ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXXI, № 8 РАДИОФИЗИКА 1988

УДК 538.57:530.18

О ТОЧНЫХ РЕШЕНИЯХ ТРЕХМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ГИНЗБУРГА — ЛАНДАУ

Ю. А. Степанянц

Представлено преобразование, связывающее решения трехмерного уравнения Гинзбурга—Ландау с соответствующими решениями одномерного уравнения. С помощью установленного преобразования выписано точное решение трехмерного уравнения Гинзбурга—Ландау. Показано, что данное уравнение может быть записано в форме системы уравнений газовой динамики со специфическим уравнением состояния и плотностью распределения источников массы.

1. Фундаментальную роль в физике нелинейных волн в неравновесных средах играет известное уравнение Гинзбурга—Ландау (Г.—Л.). Обзор конкретных физических систем, описываемых этим уравнением, содержится в статье [1]. К настоящему времени накоплен довольно богатый материал о свойствах решений одномерного уравнения Г.—Л. (хотя и его нельзя считать исчерпывающим), значительно меньше исследованы различные варианты многомерных обобщений этого уравнения. Вместе с тем, физические ситуации, описываемые двух- и трехмерными уравнениями Г.—Л., возникают довольно часто. Поэтому представляет интерес исследование свойств многомерного уравнения Г.—Л., различная форма его записи, а также возможность получения отдельных точных решений.

2. Запишем исходное трехмерное уравнение Г.—Л. в следующем виде:

$$i\Psi_t + p\Psi_{xx} + q\Psi_{yy} + r\Psi_{zz} = i\gamma\Psi - s|\Psi|^2\Psi\,, \tag{1}$$

где p, q, r, s, γ — комплексные числа. Отметим, что в физических системах часто константы p, q, r бывают различными. Если p, q, r, s — действительные числа, а $\gamma=0$, то уравнение (1) представляет собой трехмерное нелинейное уравнение Шредингера, также хорошо известное в теории нелинейных волн.

Будем искать частные решения уравнения (1) в виде

$$\Psi(x, y, z, t) = \varphi(\xi, \tau),$$

где

$$\xi = a_1x + b_1y + c_1z\,, \quad \tau = a_2x + b_2y + c_2z + dt\,. \tag{2}$$

Здесь $a_{1,2}$, $b_{1,2}$, $c_{1,2}$, d — действительные числа. После подстановки (2) в (1) получим

$$\begin{gathered} id\varphi_\tau + p(a_1^2\varphi_{\xi\xi} + 2a_1a_2\varphi_{\xi\tau} + a_2^2\varphi_{\tau\tau}) + q(b_1^2\varphi_{\xi\xi} + 2b_1b_2\varphi_{\xi\tau} + b_2^2\varphi_{\tau\tau}) + \\ + r(c_1^2\varphi_{\xi\xi} + 2c_1c_2\varphi_{\xi\tau} + c_2^2\varphi_{\tau\tau}) = i\gamma\varphi - s|\varphi|^2\varphi\,. \end{gathered} \tag{3}$$

Если потребовать выполнения условий

$$a_1a_2p + b_1b_2q + c_1c_2r = 0, \quad a_2^2p + b_2^2q + c_2^2r = 0\,, \tag{4}$$

то уравнение (3) переходит в обычное одномерное уравнение Г.—Л.:

$$id_2\varphi_\tau + \sigma\varphi_{\xi\xi} = i\gamma\varphi - s|\varphi|^2\varphi\,, \tag{5}$$

где $\sigma = a_1^2 p + b_1^2 q + c_1^2 r$. Не нарушая общности, в дальнейшем можно положить $d_2 = 1$. Проанализируем, в каких случаях могут выполняться условия (4). Если рассматривать комплексные числа p, q, r как векторы на плоскости, то первому из условий (4) всегда можно удовлетворить подходящим выбором констант $a_{1,2}$, $b_{1,2}$, $c_{1,2}$, ибо три вектора на плоскости всегда линейно зависимы. Сложнее удовлетворить второму условию (4), поскольку коэффициентами перед p, q, r являются неотрицательные числа. Тем не менее в достаточно частых случаях это условие также может быть выполнено.

3. Преобразования (2) при выполнении условий (4) позволяют выписать некоторые точные решения уравнения (1), получаемые из соответствующих точных решений одномерного уравнения Г.—Л. [2] (отметим в связи с этим, что в работе [2] приведено несколько различных точных решений уравнения (5), найденных с помощью развития метода Хироты). Нетрудно проверить непосредственной подстановкой, что решением уравнения (5) является функция

$$\varphi = M \operatorname{sch} k\xi \, e^{-i[\omega\tau + \beta \ln(\operatorname{ch} k\xi)]}, \tag{6}$$

в которой свободных параметров по существу нет: параметры M, k, ω, β выражаются через коэффициенты уравнения (5), а именно:

$$\beta = \frac{3(s_i\sigma_i + s_r\sigma_r) \pm \sqrt{9(s_i\sigma_i + s_r\sigma_r)^2 + 8(\sigma_i s_r - \sigma_r s_i)^2}}{2(\sigma_i s_r - \sigma_r s_i)},$$

$$k^2 = \frac{\gamma_r}{\sigma_i(1-\beta^2) + 2\beta\sigma_r}, \tag{7}$$

$$\omega = -\gamma_i + k^2[2\beta\sigma_1 - \sigma_r(1-\beta^2)], \quad M = k(\beta^4 + 5\beta^2 + 4)^{1/4}\sqrt{|\sigma/s|}.$$

Здесь индексы r и i обозначают действительную и мнимую части соответствующей величины.

Данное решение является несингулярным, если коэффициенты в (5) таковы, что $k^2 > 0$. В этом случае оно представляет собой стоящий на месте автосолитон, фронт которого определенным образом ориентирован по отношению к координатным осям. Заполнение в этом автосолитоне в асимптотике $\xi \to \pm\infty$ представляет собой пару бегущих навстречу друг другу волн, которые вблизи точки $\xi = 0$ образуют стоячую волну.

Отметим попутно, что это же решение пригодно и для нелинейного уравнения Шредингера, содержащего активное и диссипативное слагаемые Последнее получается из (5) при $\sigma_i = 0$, $\sigma_r \neq 0$, $\gamma_i = 0$, $\gamma_r > 0$.

4. Рассмотрим в качестве примера достаточно типичный случай двумерного уравнения Г.—Л. и соответствующего ему точного решения. Пусть исходное уравнение имеет вид

$$i\Psi_t + p\Psi_{xx} - q\Psi_{yy} = i(\gamma\Psi - s|\Psi|^2\Psi). \tag{8}$$

В этом уравнении все коэффициенты будем считать положительными действительными числами. С помощью замены

$$\Psi(x, y, t) = \varphi(\xi, \tau), \quad \xi = ax - by, \quad \tau = t \tag{9}$$

уравнение (8) можно свести к одномерному

$$i\varphi_\tau + \sigma\varphi_{\xi\xi} = i(\gamma\varphi - s|\varphi|^2\varphi), \tag{10}$$

где $\sigma = pa^2 - qb^2$. Теперь легко выписать точное решение:

$$\Psi = \sqrt{\frac{3}{2}\frac{\gamma}{s}}\left\{\exp\left\{-i\sqrt{2}\left[\frac{\gamma}{4}t + \ln \operatorname{ch}\sqrt{\frac{\gamma}{2\sqrt{2\sigma}}}(ax - by)\right]\right\}\right\} \times$$

$$\times \operatorname{sch} \sqrt{\frac{\gamma}{2\sqrt{2\sigma}}}\,(ax - by)\ . \tag{11}$$

Здесь константы a и b определяют ориентацию фронта автосолитона и его размеры по x, y. В этом решении предполагается, что $\sigma > 0$, т. е. $a^2/b^2 > q/p$. Это значит, что данное решение описывает семейство автосолитонов, наклоненных к оси y под углами θ, которые заключены в интервале $(-\operatorname{arctg}\sqrt{p/q},\ \operatorname{arctg}\sqrt{p/q})$. Вне этого интервала данное решение невозможно. Физически это объясняется тем, что вне указанного диапазона углов нарушается баланс между диссипативными и активными эффектами, описываемыми соответствующими слагаемыми в правой части (8). Представляют интерес вопросы о нестационарном поведении начальных возмущений вида (11) вне этого диапазона углов, а также об устойчивости автосолитонов (11) по отношению к малым возмущениям, однако эти вопросы выходят за рамки данной работы. Отметим лишь, что поскольку найденное решение (11) исчезает на бесконечности по ξ, а среда, описываемая уравнением (8), неустойчива по отношению к малым возмущениям, то полученное решение (11) заведомо не может быть устойчиво в тех местах, где его амплитуда мала. Можно ожидать, что рост малых возмущений вдали от максимума автосолитона (11) приведет к установлению еще одного такого же автосолитона. Далее процесс может многократно повторяться, пока автосолитоны не «почувствуют» взаимного влияния друг на друга, после чего они вступят во взаимодействие, результат которого без детального решения уравнения (8) предсказать затруднительно.

5. Обратим внимание на еще одну интересную особенность уравнения Г.—Л. (1), а именно на возможность его представления в форме системы уравнений газовой динамики. Введем замену переменных $\Psi = \alpha e^{i\beta}$, где α, β — действительные функции координат и времени. Отметим, что подобного рода замена, впервые предложенная Маделунгом [3] и устанавливающая связь между уравнением Шредингера и системой уравнений гидродинамики, неоднократно использовалась в дальнейшем [4—6]. После подстановки этого выражения в (1) и выделения действительной и мнимой частей получаем систему уравнений:

$$\begin{aligned} &-\alpha\frac{\partial\beta}{\partial t} + p_r\frac{\partial^2\alpha}{\partial x^2} - p_i\alpha\left(\frac{\partial\beta}{\partial x}\right)^2 - 2p_i\frac{\partial\alpha}{\partial x}\frac{\partial\beta}{\partial x} - p_i\alpha\frac{\partial^2\beta}{\partial x^2} + \\ &+ q_r\frac{\partial^2\alpha}{\partial y^2} - q_r\alpha\left(\frac{\partial\beta}{\partial y}\right)^2 - 2q_i\frac{\partial\alpha}{\partial y}\frac{\partial\beta}{\partial y} - q_i\alpha\frac{\partial^2\beta}{\partial y^2} + r_r\frac{\partial^2\alpha}{\partial z^2} - \\ &- r_r\alpha\left(\frac{\partial\beta}{\partial z}\right)^2 - 2r_i\frac{\partial\alpha}{\partial z}\frac{\partial\beta}{\partial z} - r_i\alpha\frac{\partial^2\beta}{\partial z^2} + s_r\alpha^3 = 0; \end{aligned} \tag{12а}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\alpha}{\partial t} + 2p_r\frac{\partial\alpha}{\partial x}\frac{\partial\beta}{\partial x} + p_r\alpha\frac{\partial^2\beta}{\partial x^2} + p_i\frac{\partial^2\alpha}{\partial x^2} - p_i\alpha\left(\frac{\partial\beta}{\partial x}\right)^2 + \\ &+ 2q_r\frac{\partial\alpha}{\partial y}\frac{\partial\beta}{\partial y} + q_r\alpha\frac{\partial^2\beta}{\partial y^2} + q_i\frac{\partial^2\alpha}{\partial y^2} - q_i\alpha\left(\frac{\partial\beta}{\partial y}\right)^2 + \\ &+ 2r_r\frac{\partial\alpha}{\partial z}\frac{\partial\beta}{\partial z} + r_r\alpha\frac{\partial^2\beta}{\partial z^2} + r_i\frac{\partial^2\alpha}{\partial z^2} - r_i\alpha\left(\frac{\partial\beta}{\partial z}\right)^2 + s_i\alpha^3 = \gamma\alpha. \end{aligned} \tag{12б}$$

Введем теперь обозначения $\rho = \alpha^2$, $\boldsymbol{v} = \operatorname{grad}\beta$, отождествляя величину ρ с плотностью некоторого газодинамического течения, а $\boldsymbol{v}$ — с его скоростью. Из этих обозначений следует, что рассматриваемое течение является безвихревым с потенциалом β. В новых обозначениях уравнение (12а) принимает вид

$$
-\frac{\partial\beta}{\partial t}+\frac{p_r}{2\alpha^2}\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2}-\frac{p_r}{4\alpha^4}\left(\frac{\partial\rho}{\partial x}\right)^2-p_r\left(\frac{\partial\beta}{\partial x}\right)^2-\frac{p_i}{\alpha^2}\frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{\partial\beta}{\partial x}-
$$

$$
-p_i\frac{\partial^2\beta}{\partial x^2}+\frac{q_r}{2\alpha^2}\frac{\partial^2\rho}{\partial y^2}-\frac{q_r}{4\alpha^4}\left(\frac{\partial\rho}{\partial y}\right)^2-q_r\left(\frac{\partial\beta}{\partial y}\right)^2-
$$

$$
-\frac{q_i}{\alpha^2}\frac{\partial\rho}{\partial y}\frac{\partial\beta}{\partial y}-q_i\frac{\partial^2\beta}{\partial y^2}+\frac{r_r}{2\alpha^2}\frac{\partial^2\rho}{\partial z^2}-\frac{r_r}{4\alpha^4}\left(\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)^2- \tag{13}
$$

$$
-r_r\left(\frac{\partial\beta}{\partial z}\right)^2-\frac{r_i}{\alpha^2}\frac{\partial\rho}{\partial z}\frac{\partial\beta}{\partial z}-r_i\frac{\partial^2\beta}{\partial z^2}+s_r\rho=0.
$$

Положим далее $p_r=q_r=r_r\equiv c_r$ и $p_i=q_i=r_i\equiv c_i$. Возьмем градиент от левой части (13) и используем тождество $(\boldsymbol{v}\nabla)\boldsymbol{v}\equiv(1/2)\nabla v^2+[\boldsymbol{v}\operatorname{rot}\boldsymbol{v}]=(1/2)\nabla v^2$ (поскольку $\operatorname{rot}\boldsymbol{v}=\operatorname{rot}\operatorname{grad}\beta\equiv 0$), тогда получим

$$
(1/2)(\partial\boldsymbol{v}/\partial t)+c_r(\boldsymbol{v}\nabla)\boldsymbol{v}=-\nabla U, \tag{14}
$$

где

$$
U=-\frac{c_r}{4\rho}\Delta\rho+\frac{c_r}{8\rho^2}(\nabla\rho)^2+\frac{c_i}{2\rho}(\boldsymbol{v}\nabla\rho)+\frac{c_i}{2}\operatorname{div}\boldsymbol{v}-\frac{s_r}{2}\rho.
$$

Умножая уравнение (12б) на α, перепишем его в виде

$$
\frac{1}{2}\frac{\partial\rho}{\partial t}+c_r(\boldsymbol{v}\nabla\rho)+c_r\rho\operatorname{div}\boldsymbol{v}=R, \tag{15}
$$

где

$$
R=\gamma\rho-\frac{c_i}{2}\Delta\rho+\frac{c_i}{4\rho}(\nabla\rho)^2+c_i\rho\operatorname{div}\boldsymbol{v}-s_i\rho^2.
$$

Уравнения (14), (15) с помощью замены $\tau=2c_rt$, $P=U/c_r$, $Q=R/c_r$ можно окончательно записать в форме системы уравнений газовой динамики

$$
\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial\tau}+(\boldsymbol{v}\nabla)\boldsymbol{v}=-\nabla P,\qquad \frac{\partial\rho}{\partial\tau}+\operatorname{div}(\rho\boldsymbol{v})=Q \tag{16}
$$

со специфическим уравнением состояния $P(\rho,\boldsymbol{v})$ и плотностью источников $Q(\rho,\boldsymbol{v})$, определяемой искомыми переменными ρ и $\boldsymbol{v}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гапонов-Грехов А. В., Рабинович М. И. // Радиофизика, 1987. Т. 30. № 2. С. 131. (Изв. высш. учеб. заведений).
2. Nozaki K., Bekki N. // J. Phys. Soc. Japan. 1984. V. 53. № 5. P. 1581.
3. Madelung E. // Zts. Phys. 1926. V. 40. P. 322.
4. Spiegel E. A. // Physica. 1980. V. 1D. № 2. P. 236.
5. Абакумов А. И., Алексеев Б. В. // ДАН СССР. 1982. Т. 262. № 5. С. 1100.
6. Nonnenmacher T. E., Dukek J., Baumann J. // Lett. Nuovo Cim. 1983. V. 36. № 14. P. 453.

Горьковский политехнический институт

Поступила в редакцию 7 августа 1986 г.

ON EXACT SOLUTIONS OF THE THREE-DIMENSIONAL GINZBURG — LANDAU EQUATION

Yu. A. Stepanyants

The transformation between the solutions of three- and one-dimensional Ginzburg — Landau equations is presented. Such a transformation makes it possible to obtain an exact solution of the three-dimensional equation. It is shown that this equation can be written in the fluid dynamical form with a specific equation of state and density mass source distribution which depends on gas density and velocity.