0^{1/2} a_0^{-5/6} \beta_5 = (9/20) U_2^{-2} LM, \tag{13}$$

$$\bar{\beta}_6 = b_0^{1/2} a_0^{-1/2}(\beta_6 + 4\beta_4 T_2) = (1/10) J^{-1} J'_P -$$

$$-(1/2)\kappa_1 + (1/20) J^{-1} NL^2 + (1/60) J^{-1} NH^2,$$

$$\bar{\beta}_7 = b_0^{1/2} a_0^{-7/6}(\beta_7 + 4\beta_4 T_3 + 5\beta_5 T_2) = U_2^{-1}[-((37/70)\varkappa_1 + (1/10)\varkappa_2) N +$$

$$+ (3/70) J^{-1} L J'_Q - (3/140) L'_Q + J^{-1} LM((1/280) H^2 - (3/140) L^2)].$$

Для компонент вектора единичной касательной $\lambda^r = dx^r/dl$ имеем

$$\lambda^1 = \lambda_{10} + \lambda_{12} l^{2/3} + \lambda_{13} l, \quad \lambda^2 = \lambda_{21} l^{1/3} + \lambda_{22} l^{2/3} + \lambda_{23} l + \lambda_{24} l^{4/3},$$

$$\lambda_{10} = a_0^{-1/2}, \quad \lambda_{12} = (5/3) a_0^{-1/2} \bar{\alpha}_5, \quad \lambda_{13} = 2 a_0^{-1/2} \bar{\alpha}_6, \quad \lambda_{21} = (4/3) b_0^{-1/2} \bar{\beta}_4,$$

$$\lambda_{22} = (5/3) b_0^{-1/2} \bar{\beta}_5, \quad \lambda_{23} = 2 b_0^{-1/2} \bar{\beta}_6, \quad \lambda_{24} = (7/3) b_0^{-1/2} \bar{\beta}_7.$$

Абсолютные производные от λ^r по l на основании (2) вычисляются по формуле

$$\delta\lambda^r/\delta l = d\lambda^r/dl + \Gamma^r_{mn} \lambda^m dx^n/dl = d\lambda^r/dl + \Gamma^r_{mn} \lambda^m \lambda^n.$$

Среди слагаемых с символами Кристоффеля сохраним лишь те, которые не дают превышения принятой точности. Воспользуемся при этом выражениями для Γ^r_{mn}, справедливыми в случае ортогональной системы, через главные кривизны координатных поверхностей $(g_{aa} = h_a^2)$:

$$\Gamma^1_{11} = h_1^{-1} \partial h_1/\partial x^1, \quad \Gamma^1_{12} = -h_2 \kappa_1, \quad \Gamma^1_{13} = -h_3 \delta_1, \quad \Gamma^1_{22} = h_1^{-1} h_2^2 \varkappa_1,$$

$$\Gamma^1_{33} = h_1^{-1} h_3^2 \varkappa_2,$$

$$\Gamma^2_{11} = h_2^{-1} h_1^2 \kappa_1, \quad \Gamma^2_{12} = -h_1 \varkappa_1, \quad \Gamma^2_{22} = h_2^{-1} \partial h^2/\partial x^2, \quad \Gamma^2_{23} = -h_3 \delta_2, \tag{14}$$

$$\Gamma^2_{33} = h_2^{-1} h_3^2 \kappa_2,$$

$$\Gamma^3_{11} = h_3^{-1} h_1^2 \delta_1, \quad \Gamma^3_{13} = -h_1 \varkappa_2, \quad \Gamma^3_{22} = h_3^{-1} h_2^2 \delta_2, \quad \Gamma^3_{23} = -h_2 \kappa_2,$$

$$\Gamma^3_{33} = h_3^{-1} \partial h_3/\partial x^3.$$

В результате получим

$$\frac{\delta\lambda^1}{\delta l} = \frac{d\lambda^1}{dl} + \Gamma^1_{11}(\lambda^1)^2 = \frac{2}{3}\lambda_{12} l^{-1/3} + \lambda_{13} + \frac{1}{2}\frac{a_1}{a_0}\lambda_{10}^2 = \frac{2}{3}\lambda_{12} l^{-1/3} + 0 \cdot l^0,$$

$$\frac{\delta\lambda^2}{\delta l} = \frac{d\lambda^2}{dl} + \Gamma^2_{11}(\lambda^1)^2 + 2\Gamma^2_{12}\lambda^1\lambda^2 = \frac{1}{3}\lambda_{21} l^{-2/3} + \frac{2}{3}\lambda_{22} l^{-1/3} +$$

$$+ (\lambda_{23} + b_0^{-1/2}\kappa_1) + \left(\frac{4}{3}\lambda_{24} - 2\varkappa_1 \lambda_{21}\right) l^{1/3}.$$

Применяя (6), приходим к выражению

$$\text{к}^2=a_0(\delta\lambda^1/\delta l)^2+b_0(1-2\varkappa_1 l)(\delta\lambda^2/\delta l)^2+c_0(1-2\varkappa_2 l)(\delta\lambda^3/\delta l)^2=$$
$$=K_{-4}l^{-4/3}+K_{-2}l^{-2/3}+K_{-1}l^{-1/3},\quad K_{-4}=(1/9)U_2^{-2}H^2.$$

Извлечем квадратный корень из обеих частей равенства, пользуясь тем, что $H\neq 0$ по предположению,

$$\text{к}=k_{-2}l^{-2/3}+k_0+k_1 l^{1/3},\quad k_{-2}=(1/3)U_2^{-1}H,\quad k_{-1}=0,$$
$$k_0=-(1/5)(JH)^{-1}(NJ'_P-MJ'_Q)+(1/210)J^{-1}H^3-(1/60)J^{-1}L^2H,$$
$$k_1=(HU_2)^{-1}[((-31/45)\varkappa_1+(14/45)\varkappa_2)N^2+((14/45)\varkappa_1-$$
$$-(31/45)\varkappa_2)M^2+(1/15)(ML'_P+NL'_Q)+(1/6)J^{-1}L(MJ'_P+NJ'_Q)]. \tag{15}$$

Таким образом, кривизна не является аналитической функцией длины дуги даже в случае осесимметричных потоков [3] при $N=LM=0$, когда уравнение границы пучка не содержит дробных степеней, по меньшей мере, включая члены порядка $l^{7/3}$.

Для компонент главной нормали на основании (4) имеем

$$\nu^r=\text{к}^{-1}\delta\lambda^r/\delta l,\quad \nu^1=\nu_{11}l^{1/3}+\nu_{13}l,\quad \nu^2=\nu_{20}+\nu_{21}l^{1/3}+\nu_{22}l^{2/3}+\nu_{23}l,$$
$$\nu_{11}=(2/3)\bar\lambda_{12},\quad \nu_{13}=-(2/3)\bar\lambda_{12}\bar k_0,\quad \nu_{20}=(1/3)\bar\lambda_{21},\quad \nu_{21}=(2/3)\bar\lambda_{22},$$
$$\nu_{22}=\bar\lambda_{23}+b_0^{-1/2}\bar k_1-(1/3)\bar\lambda_{21}\bar k_0, \tag{16}$$
$$\nu_{23}=(4/3)\bar\lambda_{24}-2\varkappa_1\bar\lambda_{21}-(2/3)\bar\lambda_{22}\bar k_0-(1/3)\bar\lambda_{21}\bar k_1.$$

Черта означает, что соответствующая величина отнесена к k_{-2}. Вычислим скалярное произведение вектора напряженности магнитного поля H_i и вектора главной нормали ν^i и ограничимся двумя первыми членами

$$s=H_i\nu^i=a_0^{1/2}L\nu^1+b_0^{1/2}M\nu^2+c_0^{1/2}N\nu^3=s_0+s_1 l^{1/3},$$
$$s_0=b_0^{1/2}\nu_{20}M+c_0^{1/2}\nu_{30}N=0, \tag{17}$$
$$s_1=a_0^{1/2}\nu_{11}L+b_0^{1/2}\nu_{21}M+c_0^{1/2}\nu_{31}N=(1/2)U_2^{-2}LH^2.$$

Из (17) следует, что при $l=0$ магнитное поле ортогонально главной нормали, т. е. траектория электронов ориентируется всегда таким образом, чтобы касательное к эмиттеру магнитное поле было направлено по бинормали к ней.

Для подсчета кручения $\varkappa$ траектории воспользуемся формулой (6)

$$\varkappa=\sqrt{g}[(\lambda^2\nu^3-\lambda^3\nu^2)\delta\nu^1/\delta l+$$
$$+(\lambda^3\nu^1-\lambda^1\nu^3)\delta\nu^2/\delta l+(\lambda^1\nu^2-\lambda^2\nu^1)\delta\nu^3/\delta l]. \tag{18}$$

В выражениях для $\delta\nu^r/\delta l$ сохраним лишь члены, не дающие превышения точности:

$$\delta\nu^1/\delta l=d\nu^1/dl+\Gamma^1_{12}\nu^2\lambda^1+\Gamma^1_{13}\nu^3\lambda^1=$$
$$=(1/3)\nu_{11}l^{-2/3}+[\nu_{13}-\lambda_{10}(b_0^{1/2}\text{к}_1\nu_{20}+c_0^{1/2}\delta_1\nu_{30})],$$
$$\delta\nu^2/\delta l=d\nu^2/dl+\Gamma^2_{12}\nu^2\lambda^1=$$
$$=(1/3)\nu_{21}l^{-2/3}+(2/3)\nu_{22}l^{-1/3}+(\nu_{23}-a_0^{1/2}\varkappa_1\lambda_{10}\nu_{20}).$$

В результате для кручения имеем

$$\varkappa=\varkappa_{-2}l^{-2/3}+\varkappa_{-1}l^{-1/3}+\varkappa_0, \quad \varkappa_{-2}=(-1/2)U_2^{-1}L,$$
$$\varkappa_{-1}=-(2/5)(JH^2)^{-1}U_2(MJ'_P+NJ'_Q), \quad \varkappa_0=(-1/2)(JH^2)^{-1}L(NJ'_P-$$
$$-MJ'_Q)-(1/5)H^{-2}(NL'_P-ML'_Q)-3(\varkappa_1-\varkappa_2)H^{-2}MN-(1/180)J^{-1}LH^2. \tag{19}$$

Таким образом, кручение, как и кривизна при отличном от нуля касательном поле $H\neq 0$ на эмиттере, не является аналитической функцией длины дуги траектории и имеет особенность при $l=0$. Для специального класса потенциальных потоков $(L=0)$ с градиентом плотности тока, ортогональным магнитному полю при $x^1=0$, т. е. ориентированным по главной нормали к траектории $(MJ'_P+NJ'_Q=0)$ кручение на стартовой поверхности имеет конечное значение

$$\varkappa_0=-3(\varkappa_1-\varkappa_2)H^{-2}MN.$$

2. **Случай нулевого касательного магнитного поля** $H=0$. При $H=0$, т. е. для электростатических пучков или вихревых потоков с единственной отличной от нуля компонентой напряженности магнитного поля $L\neq 0$ на эмиттере, рассмотрение ведется по той же схеме, что и выше. Разложения для компонент скорости в дифференциальных уравнениях траектории (7) определяются выражениями

$$v_1=a_0^{1/2}s^{2/3}(U_0+U_1s+U_2s^2), \quad v_2=b_0^{1/2}s^{5/3}(V_1+V_2s+V_3s^2),$$
$$v_3=c_0^{1/2}s^{5/3}(W_1+W_2s+W_3s^2) \tag{20}$$

с коэффициентами из [3]

$$U_0=\left(\frac{9J}{2}\right)^{1/3}, \quad U_1=U_0\left(\frac{2}{3}\frac{a_1}{a_0^{3/2}}+\frac{4}{15}T\right), \quad V_1=U_0\left(\frac{1}{5}\frac{J'_P}{J}-\kappa_1\right),$$
$$V_2=U_0\left[\frac{a_1}{a_0^{3/2}}\left(\frac{1}{12}\frac{J'_P}{J}-\frac{5}{12}\kappa_1\right)+\frac{1}{10}T'_P-\frac{1}{2}\kappa'_{1S}+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{7}{30}\varkappa_1-\frac{4}{15}\varkappa_2\right)\kappa_1+\frac{1}{30}T\frac{J'_P}{J}\right], \quad \kappa'_{1S}\equiv g_{11}^{-1/2}\,\partial\kappa_1/\partial x^1. \tag{21}$$

При неоднородной плотности тока эмиссии для вычисления кривизны и кручения достаточно было бы сохранить в круглых скобках линейные члены. Высшее приближение потребуется в случае $J=\text{const}$. Параметрические уравнения траектории и разложения для элементов метрического тензора имеют вид

$$x^1=t, \quad \bar{x}^2=\beta_2t^2+\beta_3t^3+\beta_4t^4, \quad \bar{x}^3=\gamma_2t^2+\gamma_3t^3+\gamma_4t^4,$$
$$g_{11}=\left(a_0+\frac{\partial a_0}{\partial x^2}\bar{x}^2+\frac{\partial a_0}{\partial x^3}\bar{x}^3\right)+\left(a_1+\frac{\partial a_1}{\partial x^2}\bar{x}^2+\frac{\partial a_1}{\partial x^3}\bar{x}^3\right)t+a_2t^2+a_3t^3=$$
$$=a_0\left\{1+\frac{a_1}{a_0}t+\left(\frac{a_2}{a_0}-2b_0^{1/2}\kappa_1\beta_2-2c_0^{1/2}\delta_1\gamma_2\right)t^2+\left[\frac{a_3}{a_0}-2b_0^{1/2}\kappa_1\beta_3-\right.\right.$$
$$-2c_0^{1/2}\delta_1\gamma_3-2a_0^{1/2}b_0^{1/2}\left(\frac{a_1}{a_0^{3/2}}\kappa_1+\kappa'_{1S}-\varkappa_1\kappa_1\right)\beta_2-2a_0^{1/2}c_0^{1/2}\left(\frac{a_1}{a_0^{3/2}}\delta_1+\delta'_{1S}-\right.$$
$$\left.\left.\left.-\varkappa_2\delta_1\right)\gamma_2\right]t^3\right\}, \quad g_{22}=\left(b_0+\frac{\partial b_0}{\partial x^2}\bar{x}^2+\frac{\partial b_0}{\partial x^3}\bar{x}^3\right)+b_1t+b_2t^2= \tag{22}$$

$$= b_0\left\{1 - 2a_0^{1/2}\varkappa_1 t + \left[-\frac{1}{2}\frac{a_1}{a_0^{3/2}}\varkappa_1 + \kappa'_{1P} + \varkappa_1^2 - \kappa_1^2 - \delta_1\delta_2 + \right.\right.$$

$$\left.\left.+ ((b'_{02}/b_0)\beta_2 - 2c_0^{1/2}\delta_2\gamma_2)a_0^{-1}\right]a_0 t^2\right\}, \qquad b'_{02} \equiv \partial b_0/\partial x^2.$$

Напомним, что коэффициенты в разложениях (22) вычисляются в точке старта и являются константами. Траекторные коэффициенты β_κ связаны с U_κ, V_κ из (21) соотношениями ($\overline{U}_\kappa = U_\kappa/U_0$, $\overline{V}_\kappa = V_\kappa/U_0$)

$$\beta_2 = \frac{1}{2}\overline{V}_1 b_0^{-1/2}a_0, \qquad \beta_3 = \frac{1}{3}\left[\overline{V}_2 + \left(\frac{a_1}{a_0^{3/2}} + 2\varkappa_1 - \overline{U}_1\right)\overline{V}_1\right]b_0^{-1/2}a_0^{3/2},$$

$$\beta_4 = \frac{1}{4}\left\{\overline{V}_3 + \left(\frac{a_1}{a_0^{3/2}} + 2\varkappa_1 - \overline{U}_1\right)\overline{V}_2 + \left[\frac{a_2}{a_0} + \frac{a_1}{a_0^{3/2}}\left(\frac{5}{2}\varkappa_1 - \overline{U}_1\right) - \overline{U}_2 + \right.\right.$$

$$+ \overline{U}_1^2 - 2\varkappa_1\overline{U}_1 - \kappa'_{1P} + 3\varkappa_1^2 + \kappa_1^2 + \delta_1\delta_2 - b_0^{1/2}a_0^{-1}(2\kappa_1 + (1/2)\times$$

$$\left.\times (b'_{02}/b_0^{3/2}))\beta_2 - c_0^{1/2}a_0^{-1}(2\delta_1 - \delta_2)\gamma_2\right]\times$$

$$\left.\times \overline{V}_1 - (b_0^{1/2}\kappa'_{1P}\beta_2 + c_0^{1/2}\kappa'_{1Q}\gamma_2)a_0^{-1}\right\}b_0^{-1/2}a_0^2.$$

Для длины дуги траектории имеем

$$\frac{dl}{dt} = a_0^{1/2}(1 + L_1 t + L_2 t^2 + L_3 t^3), \qquad L_1 = \frac{1}{2}\frac{a_1}{a_0}, \quad L_2 = \frac{1}{2}\frac{a_2}{a_0} - \frac{1}{8}\frac{a_1^2}{a_0^2} +$$

$$+ 2\frac{b_0}{c_0}\beta_2^2 + 2\frac{c_0}{a_0}\gamma_2^2 - b_0^{1/2}\kappa_1\beta_2 - c_0^{1/2}\delta_1\gamma_2, \quad L_3 = \frac{1}{2}\frac{a_3}{a_0} - \frac{1}{4}\frac{a_1 a_2}{a_0^2} -$$

$$- \frac{1}{16}\frac{a_1^3}{a_0^3} + \frac{a_1}{a_0}\left(\frac{1}{2}b_0^{1/2}\kappa_1\beta_2 + \frac{1}{2}c_0^{1/2}\delta_1\gamma_2 - \frac{b_0}{a_0}\beta_2^2 - \frac{c_0}{a_0}\gamma_2^2\right) - b_0^{1/2}\kappa_1\beta_3 -$$

$$- c_0^{1/2}\delta_1\gamma_3 - a_0^{1/2}b_0^{1/2}\left(\frac{a_1}{a_0^{3/2}}\kappa_1 + \kappa'_{1S} - \varkappa_1\kappa_1\right)\beta_2 - a_0^{1/2}c_0^{1/2}\left(\frac{a_1}{a_0^{3/2}}\delta_1 + \right.$$

$$\left. + \delta'_{1S} - \varkappa_2\delta_1\right)\gamma_2 + (b_0/a_0)(6\beta_2\beta_3 - 4a_0^{1/2}\varkappa_1\beta_2^2) + (c_0/a_0)(6\gamma_2\gamma_3 - 4a_0^{1/2}\varkappa_2\gamma_2^2),$$

Выразим параметр t через длину дуги траектории

$$l = a_0^{1/2}t(1 + (1/2)L_1 t + (1/3)L_2 t^2 + (1/4)L_3 t^3),$$

$$t = \overline{l}(1 + T_1\overline{l} + T_2\overline{l}^2 + T_3\overline{l}^3),$$

$$\overline{l} = a_0^{-1/2}l, \qquad T_1 = -(1/2)L_1, \qquad T_2 = -(1/3)L_2 + (1/2)L_1^2,$$

$$T_3 = -(1/4)L_3 + (5/6)L_1L_2 - (5/8)L_1^3$$

и перейдем в (22) от t к l:

$$x^1 = a_0^{-1/2}(l + \overline{\alpha}_2 l^2 + \overline{\alpha}_3 l^3 + \overline{\alpha}_4 l^4), \qquad \overline{\alpha}_2 = a_0^{-1/2}T_1, \qquad \overline{\alpha}_3 = a_0^{-1}T_2, \qquad \overline{\alpha}_4 = a_0^{-3/2}T_3,$$

$$\overline{x}^2 = b_0^{-1/2}(\overline{\beta}_2 l^2 + \overline{\beta}_3 l^3 + \overline{\beta}_4 l^4), \qquad \overline{x}^3 = c_0^{-1/2}(\overline{\gamma}_2 l^2 + \overline{\gamma}_3 l^3 + \overline{\gamma}_4 l^4), \tag{23}$$

$$\overline{\beta}_2 = b_0^{1/2} a_0^{-1}\beta_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}\frac{J'_P}{J} - \text{к}_1\right), \qquad \overline{\beta}_3 = b_0^{1/2} a_0^{-3/2}(\beta_3 + 2\beta_2 T_1) =$$

$$= \left(\frac{19}{150}\varkappa_1 - \frac{1}{150}\varkappa_2\right)\frac{J'_P}{J} + \frac{1}{30}T'_P - \frac{1}{2}\varkappa_1 \text{к}_1 - \frac{1}{6}\text{к}'_{1S}.$$

Компоненты вектора касательной λ^r суть

$$\lambda^1 = \lambda_{10} + \lambda_{11} l + \lambda_{12} l^2 + \lambda_{13} l^3, \qquad \lambda^2 = \lambda_{21} l + \lambda_{22} l^2 + \lambda_{23} l^3, \tag{24}$$

$$\lambda_{10} = a_0^{-1/2}, \quad \lambda_{11} = 2a_0^{-1/2}\overline{\alpha}_2, \quad \lambda_{12} = 3a_0^{-1/2}\overline{\alpha}_3, \quad \lambda_{21} = 2b_0^{-1/2}\overline{\beta}_2, \quad \lambda_{22} = 3b_0^{-1/2}\overline{\beta}_3.$$

При вычислении абсолютной производной $\delta\lambda^r/\delta l$ необходимо сохранить квадратичные члены

$$\delta\lambda^1/\delta l = d\lambda^1/dl + \Gamma^1_{11}(\lambda^1)^2 + \Gamma^1_{22}(\lambda^2)^2 + \Gamma^1_{33}(\lambda^3)^2 + 2\Gamma^1_{12}\lambda^1\lambda^2 + 2\Gamma^1_{13}\lambda^1\lambda^3,$$

$$\delta\lambda^2/\delta l = d\lambda^2/dl + \Gamma^2_{11}(\lambda^1)^2 + \Gamma^2_{22}(\lambda^2)^2 + \Gamma^2_{33}(\lambda^3) + 2\Gamma^2_{12}\lambda^1\lambda^2 + 2\Gamma^2_{23}\lambda^2\lambda^3$$

и, следовательно, произвести соответствующие разложения элементов символов Кристоффеля с учетом порядка λ^r из (24):

$$\Gamma^1_{11} = \frac{1}{2g_{11}}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} = \frac{1}{2}a_0^{1/2}\left[\frac{a_1}{a_0^{3/2}} + \left(2\frac{a_2}{a_0^2} - \frac{a_1^2}{a_0^3}\right)l + \left(3\frac{a_3}{a_0^{5/2}} - \frac{7}{2}\frac{a_1 a_2}{a_0^{7/2}} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + (5/4)(a_1^3/a_0^{9/2}) + \text{к}_1\text{к}'_{1S} - \varkappa_1\text{к}_1^2 + \delta_1\delta'_{1S} - \varkappa_2\delta_1^2\right)l^2\right],$$

$$\Gamma^1_{12} = -g_{22}^{1/2}\text{к}_1 = -b_0^{1/2}[\text{к}_1 + (\text{к}'_{1S} - \varkappa_1\text{к}_1)l],$$

$$\Gamma^1_{13} = -g_{33}^{1/2}\delta_1 = -c_0^{1/2}[\delta_1 + (\delta'_{1S} - \varkappa_2\delta_1)l],$$

$$\Gamma^2_{11} = \frac{g_{11}}{\sqrt{g_{22}}}\text{к}_1 = \frac{a_0}{b_0^{1/2}}\left\{\text{к}_1 + \left(\frac{a_1}{a_0^{3/2}}\text{к}_1 + \text{к}'_{1S} + \varkappa_1\text{к}_1\right)l + \right.$$

$$+\left[\left(\frac{a_2}{a_0^2} - \frac{1}{4}\frac{a_1^2}{a_0^3}\right)\text{к}_1 + (a_1/a_0^{3/2})(\text{к}'_{1S} + \varkappa_1\text{к}_1) + (1/2)\text{к}''_{1S} + \varkappa_1\text{к}'_{1S} - \right.$$

$$\left.\left. - \text{к}_1\text{к}'_{1P} - (1/2)\delta_1\text{к}'_{1Q} + (3/2)\text{к}_1^3 + \text{к}_1\varkappa_1^2 + \text{к}_1\delta_1^2 + (1/4)(b'_{02}/b_0^{3/2})\text{к}_1^2\right]l^2\right\},$$

$$\Gamma^2_{12} = -g_{11}^{1/2}\varkappa_1 = -a_0^{1/2}\left[\varkappa_1 + \left(\frac{1}{2}\frac{a_1}{a_0^{3/2}}\varkappa_1 - \text{к}'_{1P} + \varkappa_1^2 + \text{к}_1^2 + \delta_1\delta_2\right)l\right].$$

В результате для $\delta\lambda^r/\delta l$ получаем

$$\delta\lambda^1/\delta l = d_{10} + d_{11} l + d_{12} l^2, \qquad \delta\lambda^2/\delta l = d_{20} + d_{21} l + d_{22} l^2,$$

$$d_{10} = \lambda_{11} + (1/2)(a_1/a_0)\lambda_{10}^2 = 0,$$

$$d_{11} = 2\lambda_{12} + \frac{a_1}{a_0}\lambda_{10}\lambda_{11} + \frac{1}{\sqrt{a_0}}\left(\frac{a_2}{a_0} - \frac{1}{2}\frac{a_1^2}{a_0^2}\right)\lambda_{10}^2 - \frac{4}{\sqrt{a_0}}\text{к}_1\overline{\beta}_2 -$$

$$- \frac{4}{\sqrt{a_0}}\delta_1\overline{\gamma}_2 = -\frac{1}{5\sqrt{a_0}}\left[\frac{J'_P}{J}\left(\frac{1}{5}\frac{J'_P}{J} - \text{к}_1\right) + \frac{J'_Q}{J}\left(\frac{1}{5}\frac{J'_Q}{J} - \delta_1\right)\right],$$

$$d_{20} = \lambda_{21} + (a_0/\sqrt{b_0})\text{к}_1\lambda_{10}^2 = (1/\sqrt{b_0})(1/5)(J'_P/J), \tag{25}$$

$$d_{21}=2\lambda_{22}+2\,\frac{a_0}{\sqrt{b_0}}\,\kappa_1\lambda_{10}\lambda_{11}+\frac{a_0}{\sqrt{b_0}}\left(\frac{a_1}{a_0^{3/2}}\,\kappa_1+\kappa'_{1S}+\varkappa_1\kappa_1\right)\lambda_{10}^2=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{b_0}}\left[\frac{1}{5}\,T'_P+\left(\frac{9}{25}\,\varkappa_1-\frac{1}{25}\,\varkappa_2\right)\frac{J'_P}{J}\right].$$

Для неоднородной плотности тока эмиссии квадрат кривизны задается выражением

$$\kappa^2=g_{22}(\delta\lambda^2/\delta l)^2+g_{33}(\delta\lambda^3/\delta l)^2=$$

$$=b_0(1-2\varkappa_1 l)(\delta\lambda^2/\delta l)^2+c_0(1-2\varkappa_2 l)(\delta\lambda^3/\delta l)^2=K_0+K_1 l.$$

Извлекая квадратный корень, получаем

$$\kappa=k_0+k_1 l,\qquad k_0=(1/5)J^{-1}|\nabla J|,\qquad |\nabla J|^2=J'^2_P+J'^2_Q,$$

$$k_0^{-1}k_1=|\nabla J|^{-2}\left[J(J'_P T'_P+J'_Q T'_Q)+\right.\tag{26}$$

$$\left.+(1/5)(4\varkappa_1-\varkappa_2)J'^2_P+(1/5)(4\varkappa_2-\varkappa_1)J'^2_Q\right].$$

Компоненты вектора главной нормали ν^r равны

$$\nu^1=\nu_{11}l,\qquad \nu^2=\nu_{20}+\nu_{21}l,\qquad \nu_{11}=\bar d_{11},\qquad \nu_{20}=\bar d_{20},\qquad \nu_{21}=\bar d_{21}-\bar k_1\bar d_{20}.$$

Чертой здесь отмечены величины, отнесенные к k_0.

На основании формул (18), (24), (27) кручение определяется выражением

$$\varkappa=\sqrt{g}(-\lambda^1\nu^3\delta\nu^2/\delta l+\lambda^1\nu^2\delta\nu^3/\delta l).\tag{27}$$

Сохраняя члены порядка единицы во входящих сюда абсолютных производных, имеем

$$\delta\nu^2/\delta l=d\nu^2/dl+\Gamma^2_{12}\lambda^1\nu^2=\nu_{21}-a_0^{1/2}\varkappa_1\lambda_{10}\nu_{20},$$

$$\varkappa=(b_0c_0)^{1/2}[\nu_{20}\nu_{31}-\nu_{30}\nu_{21}+(\varkappa_1-\varkappa_2)\nu_{20}\nu_{30}].\tag{28}$$

В результате для кручения получаем

$$\varkappa=|\nabla J|^{-2}\left[J(J'_P T'_Q-J'_Q T'_P)-(\varkappa_1-\varkappa_2)J'_P J'_Q\right].\tag{29}$$

Обратим внимание на симметричную структуру формул для кривизны и антисимметричную — для кручения. Из (29) видно, что при эмиссии со сферы $\varkappa_1=\varkappa_2=\mathrm{const}$ кручение траектории равно нулю, а в случае кругового цилиндра $\varkappa_1=\mathrm{const}$, $\varkappa_2=0$ задается выражением

$$\varkappa=-\varkappa_1|\nabla J|^{-2}J'_P J'_Q.$$

3. Случай однородной плотности тока эмиссии. При $J=\mathrm{const}$ необходимо специальное рассмотрение, так как $k_0=0$, и кручение будет определяться не кубическим членом в параметрических уравнениях траектории (22), (23), а членом четвертой степени. Для U_2, V_3 в (20) и траекторных коэффициентов в (22), (23) имеют место формулы

$$\bar U_2=\frac{11}{18}\,\frac{a_2}{a_0^2}-\frac{11}{144}\,\frac{a_1^2}{a_0^3}+\frac{11}{45}\,\frac{a_1}{a_0^{3/2}}\,T+\frac{67}{450}\,(\varkappa_1^2+\varkappa_2^2)+$$

$$+\frac{31}{300}\,\varkappa_1\varkappa_2-\frac{11}{18}\,(\kappa_1^2+\delta_1^2),$$

$$\overline{V}_3 = -\left(\frac{5}{18}\frac{a_2}{a_0^2} - \frac{5}{144}\frac{a^1}{a_0^3}\right)\kappa_1 + \frac{2}{3}\frac{a_1}{a_0^{3/2}}\left(\frac{1}{10}T'_P - \frac{1}{2}\kappa'_{1S} +\right.$$

$$\left. + \frac{7}{30}\varkappa_1\kappa_1 - \frac{4}{15}\varkappa_2\kappa_1\right) - \frac{1}{6}\kappa''_{1S} + \frac{67}{825}(\varkappa_1\varkappa'_{1P} + \varkappa_2\varkappa'_{2P}) +$$

$$+ \frac{31}{1100}(\varkappa_2\varkappa'_{1P} + \varkappa_1\varkappa'_{2P}) - \frac{1}{2}\kappa_1\kappa'_{1P} + \left(\frac{1}{5}\varkappa_1 - \frac{2}{15}\varkappa_2\right)\kappa'_{1S} +$$

$$+ \left(-\frac{7}{450}\varkappa_1^2 - \frac{67}{450}\varkappa_2^2 + \frac{3}{100}\varkappa_1\varkappa_2 + \frac{7}{9}\kappa_1^2 + \frac{5}{18}\delta_1^2 + \frac{1}{2}\delta_1\delta_2\right)\kappa_1,$$

$$\beta_2 = -\frac{1}{2}b_0^{-1/2}a_0\kappa_1, \quad \beta_3 = b_0^{-1/2}a_0^{3/2}\left(-\frac{1}{4}\frac{a_1}{a_0^{3/2}}\kappa_1 +\right.$$

$$\left. + \frac{1}{30}T'_P - \frac{1}{6}\kappa'_{1S} - \frac{1}{2}\varkappa_1\kappa_1\right),$$

$$\beta_4 = b_0^{-1/2}a_0^2\left[\left(-\frac{1}{6}\frac{a_2}{a_0^2} + \frac{1}{96}\frac{a_1^2}{a_0^3}\right)\kappa_1 + \frac{a_1}{a_0^{3/2}}\left(\frac{1}{40}T'_P - \frac{1}{8}\kappa'_{1S} - \frac{3}{8}\varkappa_1\kappa_1\right) -\right.$$

$$- \frac{1}{24}\kappa''_{1S} + \frac{1}{4}\kappa_1\kappa'_{1P} - \frac{1}{6}\varkappa_1\kappa'_{1S} + \frac{1}{8}\delta_1\kappa'_{1Q} + \left(\frac{7}{110}\varkappa_1 + \frac{1}{2640}\varkappa_2\right)\varkappa'_{1P} +$$

$$\left. + \left(\frac{133}{2640}\varkappa_1 + \frac{3}{220}\varkappa_2\right)\varkappa'_{2P} - \frac{11}{24}\kappa_1^3 - \frac{1}{3}\kappa_1\delta_1^2 - \frac{1}{2}\kappa_1\varkappa_1^2 - \frac{1}{16}\frac{b'_{02}}{b_0^{3/2}}\kappa_1^2\right],$$

$$\overline{\alpha}_1 = -\frac{1}{4}\frac{a_1}{a_0^{3/2}}, \quad \overline{\alpha}_2 = -\frac{1}{6}\frac{a_2}{a_0^2} + \frac{1}{6}\frac{a_1^2}{a_0^3} - \frac{1}{3}\kappa_1^2 - \frac{1}{3}\delta_1^2,$$

$$\overline{\alpha}_3 = -\frac{1}{8}\frac{a_3}{a_0^{5/2}} + \frac{13}{48}\frac{a_1 a_2}{a_0^{7/2}} - \frac{7}{48}\frac{a_1^3}{a_0^{9/2}} + \frac{1}{6}\frac{a_1}{a_0^{3/2}}(\kappa_1^2 + \delta_1^2) +$$

$$+ \frac{1}{30}(\kappa_1 T'_P + \delta_1 T'_Q) - \frac{7}{24}(\kappa_1\kappa'_{1S} + \delta_1\delta'_{1S}) - \frac{1}{8}(\varkappa_1\kappa_1^2 + \varkappa_2\delta_1^2),$$

$$\overline{\beta}_2 = -\frac{1}{2}\kappa_1, \quad \overline{\beta}_3 = \frac{1}{30}T'_P - \frac{1}{6}\kappa'_{1S} - \frac{1}{2}\varkappa_1\kappa_1,$$

$$\overline{\beta}_4 = -\frac{1}{24}\kappa''_{1S} + \frac{1}{4}\kappa_1\kappa'_{1P} - \frac{1}{6}\varkappa_1\kappa'_{1S} + \frac{1}{8}\delta_1\kappa'_{1Q} + \left(\frac{7}{110}\varkappa_1 + \frac{1}{2640}\varkappa_2\right)\varkappa'_{1P} +$$

$$+ \left(\frac{133}{2640}\varkappa_1 + \frac{3}{220}\varkappa_2\right)\varkappa'_{2P} - \frac{1}{8}\kappa_1^3 - \frac{1}{2}\kappa_1\varkappa_1^2 - \frac{1}{16}\frac{b'_{02}}{b_0^{3/2}}\kappa_1^2.$$

Коэффициенты в выражениях для $\delta\lambda^r/\delta l$ из (25) равны

$$d_{11} = 0, \quad d_{12} = (1/5)(\kappa_1 T'_P + \delta_1 T'_Q)a_0^{-1/2}, \quad d_{20} = 0, \quad d_{21} = (1/5)b_0^{-1/2}T'_P,$$

$$d_{22} = b_0^{-1/2}\left[\left(\frac{31}{55}\varkappa_1 + \frac{1}{220}\varkappa_2\right)\varkappa'_{1P} + \left(\frac{89}{220}\varkappa_1 + \frac{9}{55}\varkappa_2\right)\varkappa'_{2P}\right].$$

Кривизна траектории определяется соотношениями

$$\kappa = k_1 l + k_2 l^2, \quad k_1 = \frac{1}{5}|\nabla T|, \quad k_1^{-1}k_2 = 5\,|\nabla T|^{-2}\left\{\left[\left(\frac{4}{11}\varkappa_1 + \frac{1}{220}\varkappa_2\right)\varkappa'_{1P} +\right.\right.$$

$$+\left(\frac{9}{44}\varkappa_1+\frac{9}{55}\varkappa_2\right)\varkappa'_{2P}\Big]T'_P+\Big[\left(\frac{4}{11}\varkappa_2+\frac{1}{220}\varkappa_1\right)\varkappa'_{2Q}+ \qquad (30)$$

$$+\left(\frac{9}{44}\varkappa_2+\frac{9}{55}\varkappa_1\right)\varkappa'_{1Q}\Big]T'_Q\Big\}.$$

Для компонент главной нормали имеем

$$\nu^1=\nu_{11}l,\quad \nu^2=\nu_{20}+\nu_{21}l,\quad \nu_{11}=\bar{d}_{12},\ \nu_{20}=\bar{d}_{21},\ \nu_{21}=\bar{d}_{22}-k_2\bar{d}_{21}.$$

Здесь чертой отмечены величины, отнесенные к k_1. В абсолютных производных $\delta\nu^r/\delta l$ достаточно сохранить члены порядка единицы:

$$\frac{\delta\nu^1}{\delta l}=\frac{d\nu^1}{dl}+\Gamma^1_{12}\nu^2\lambda^1+\Gamma^1_{13}\nu^3\lambda^1=\nu_{11}-\lambda_{10}(b_0^{1/2}\kappa_1\nu_{20}+c_0^{1,2}\delta_1\nu_{30})=0,$$

причем для $\delta\nu^2/\delta l$ и $\varkappa$ справедливы формулы (28). Подставляя выражения для коэффициентов, получаем, что кручение траектории при однородной плотности тока эмиссии обусловлено переменной кривизной стартовой поверхности, как и кривизна (30):

$$\varkappa=-(\varkappa_1-\varkappa_2)\,|\nabla T|^{-2}\,[(\varkappa'_{1P}\varkappa'_{1Q}+\varkappa'_{2P}\varkappa'_{2Q})+ \qquad (31)$$

$$+(79/44)\varkappa'_{1P}\varkappa'_{2Q}+(9/44)\varkappa'_{1Q}\varkappa'_{2P}].$$

ЛИТЕРАТУРА

1 Кузнецов Ю. Е, Сыровой В. А. // ПМТФ 1966. № 2. С. 41.
2. Сыровой В. А. // ПМТФ. 1966. № 3. С. 50
3. Сыровой В. А. // Уч. записки ЦАГИ. 1970. Т. 1. № 5. С. 105.
4 Данилов В. Н., Сыровой В А. В кн.: Методы расчета электронно-оптических систем — М.: Наука, 1977. С. 87.
5. Данилов В. Н., Сыровой В. А. В кн.: Задачи физической электроники. — М: Наука, 1982. С. 32.
6 Данилов В. Н., Сыровой В. А. // ПМТФ. 1969. № 1. С. 11.
7 Сыровой В. А, Шантурин Л. П // Радиотехника и электроника 1987. Т. 32, № 5. С. 1048.
8. Данилов В Н Сыровой В. А. // Радиофизика. 1976. Т. 19. № 3. С. 460 (Изв. высш. учеб. заведений).
9. Мак-Коннел А Дж Введение в тензорный анализ. — М.: Физматгиз, 1963.
10. Radley D. E., Birtles A. B. // Int. J. Electr. 1966. V. 21. № 5. P. 465.

Всесоюзный электротехнический институт им. В. И. Ленина

Поступила в редакцию 29 сентября 1986 г.

TO THE GEOMETRY OF THREE-DIMENSIONAL ELECTRON FLOW NEAR ARBITRARY SMOOTH EMITTER

V. A. Syrovoj

The equations of three-dimensional electron trajectory near arbitrary smooth emitter under space-charge conditions are formulated using the antiparaxial expansions. The formulas for trajectory curvature and torsion are received in three special cases: 1) $H\neq0$; 2) $H=0$, $J\neq$const; 3) $J=$const where H is the tangential to the emitter magnetic field, J is the emission current density.