

УДК 530.1

## РАДИАЦИОННОЕ УСКОРЕНИЕ БЫСТРЫХ ЧАСТИЦ В СИЛЬНОМ КВАНТУЮЩЕМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

В. Н. Цытович

Рассмотрено формирование релятивистских степенных спектров заряженных частиц при радиационном ускорении в сильном магнитном поле.

Известно, что квазилинейное ускорение частиц аналогично фермиевскому, однако при этом частица не отражается соответствующей неоднородностью, а проходит через нее [1]. Квазилинейное ускорение наблюдается во многих лабораторных экспериментах и ответственно за образование быстрых частиц — «хвостов» распределений. В работах [2—4] рассчитаны радиационные поправки к квазилинейному ускорению, которые могут быть получены как при помощи квантового релятивистского кинетического уравнения [2, 3], так и при помощи  $S$ -матрицы [4]. Квазилинейное ускорение описывает блуждание ускоряющейся частицы в поле случайных классических полей (наиболее простой пример электростатических полей ленгмюровских или других плазменных колебаний). Уравнение для регулярной функции квазилинейного ускорения получается усреднением по флуктуациям.

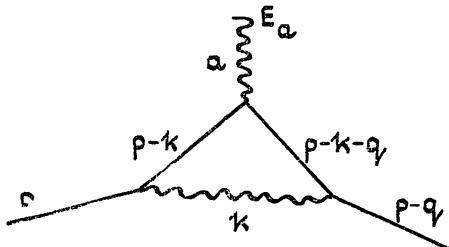
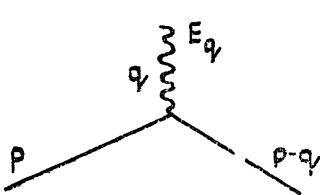


Рис. 1.

Рис. 2.

Рис. 1. Диаграмма взаимодействия быстрых частиц с резонансным полем.  
Рис. 2. Диаграмма радиационных поправок к взаимодействию отдельных быстрых частиц с резонансным полем.

Радиационные поправки также получаются усреднением по флуктуациям, включающим нулевые флуктуации полей. При этом в системе многих частиц усреднение по флуктуациям дает качественно новый эффект [4]. Если квазилинейный эффект, грубо говоря, описывается квадратом вершины, изображенной на рис. 1, где  $q$  — импульс, отдаваемый частицей случайному классическому полю (в отсутствие магнитного поля законы сохранения энергии и импульса в вершине дают черенковское условие), а радиационные поправки к процессу рис. 1 соответствуют, грубо говоря, произведению матричных элементов рис. 1 и перенормированного матричного элемента рис. 2, то при наличии многих частиц появляется новая возможность существования матричного элемента рис. 3а, когда виртуальный импульс передается от одной частицы другой и, следовательно, возникает вклад, описываемый, грубо говоря, произведением матричных элементов рис. 1 и рис. 3а.

Если квадрат матричного элемента рис. 1 в теории флуктуации дает в невырожденной системе (какую здесь и рассматриваем) эф-

фект, пропорциональный числу исходных частиц  $\Phi_p$ , как, впрочем, и радиационные поправки к квазилинейному ускорению, то эффект, возникающий от квадрата матричного элемента рис. 3, должен быть в первом приближении пропорционален  $\Phi_p \Phi_{p-k}$ . Квадратичными членами по  $\Phi_p$  для ускоряемых частиц пренебрегаем, как, впрочем, и поправками, содержащими эффекты более высокого порядка, чем первый, по  $e^2/\hbar c$  (именно такого порядка радиационные поправки к взаимодействию рис. 1). По обеим причинам остаются только эффекты произведения амплитуд рис. 2 и рис. 3 на амплитуду рис. 1. Но на рис. 3 две входящие линии, а на рис. 1 — только одна. Следовательно, одна из них должна быть флуктуационной, чтобы получался член, линейный по  $\Phi_p$  или  $\Phi_{p-k}$ . Это возможно лишь при рассмотрении квантовых флуктуаций. При этом в произведении амплитуды рис. 1 и рис. 3 в теории, использующей квантовые флуктуации, возникают как члены, пропорциональные  $\Phi_p$ , так и члены, пропорциональные  $\Phi_{p-k}$ . Это показано в строгой теории квантовых флуктуаций, развитой в [4]. Наличие члена, пропорционального  $\Phi_{p-k}$ , приводит к важным следствиям, так как при больших значениях виртуального импульса  $k$  (фактически, импульса, передаваемого от одной частицы к другой частице) возможным оказывается взаимодействие частиц с сильно различными импульсами, т. е. далекого слабого «хвоста» распределения с основной частью частиц. Такое взаимодействие не реализуется квазилинейно. В тех случаях, когда радиационные поправки доминируют, целесообразно использовать термин радиационные эффекты. Они начинают преобладать в генерации «хвостов» распределения для больших энергий, если, грубо говоря, концентрация основных частиц по крайней мере в  $\hbar c/e^2$  раз больше концентрации хвостовых. Как показано в [1-4], при этом генерируются степенные спектры, по всем известным свойствам соответствующие наблюдаемым спектрам космических лучей.

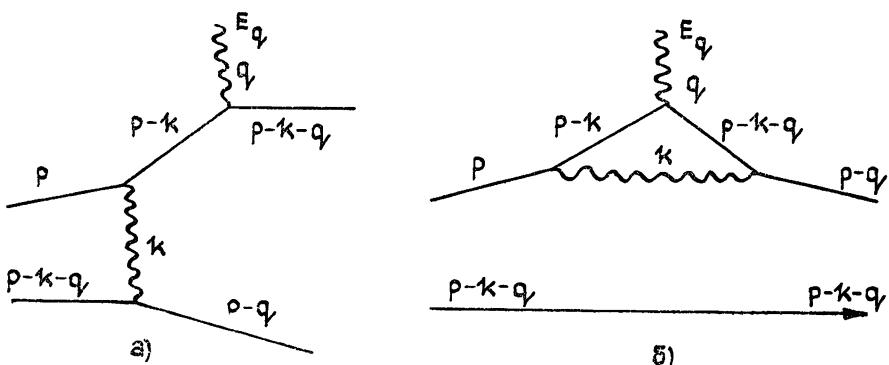


Рис. 3. На рис. 3а и рис. 3б начальные и конечные состояния двух частиц одинаковы, и в силу их неразличности обе диаграммы должны учитываться в расчете усредненных по квантовым флуктуациям радиационных поправок для усредненного движения системы многих частиц.

Для практических и астрофизических приложений большой интерес представляет обобщение этих результатов на случай наличия сильных магнитных полей, в общем случае квантующих магнитных полей (последний случай интересен для физики пульсаров). Решение этой задачи «в лоб» (т. е. непосредственный вывод соответствующих уравнений для матрицы плотности [1-3] или флуктуаций [4]), да еще в общем релятивистском случае, представляет собой очень трудоемкую задачу.

Мы предлагаем здесь решение на основе принципа соответствия, а именно, зная структуру уравнений кинетики с учетом радиационных эффектов, можно несложным обобщением записать соответствующее уравнение в сильном квантующем поле, вводя неизвестные функции типа  $V_{p,p'}$ , описывающие вероятность большой передачи импульса от

$\mathbf{p}$  к  $\mathbf{p}'$ . Далее, для расчета  $V_{\mathbf{p}, \mathbf{p}'}$  достаточно вычислить лишь один из членов этого уравнения. Показано, что при  $H_0=0$  для этого достаточно рассмотреть дополнительные флуктуации частиц в поле нулевых колебаний. Этот прием уже при  $H_0 \neq 0$  как бы дает матричный элемент на случай произвольных квантующих магнитных полей. В заключение обсуждаются механизмы рентгеновского излучения пульсаров, интерпретируемые в рамках предлагаемого радиационного ускорения в сильном магнитном поле.

**1. Общие уравнения.** Рассмотрим простоты ради частицы спина нуль (о частицах спина  $1/2$  см. [3]). Используя калибровку Ландау для векторного потенциала внешнего поля

$$A_x^{(H_0)} = -yH_0, \quad A_y^{(H_0)} = A_z^{(H_0)} = 0, \quad (1)$$

можно релятивистские уравнения движения частицы спина нуль в импульсном представлении ( $\hbar = c = 1$ )

$$i \frac{\partial \Psi_p(t)}{\partial t} = m \Psi'_p(t), \quad i \frac{\partial \Psi'_p(t)}{\partial t} = \frac{e_p^2}{m} \Psi_p(t) - \frac{2q}{m} \times \\ \times \int \left( \left( p - \frac{\mathbf{k}}{2} \right) A_{\mathbf{k}}(t) \right) \Psi_{p-\mathbf{k}}(t) d\mathbf{k} + \frac{q^2}{m} \int (A_{\mathbf{k}_1}(t) A_{\mathbf{k}_2}(t)) \Psi_{p-\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2}(t) d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 \quad (2)$$

$\Psi_p(t)$ ,  $\Psi'_p(t)$  — две независимые компоненты, описывающие частицы спина нуль [5]) записать в виде

$$i \frac{\partial \Psi_p(t)}{\partial t} = m \Psi'_p(t), \quad i \frac{\partial \Psi'_p(t)}{\partial t} = \frac{e_p^2}{m} \Psi_p(t) - \\ - \frac{2qiH_0}{m} p_x \frac{\partial \Psi_p(t)}{\partial p_y} - \frac{q^2}{m} H_0^2 \frac{\partial^2 \Psi_p(t)}{\partial p_y^2}. \quad (3)$$

Его решением будет

$$\Psi_p(t) = \varphi_{n, p_x, p_z} \exp(-i\lambda \epsilon_{n, p_z} t), \quad \epsilon_{n, p_z} = \sqrt{m^2 + p_z^2 + qH_0(2n+1)}; \quad (4)$$

$$\varphi_{n, p_x, p_z}(p_y) = (\pi q H_0)^{-1/4} H_n \left( \frac{p_y}{\sqrt{qH_0}} \right) \exp \left( -\frac{p_y^2}{2qH_0} - i \frac{p_y p_x}{qH_0} \right), \quad (5)$$

где  $\lambda = \pm 1$  — знак энергии,  $H_n(\xi)$  — полиномы Эрмита,  $n$  — целое число. Полный набор квантовых чисел, характеризующих состояние частицы  $n$ ,  $p_x$ ,  $p_z$ ,  $\lambda$ ,

$$\Psi_p(t) = \sum_{n, \lambda} \Psi_{n, p_x, p_z}(t) \varphi_{n, p_x, p_z}(p_y). \quad (6)$$

Введем  $\Psi_{n, p_x, p_z}^\lambda$  — волновую функцию в представлении  $n$ ,  $p_z$ ,  $p_x$ ,  $\lambda$  — соотношением

$$\Psi_{n, p_x, p_z}^\lambda(t) = \frac{1}{2} \left( \Psi_{n, p_x, p_z}(t) + \frac{i}{\epsilon_{n, p_z}} \Psi'_{n, p_x, p_z}(t) \right), \quad (7)$$

где  $\Psi'_{n, p_x, p_z}(t)$  — коэффициенты разложения (аналогичного (6)) для  $\Psi_p(t)$  по функциям  $\varphi_{n, p_x, p_z}(p_y)$ . Тогда, как легко видеть, система уравнений (2), в которой учтены только линейные по произвольному векторному потенциалу  $A$  члены, приобретает вид

$$i \frac{\partial \Psi_{n,p_x,p_z}^{\lambda}(t)}{\partial t} = \lambda \epsilon_{n,p_z} \Psi_{n,p_x,p_z}^{\lambda}(t) - \frac{q\lambda}{\epsilon_{n,p_z} \sqrt{\pi q H_0 2^n n!}} \times$$

$$\times \sum_{n',\lambda'} \frac{1}{\sqrt{2^n n'!}} \int dk dp_y (p A_k(t)) \Psi_{n',p_x-k_x,p_z-k_z}^{\lambda'}(t) \times \\ \times H_n \left( \frac{p_y}{\sqrt{q H_0}} \right) H_{n'} \left( \frac{p_y - k_y}{\sqrt{q H_0}} \right) \exp \left[ -\frac{p_y^2}{2qH_0} - \frac{(p_y - k_y)^2}{2qH_0} \right]. \quad (8)$$

Интегрирование по  $p_y$  дает ( $\mathbf{k}_{\perp} = \{k_x, k_y\}$ )

$$i \frac{\partial \Psi_{n,p_x,p_z}^{\lambda}(t)}{\partial t} = \lambda \epsilon_{n,p_z} \Psi_{n,p_x,p_z}^{\lambda}(t) - \sum_{\lambda',n} \frac{q\lambda}{\epsilon_{n,p_z}} \int dk \times \\ \times \Psi_{n',p_x-k_x,p_z-k_z}^{\lambda'}(t) ((p_x A_{k,x}(t) + p_z A_{k,z}(t)) \times \\ \times I_{n,n'}(\mathbf{k}_{\perp}) + A_{k,y} \sqrt{q H_0 / 2} [\sqrt{n} I_{n-1,n'}(\mathbf{k}_{\perp}) + \sqrt{n+1} \times \\ \times I_{n+1,n'}(\mathbf{k}_{\perp})]) \exp \left[ i \frac{(p_y - k_x/2) k_y}{q H_0} \right]; \quad (9)$$

$$I_{n,n'}(\mathbf{k}_{\perp}) = \begin{cases} I_{n'-n}^{n-n'}(\mathbf{k}_{\perp}), & n' < n; \\ (I_n^{n'-n}(-\mathbf{k}_{\perp}))^*, & n' > n; \end{cases} \quad (10)$$

$$I_n^{n-n'}(\mathbf{k}_{\perp}) = \sqrt{\frac{n'!}{n!}} L_{n'-n} \left( \frac{k_{\perp}^2}{2qH_0} \right) \left( \frac{k_y + ik_x}{\sqrt{2qH_0}} \right)^{n-n'} \exp \left( -\frac{k_{\perp}^2}{4qH_0} \right), \quad (11)$$

$L_n^m$  — полиномы Лягера. Может быть выписан и квадратичный по  $A$  член в общем уравнении, однако этого мы делать не будем ввиду его громоздкости, а также потому, что он в дальнейшем не будет использоваться.

Точное уравнение (с учетом члена  $A^2$ ) может быть использовано для того, чтобы записать в этом представлении уравнение для оператора матрицы плотности:

$$\hat{f}_{p_x,p_z,k_x,k_z}^{\lambda,\lambda',n,n'}(t) = (1/2) (\hat{\Psi}_{n,p_x-k_x/2,p_z-k_z/2}^{+\lambda'}(t) \times \\ \times \hat{\Psi}_{n,p_x+k_x/2,p_z+k_z/2}^{\lambda}(t) + \hat{\Psi}_{n,p_x+k_x/2,p_z+k_z/2}^{\lambda}(t) \hat{\Psi}_{n',p_x-k_x/2,p_z-k_z/2}^{+\lambda'}(t)). \quad (12)$$

Квантование поля  $\Psi$  в отсутствие дополнительных полей кроме  $H_0$  производится по собственным функциям в магнитном поле, т. е. вводятся операторы рождения и уничтожения частиц в состояниях, описываемых полным набором квантовых чисел  $n, p_x, p_z, \lambda$ . Операторы, фигурирующие в (12), могут быть (при наличии в общем случае квантованных полей) выражены через операторы «свободных» частиц (т. е. операторы рождения и уничтожения в состоянии  $n, p_x, p_z, \lambda$ ), через  $S$ -матрицы при использовании, как обычно, представления взаимодействия. Считаем присутствующими случайное поле нулевых флуктуаций и классическое случайное поле (приводящее к квазилинейной диффузии). Нас интересует поведение усредненной функции распределения  $\Phi_{n,p_x,p_z}(t)$ :

$$\Phi_{n,p_x,p_z,k_x,k_z}(t) = \sum_{\lambda} \epsilon_{n,p_z} \lambda \langle f_{p_x,p_z,k_x,k_z}^{\lambda,\lambda,n,n}(t) \rangle = \Phi_{n,p_x,p_z}(t) \delta(k_x) \delta(k_z) \quad (13)$$

(считается, что распределение однородно по  $x$  и  $z$ ).

Поскольку внешнее случайное поле классическое (импульсы частиц много больше характерных импульсов поля,  $p \gg k$ ), то в первом приближении должно получиться (и получается) квазилинейное уравнение

$$\frac{d\Phi_{n,p_x,p_z}(t)}{t} = \hat{I}_{n,p_x,p_z}^{q_l} \Phi_{n,p_x,p_z}(t), \quad (14)$$

где  $\hat{I}_{n,p_x,p_z}^{q_l}$  — известный квазилинейный оператор диффузии частиц при наличии внешнего магнитного поля (см. [1]).

Используем теперь результаты, полученные при  $H_0=0$  в [2], когда полным набором является  $\mathbf{p}$  и вместо  $\Phi_{n,p_x,p_z}$  фигурирует  $\Phi_p$ . Нашей задачей будет отыскание  $V_{n,n',p_x,p_z,p_x',p_z'}$ .

**2. Движение частиц в поле нулевых электромагнитных флюктуаций.** Пусть вначале  $H_0=0$ :

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi_p}{dt} = & \hat{I}_p^{q_l} \Phi_p + q^2 \int V_{p,p'} \frac{dp'}{(2\pi)^3} \left[ \frac{1}{(\epsilon_p - \epsilon_{p'} + |\mathbf{p} - \mathbf{p}'|)^2} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{(\epsilon_p + \epsilon_{p'} + |\mathbf{p} - \mathbf{p}'|)^2} \right] \hat{I}_{p'}^{q_l} \Phi_{p'}; \end{aligned} \quad (15)$$

$$V_{p,p'} = 2\pi [p, p']^2 / \epsilon_p \epsilon_{p'} |p - p'|^3, \quad (16)$$

где  $q$  — заряд частицы (в единицах  $\sqrt{\hbar c}$ ).

В уравнении для радиационных эффектов, полученном в [2], содержатся также члены порядка  $q^2$  ( $e^2/\hbar c$  для электронов), которые пропорциональны  $\Phi_p$  (и поэтому всегда имеют относительную малость  $q^2$ ). Они опущены в (15), так же как и члены, содержащие  $\hat{I}_{p'}$  (а не  $\hat{I}_p$ , как в (15)). Если обозначить

$$R_{pp'} = q^2 V_{pp'} \left[ \frac{1}{(\epsilon_p - \epsilon_{p'} + |\mathbf{p} - \mathbf{p}'|)^2} - \frac{1}{(\epsilon_p + \epsilon_{p'} + |\mathbf{p} - \mathbf{p}'|)^2} \right], \quad (17)$$

то общее уравнение [2] имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi_p}{dt} = & \hat{I}_p^{q_l} \Phi_p + \int R_{pp'} \hat{I}_{p'}^{q_l} \Phi_{p'} \frac{dp'}{(2\pi)^3} - \int R_{p'p} \hat{I}_p^{q_l} \Phi_p \frac{dp'}{(2\pi)^3} + \\ & + \hat{I}_p^{q_l} \int (R_{pp'} \Phi_p - R_{p'p} \Phi_{p'}) \frac{dp'}{(2\pi)^3}. \end{aligned} \quad (18)$$

Радиационный член, выписанный в (15), является главным членом, ответственным за генерацию степенных спектров быстрых частиц.

Нетрудно обобщить на случай сильных полей как уравнение (15), так и общее уравнение (18). Мы здесь выпишем уравнение, соответствующее (15):

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi_{n,p_x,p_z}(t)}{dt} = & \hat{I}_{n,p_x,p_z}^{q_l} \Phi_{n,p_x,p_z}(t) + q^2 \sum_{n'} \int \frac{dp'}{(2\pi)^3} V_{n,n',p_z,p_x',p_x} \times \\ & \times \left[ \frac{1}{(\epsilon_{n,p_z} - \epsilon_{n',p_z'} + |\mathbf{p} - \mathbf{p}'|)^2} - \frac{1}{(\epsilon_{n,p_z} + \epsilon_{n',p_z'} + |\mathbf{p} - \mathbf{p}'|)^2} \right] \times \\ & \times \hat{I}_{n',p_x',p_z'}^{q_l} \Phi_{n',p_x',p_z'}(t). \end{aligned} \quad (19)$$

Поле нулевых колебаний электромагнитного поля описываем как поперечное случайное поле, удовлетворяющее соотношениям для вектор-потенциала ( $\hbar = c = 1$ , кулоновская калибровка):

$$\langle A_{k,i} A_{k',j}^+ \rangle = \frac{1}{4\pi^2 |k|} \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \delta(k + k'), \quad \langle A_{k,i}^+ A_{k',j} \rangle = 0,$$

$$(20)$$

$$A_k(t) = A_k e^{-i|k|t} + A_k^+(t) e^{i|k|t}.$$

В уравнении для распределения частиц (вигнеровской матрицы плотности) достаточно оставить (см. ниже) линейный по случайному полю член. К примеру, для частиц спина нуль ( $H_0 = 0$ ) (см. [2])

$$i \frac{\partial}{\partial t} f_{p,k}^{\lambda,\lambda'}(t) = (\lambda \epsilon_{p+k/2} - \lambda' \epsilon_{p-k/2}) f_{p,k}^{\lambda,\lambda'}(t) - q \sum_{\lambda''} \int dk_1 \left[ \frac{\lambda}{\epsilon_{\lambda''+k/2}} \left( \left( p + \frac{k}{2} \right), A_{k_1}(t) \right) f_{p+k_1/2, k-k_1}^{\lambda,\lambda''}(t) \right],$$

$$(21)$$

$$A_{k_1}(t) \right) f_{p-k_1/2, k-k_1}^{\lambda'',\lambda'}(t) - \frac{\lambda'}{\epsilon_{p-k/2+k_1}} \left( \left( p - \frac{k}{2} \right), A_{k_1}(t) \right) f_{p+k_1/2, k-k_1}^{\lambda,\lambda''}(t)$$

где  $\epsilon_p = \sqrt{p^2 + m^2}$ ,  $\lambda = \pm 1$  — знак энергии.

Процедура получения уравнения для усредненного по нулевым колебаниям распределения  $\Phi_{p,k}(t) = \sum_{\lambda} \lambda \langle f_{p,k}^{\lambda}(t) \rangle$  повторяет известную процедуру получения квазилинейного уравнения. Вводится  $\Phi$  и  $\delta f$ , уравнение (21) усредняется, что дает уравнение для  $\Phi$ , и вычитается из (21), что дает уравнение для  $\delta f$ , в уравнении для  $\delta f$  оставляются в первом приближении лишь члены типа  $\sim A\Phi$ , отбрасываются члены типа  $A\delta f$ , решение уравнения для  $\delta f$  подставляется в уравнение для  $\Phi$ . Считая для простоты усредненное распределение однородным в пространстве  $\Phi_{p,k}(t) = \delta(k) \Phi_p(t)$ , получаем

$$\frac{d\Phi_p(t)}{dt} = \hat{I}_p^{qL} \Phi_p(t) + \frac{q^2}{4\pi^2} \sum_{\lambda} \lambda \int \frac{dk}{k^3} \frac{[pk]^2}{\epsilon_p \epsilon_{p-k}} \times$$

$$\times \int_0^\infty d\tau \{ \Phi_{p+k}(t-\tau) \exp[-i(\epsilon_{p+k} - \lambda \epsilon_p + |k|)\tau] +$$

$$+ \Phi_{p-k}(t-\tau) \exp[-i(\epsilon_{p-k} - \lambda \epsilon_p - |k|)\tau] + \Phi_p(t-\tau) \times$$

$$\times \exp[-i(\lambda \epsilon_{p+k} - \epsilon_p + |k|)\tau] - \Phi_p(t-\tau) \exp[-i(\lambda \epsilon_{p-k} - \epsilon_p - |k|)\tau] \}.$$

$$(22)$$

В правую часть (22) добавлен еще обычный оператор квазилинейного ускорения  $\hat{I}_p^{qL} \Phi_p$ , для которого достаточно использовать классическое выражение. Члены (22), содержащие  $\Phi_p$ , в  $q^2$  раз меньше квазилинейных, а те члены (22), которые содержат  $\Phi_{p+k}$  или  $\Phi_{p-k}$ , описывают генерацию быстрых частиц (считается, что  $\Phi_{p\pm k} \gg \Phi_p$ ). Из приведенного результата видно, что очень существенную роль играет запаздывающий характер взаимодействия (входит функция распределения в прошлые моменты времени). В отсутствие квазилинейного ускорения это малосущественно. Наличие же необратимого квазилинейного ускорения дает существенный эффект. Разлагая по запаздыванию, имеем

$$\frac{d\Phi_p(t)}{dt} = \hat{I}_p^{qL} \Phi_p(t) - \frac{q^2}{4\pi^2} \sum_{\lambda} \int \frac{dp'}{|p-p'|^3} \frac{[pp']^2}{\epsilon_p \epsilon_{p'}} \lambda \frac{d\Phi_{p'}(t)}{dt} \times$$

$$\times \int_0^\infty \tau dt \{ \exp[-i\tau(\epsilon_{p'} - \lambda \epsilon_p + |p-p'|)] + \exp[-i\tau(\lambda \epsilon_p - \epsilon_{p'} -$$

$$(23)$$

$$\times \int_0^\infty \tau dt \{ \exp[-i\tau(\epsilon_{p'} - \lambda \epsilon_p + |p-p'|)] + \exp[-i\tau(\lambda \epsilon_p - \epsilon_{p'} -$$

$$-|p - p'|]) \} \simeq \hat{I}_{\mathbf{p}}^{q_1} \Phi_p(t) + \frac{q^2}{2\pi^3} \int \frac{dp' [p p']^2}{\epsilon_{\mathbf{p}} \epsilon_{\mathbf{p}'} |p - p'|^3} \times \\ \times \left\{ \frac{1}{(\epsilon_{\mathbf{p}'} - \epsilon_{\mathbf{p}} + |p - p'|)^3} - \frac{1}{(\epsilon_{\mathbf{p}'} + \epsilon_{\mathbf{p}} + |p - p'|)^3} \right\} \hat{I}_{\mathbf{p}'}^{q_1} \Phi_{p'}.$$

Здесь  $d\Phi_{p'}(t)/dt$  заменено в первом приближении на  $\hat{I}_{\mathbf{p}'}^{q_1} \Phi_{p'}$ .

Соотношение дает правильную зависимость и порядок величины, соответствующий точному расчету [2], а именно формуле (15), (16).

Для нас здесь существенно, что сразу можно получить правильное выражение для  $V_{pp'}$ . Структура же общих уравнений с их энергетическими знаменателями достаточно общая и при  $H_0 \neq 0$  имеет вид (19).

При  $H_0 \neq 0$  запишем уравнение для оператора плотности (12) в поле нулевых колебаний (20). Используя уравнение (8), получим

$$i \frac{\partial f_{p_x, p_z, k_x, k_z}^{\lambda, \lambda', n, n'}(t)}{\partial t} = (\lambda \epsilon_{n, p_x + k_z/2} - \lambda' \epsilon_{n', p_z - k_z/2}) f_{p_x, p_z, k_x, k_z}^{\lambda, \lambda', n, n'}(t) - \\ - \frac{q\lambda}{\epsilon_{n, p_x + k_z/2} n'', \lambda''} \sum \int d\mathbf{k}' \left\{ \left[ \left( p_x + \frac{k_x}{2} \right) A_{k', x} + \left( p_z + \frac{k_z}{2} \right) A_{k', z} \right] I_{n, n''}(\mathbf{k}'_\perp) + \right. \\ \left. + A_{k', y} \sqrt{\frac{qH_0}{2}} [V\bar{n} I_{n-1, n''}(\mathbf{k}'_\perp) + V\bar{n+1} I_{n+1, n''}(\mathbf{k}'_\perp)] \right\} \times \\ \times f_{p_x - k_x/2, p_z - k_z/2, k_x - k_x', k_z - k_z'}^{\lambda'', \lambda', n'', n'}(t) \times \exp \left[ i \frac{(p_x + k_x/2) k_y'}{qH_0} - i \frac{k_x' k_y'}{2qH_0} \right] + \\ + \frac{q\lambda'}{\epsilon_{n', p_z - k_z/2} n'', \lambda''} \sum \int d\mathbf{k}' \left\{ \left[ \left( p_x - \frac{k_x}{2} \right) A_{k', x} + \left( p_z - \frac{k_z}{2} \right) A_{k', z} \right] I_{n', n''}^*(-\mathbf{k}'_\perp) + \right. \\ \left. + A_{k', y} \sqrt{\frac{qH_0}{2}} [V\bar{n'} I_{n'-1, n''}^*(-\mathbf{k}'_\perp) + V\bar{n'+1} I_{n'+1, n''}^*(-\mathbf{k}'_\perp)] \right\} \times \\ \times f_{p_x + k_x/2, p_z + k_z/2, k_x - k_x', k_z - k_z'}^{\lambda, \lambda', n, n'}(t) \exp \left[ i \frac{(p_x - k_x/2) k_y'}{qH_0} + i \frac{k_x' k_y'}{2qH_0} \right]. \quad (24)$$

Как ясно из предыдущего, именно линейного по  $A$  члена достаточно для проведения всех расчетов, аналогичных вышеприведенным при  $H_0 = 0$ . В результате получим, что в уравнении (19) (ср. с (16))

$$V_{n, n', p_x, p_z, p_x', p_z'} = \frac{|[(p - p'), \Gamma_{n, n'}(p_\perp - p'_\perp)]|^2}{\epsilon_{n, p_z} \epsilon_{n', p_z'} |p - p'|^3}, \quad (25)$$

где  
 $\Gamma_{n, n', x}(p_\perp - p'_\perp) = p_x I_{n, n'}(p_\perp - p'_\perp)$ ,  $\Gamma_{n, n', z}(p_\perp - p'_\perp) = p_z I_{n, n'}(p_\perp - p'_\perp)$ ,

$$\Gamma_{n, n', y}(p_\perp - p'_\perp) = \sqrt{\frac{qH_0}{2}} (V\bar{n} I_{n-1, n'}(p_\perp - p'_\perp) + V\bar{n+1} I_{n+1, n'}(p_\perp - p'_\perp)). \quad (26)$$

Вектор  $\Gamma$  в определенной мере аналогичен тому, который возникает в выражениях для диэлектрической проницаемости плазмы в магнитном поле [6]. Так,

$$|I_{n'}^{n-n'}(\mathbf{k}_\perp)|^2 = e^{-\xi} (L_{n'}^{n-n'}(\xi))^2 \xi^{n-n'} \sqrt{\frac{n'!}{n!}},$$

$$\xi = \frac{k_\perp^2 2qH_0 n}{4q^2 H_0^2 n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{k_\perp^2 p_\perp^2}{4q^2 H_0^2 n} = \frac{k_\perp^2 v_\perp^2}{4\omega_H^2 n}, \quad \omega_H = \frac{|qH_0|}{\varepsilon}, \quad (27)$$

$$|I_{n'}^{n-n'}(\mathbf{k}_\perp)|^2 \xrightarrow{n' \rightarrow \infty} J_{n-n'}^2 \left( \frac{k_\perp v_\perp}{\omega_H} \right),$$

где  $J_v(z)$  — функция Бесселя. Однако асимптотикой (27) фактически нельзя пользоваться в (26) даже при  $n' \rightarrow \infty$  (квазиклассический предел), так как  $I_{n,n'}$  в (26) зависят от  $\hbar k_\perp = p_\perp - p'_\perp$ , т. е. аргумент  $I_{n,n'}$ , равный  $|p_\perp - p'_\perp|^2/2qH_0$ , содержит  $\hbar$  не в числителе (когда возникает асимптотика (27)), а в знаменателе. В квазиклассическом пределе  $n, n' \gg 1$  получаем выражения, содержащие

$$\begin{aligned} \frac{|p_\perp - p'_\perp|^2 n'}{2qH_0 \hbar n'} &= \frac{|p_\perp - p'_\perp|^2}{p_\perp'^2} n', \quad I_{n,n'}(\xi', n'), \\ \xi' &= |p_\perp - p'_\perp|^2/p_\perp'^2. \end{aligned} \quad (28)$$

**3. Анализ результатов. Выводы.** Если частицы, находясь вначале на нижнем уровне Ландау  $n'=0$ , остаются и в дальнейшем на нижнем уровне Ландау, то

$$\begin{aligned} \Gamma_x &\simeq p_x \exp \left( -\frac{(p_\perp - p'_\perp)^2}{4qH_0} \right), \quad \Gamma_y \simeq \sqrt{\frac{qH_0}{2}} \exp \left( -\frac{(p_\perp - p'_\perp)^2}{4qH_0} \right), \\ \Gamma_z &\simeq p_z \exp \left( -\frac{(p_\perp - p'_\perp)^2}{4qH_0} \right). \end{aligned} \quad (29)$$

Считая  $p_z^2, p_z'^2 \gg 2qH_0$ ,  $p_z \gg p'_z$ , получим из второго члена (19)

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi_{p_x, p_z}}{dt} &= \frac{q^3}{\pi^3} \int \left[ dp' p_\perp'^2 \exp \left( -\frac{(p_x - p'_x)^2}{2qH_0} - \frac{p_y'^2}{2qH_0} \right) \hat{J}_{p_z, p_x}^{qL} \Phi_{p_x, p_z} \right] \times \\ &\times [ |p_z| (|p_z| + \sqrt{p_z^2 + m^2})^3 \sqrt{p_z^2 + m^2}]^{-1}. \end{aligned} \quad (30)$$

Здесь  $p'_y - p_y \rightarrow p'_y$ .

Этот результат позволяет получить представление о спектре частиц, возникающих в сильном квантующем магнитном поле. Если  $p_x'^2 \ll qH_0$ , то распределение по  $p_x$  ограничено величиной  $\sqrt{qH_0}$ . Напомним, что  $p_x = y_0 qH_0$ , где  $y_0$  — центр ларморовского кружка. Таким образом, узкое (вдоль поля) распределение «тепловых» частиц порождает также канализированное вдоль поля, но более широкое распределение быстрых частиц. Интегрируя по  $y_0$  поперек поля (т. е. по  $p_x$ ), получим спектр по  $p_z$  (по условию  $\int \Phi_{p_x} dp'_x$  сходится). Из (30) видно, что при  $p_z \ll m$

$$d/dt \int \Phi_{p_x, p_z} dp_x \sim 1/|p_z|,$$

а при  $p_z \gg m$  зависимость пропорциональна  $1/|p_z|^5$ , т. е. возникают более круглые спектры частиц, чем в отсутствие поля (когда спектр был  $1/p^3$  при  $p \gg m$ ).

Однако генерация быстрых частиц с большим  $n \gg 1$  (даже из исходного состояния  $n'=0$ ) в этом рассматриваемом случае более веро-

ятна (функция распределения быстрых частиц при  $p_{\perp} \gg p_z$  более медленно падает с ростом  $p_{\perp}$ ).

Действительно, для  $p_{\perp}^2 = 2qH_0n \gg p_x'^2$ ,  $p_{\perp}, p_z \gg m$ ,  $p_z \ll p_{\perp}$  получим

$$\frac{d\Phi_{p_{\perp}, p_z}}{dt} \simeq \frac{q^2}{\pi |p_{\perp}|^4 |p_z|} \int (p_x - p_x')^2 \hat{J}_{p'}^{q!} \Phi_{p'} dp', \quad (31)$$

$$\Phi_{p_{\perp}, p_z} = \frac{1}{qH_0} \int \Phi_{n, p_x, p_z} dp_x.$$

Множитель  $1/qH_0$  в определении  $\Phi_{p_{\perp}, p_z}$  обеспечивает нормировку  $\Phi_{p_{\perp}, p_z}$  на  $dp_{\perp}^2 dp_z$ . Распределение по перпендикулярным энергиям  $\epsilon_{\perp}$

$$\frac{d\Phi_{\epsilon_{\perp}}}{dt} = \pi p_{\perp} \int \frac{d\Phi_{p_{\perp}, p_z}}{dt} dp_z \sim \frac{1}{p_{\perp}^3} \sim \frac{1}{\epsilon_{\perp}^3}. \quad (32)$$

Рождение частиц с большим  $\epsilon_{\perp}$  даже в очень сильном поле приводит к мощному синхротронному излучению и синхротронным потерям.

Несмотря на то, что результаты получены для частиц спина нуль, сходным образом расчеты могут быть обобщены и на случай частиц спина 1/2 в сильном квантующем магнитном поле. При этом, так же как и в отсутствие поля, анизотропные распределения частиц спина 1/2 имеют индекс степенного спектра на единицу меньший, т. е. в случае переходов из  $n'=0$  в  $n \gg 1$   $d\Phi_{\epsilon_{\perp}}/dt \sim 1/\epsilon_{\perp}^2$  при  $\epsilon_{\perp} \gg m$  (для изотропного распределения  $\sim 1/\epsilon_{\perp}^3$ ).

Этот результат может иметь непосредственные применения к теории пульсаров. Излучающие частицы считаем анизотропными релятивистскими электронами и позитронами. С учетом того, что синхротронные потери велики, спектр их будет пропорционален не  $1/\epsilon_{\perp}^2$ , как получено выше, а  $1/\epsilon_{\perp}^3$ . Это дает степенное распределение интенсивности высокочастотного излучения (попадающего в рентгеновский и  $\gamma$ -диапазон)  $1/\omega^v$ , где  $v = (\gamma - 1)/2 = (3 - 1)/2 = 1$ . Такой спектр с  $v = 1$  и наблюдается в области высоких частот (рентгеновских и выше) для пульсара в Крабовидной туманности.

Применительно к лабораторным экспериментам представляет интерес использование данного механизма генерации анизотропных спектров быстрых частиц для теории токов увлечения [7].

## ЛИТЕРАТУРА

- Цытович В. Н. // УФН. 1965. Т. 89. С. 89.
- Цытович В. Н. // ЖЭТФ. 1984. Т. 87. С. 1105.
- Tsytovich V. N. // Physica Scripta. 1982. V. 2. № 1. P. 5; V. 2. № 2. P. 567.
- Цытович В. Н. Препринт ИОФАН № 90. М., 1986.
- Берестецкий В. В., Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Квантовая электродинамика. — М.: Наука, 1980.
- Светозарова Т. И., Цытович В. Н. // Радиофизика. 1962. Т. 5. № 4. С. 658 (Изв. высш. учеб. заведений).
- Tsytovich V. N. Proceedings of workshop on Turbulence. Kiev 1984. Holland publ. corp. P. 567. // В сб.: Проблемы нелинейных и турбулентных процессов в физике. — Киев: Наукова думка, 1985. Т. 2. С. 334.

Институт общей физики  
АН СССР

Поступила в редакцию  
10 сентября 1986 г.

## RADIATIVE ACCELERATION OF FAST PARTICLES IN A STRONG QUANTIZING MAGNETIC FIELD

V. N. Tsytovich

The problem of fast particle power-law spectra generation due to radiative acceleration of relativistic particles in a strong magnetic field is considered.