ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXXI, № 8 *РАДИОФИЗИКА* *1988*

УДК 533.9.01

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА ИЗЛУЧАТЕЛЬНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ РЕЛЯТИВИСТСКОГО ПРЯМОЛИНЕЙНОГО ЭЛЕКТРОННОГО ПУЧКА БОЛЬШОЙ ПЛОТНОСТИ

А. Ф. Александров, М. В. Кузелев, О. Е. Пыркина

Рассмотрена нелинейная динамика электронного пучка в условиях аномального эффекта Доплера. Аналитически получено, что стабилизация неустойчивости вызвана нелинейным сдвигом частоты, который в нерелятивистском случае связан с коллективным торможением пучка, а в релятивистском — с зависимостью частоты плазменных колебаний пучка от их амплитуды.

В настоящей работе аналитическими методами исследуется нелинейная динамика электронного пучка, излучающего в условиях аномального эффекта Доплера. Излучение такого рода является наиболее распространенным явлением при использовании электронных пучков большой плотности и требует детального теоретического исследования в связи с необходимостью решения важнейших прикладных задач.

В условиях аномального эффекта Доплера в пучке возбуждается медленная продольная волна плотности заряда с законом дисперсии вида

$$\omega = k_\| u_\| - \omega_b \gamma^{-3/2}, \tag{1}$$

где $u_\|$ — скорость пучка, ω_b — ленгмюровская частота, а $\gamma = (1 - u_\|^2/c^2)^{-1/2}$. С другой стороны, $\omega = \omega_0(k_\|)$, где $\omega_0(k_\|)$ — закон дисперсии излучаемой волны. Механизм связи указанных двух волн может быть любым и здесь не конкретизируется. Важно только, чтобы связь была слабой, т. е. выполнялось неравенство

$$\nu = \sqrt{2}\,|\delta\omega/\omega_b\gamma^{-3/2}| \ll 1, \tag{2}$$

где $\delta\omega$ — линейный инкремент неустойчивости. Как правило, неравенство (2) справедливо для плотных пучков [1, 2].

Другим важным для дальнейшего параметром, помимо ν, является следующий:

$$\mu = 2\gamma^2 \frac{u_\|^2}{c^2} \frac{\omega_b \gamma^{-3/2}}{k_\| u_\|}. \tag{3}$$

Параметр μ определяет относительное изменение энергии электрона при уменьшении его скорости от $u_\|$ до фазовой скорости медленной волны (1). При $\mu \ll 1$ релятивистские эффекты не существенны, даже если $\gamma \gg 1$.

В работах [1, 2] показано, что при выполнении сильного неравенства (2) неустойчивость стабилизируется из-за нарушения условия резонанса при излучении

$$\omega_0(k_\|) = k_\| u_\| - \omega_b \gamma^{-3/2}, \tag{4}$$

или, что то же самое, из-за нелинейного сдвига частоты. Если $\mu \ll 1$, то нарушение (4) обусловлено торможением пучка в среднем, т. е. изменением $u_\|$ [2]. При $\mu \gg 1$ нелинейный сдвиг частот обусловлен квадратичными по полю поправками в релятивистском факторе γ

[1] *. В настоящей работе оба эти эффекта учитываются совместно, т. е. без каких-либо ограничений на величину релятивистского параметра (3).

Будем исходить из следующих хорошо известных нелинейных уравнений, явно содержащих параметры μ и ν:

$$\frac{d\varepsilon}{d\tau} = -\nu\rho e^{i\eta_0\tau}, \qquad \rho = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} e^{-iy}\,dy_0,$$

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} = -\frac{1}{2}\left[i(\rho e^{iy} - \text{к. с.}) + \nu(\varepsilon e^{iy - i\eta_0\tau} + \text{к. с.})\right]\left(1 - \mu\frac{dy}{d\tau}\right)^{3/2}. \tag{5}$$

Здесь $\tau = \omega_b\gamma^{-3/2}t$ — безразмерное время, ε — амплитуда излучаемой волны, ρ — амплитуда первой гармоники волны плотности заряда пучка, обезразмеренная на невозмущенную плотность, а $\eta_0 = (\omega - k_\parallel u_\parallel)/\omega_b\gamma^{-3/2}$ — расстройка, равная в силу (4) минус единице. Уравнения (5) эквивалентны системе уравнений Власова с самосогласованным полем, поскольку $y(y_0, \tau)$ есть характеристика кинетического уравнения, исходящая из точки $y_0 \in [0, 2\pi]$ (безразмерная координата электрона $y = k_\parallel z$, где z — координата размерная). Вывод уравнений (5) для различных конкретных систем и результаты их численного решения имеются в работах [4–6]. Отметим, что в определениях для τ и η_0 входят невозмущенные значения γ и $u_\parallel$.

Предположим, что неустойчивость стабилизировалась при малой модуляции пучка по плотности, когда

$$|\rho| \ll 1. \tag{6}$$

В этом случае для характеристик справедливо представление**

$$y = y_0 + w(\tau) + \tilde{y}(y_0, \tau), \tag{7}$$

где $\tilde{y}$ — малая по сравнению с единицей 2π-периодическая функция y_0, а w учитывает торможение пучка в среднем. Кроме того, в уравнениях (5) удобно перейти от «скорости» электрона $dy/d\tau$ к его «импульсу»

$$p = (1 - \mu\,dy/d\tau)^{-1/2}. \tag{8}$$

Учитывая теперь (6), линеаризуем уравнения (5) по $\tilde{y}$, после чего становится очевидной справедливость следующего представления для «импульса»:

$$p = \langle p\rangle(\tau) + \frac{\mu}{2}\left(a(\tau)e^{iy_0} + \text{к. с.}\right). \tag{9}$$

Подставляя далее (9) в линеаризованные по $\tilde{y}$ уравнения (5), получим после довольно громоздких вычислений следующую систему (выражение для $\langle p\rangle$ следует получать из точных уравнений (5)):

$$\frac{d\varepsilon}{d\tau} = -\nu e^{-iw + i\eta_0\tau}\rho, \qquad \frac{da}{d\tau} + \frac{1}{2}i\rho = \frac{1}{2}\nu\varepsilon e^{iw - i\eta_0\tau},$$

$$\frac{d\rho}{d\tau} = -2i\left(\langle p\rangle^2 - \mu^2|a|^2\right)^{-3/2}a, \qquad \frac{dw}{d\tau} = \frac{1}{\mu}\left[1 - \left(\langle p\rangle^2 - \mu^2|a|^2\right)^{-3/2}\langle p\rangle\right], \tag{10}$$

* Если медленная волна пучка не чисто продольная, то имеются квадратичные по полю поправки к частоте плазменных колебаний ω_b. В рассматриваемом случае чисто продольных волн этих поправок нет [3].

** Такое представление верно всегда, но неравенство $|\tilde{y}| \ll 1$ верно, если только выполнено (6). В электронике СВЧ представление (7) уже использовалось ранее для упрощения нелинейных уравнений ЛБВ и ЛОВ. Подробнее см. [8].

$$\langle p\rangle = 1 - \frac{1}{8}\mu|\varepsilon|^2.$$

Здесь сделана замена $\rho\exp(-iw)\to\rho$ и использовано предположение об адиабатичности включения поля при $\tau\to-\infty$.

Ниже будет показано, что при любых μ выполняются неравенства

$$(1/8)\mu|\varepsilon|^2 \ll 1, \qquad \mu^2|a|^2 \ll 1, \tag{11}$$

позволяющие упростить нелинейность в уравнениях (10). Кроме того, с помощью замены

$$\varepsilon(\tau) = E(\tau)e^{-iw}, \quad \rho(\tau) = R(\tau)e^{-i\eta_0\tau} \tag{12}$$

и с учетом неравенства (2) (для $\eta_0 = -1$) из уравнений (10) удается исключить амплитуду a, сведя при этом (10) к уравнениям с кубичной нелинейностью

$$\begin{gathered}\frac{dE}{d\tau} + \frac{1}{4}i\left(|E|^2 + \frac{3}{2}\mu|R|^2\right)E = -\nu R,\\ \frac{dR}{d\tau} - \frac{3}{16}i(\mu|E|^2 + \mu^2|R|^2)R = -\frac{1}{2}\nu E.\end{gathered} \tag{13}$$

По поводу уравнений (13) и метода их получения следует сделать замечание. Исходная система (5) не учитывает генерацию высших гармоник волны плотности заряда пучка. Возникает вопрос, не приведет ли учет этих гармоник к появлению в уравнениях (13) дополнительных нелинейных членов того же порядка, что уже имеются. Можно показать, что в случае одномерных потенциальных волн плотности заряда— не приведет. Это и понятно, поскольку известно, что частота одномерных волн холодной плазмы не зависит от их амплитуды [3], хотя при большой амплитуде эти волны не синусоидальны, т. е. содержат гармоники.

Используя первый интеграл уравнений (13) (для адиабатического включения поля при $\tau\to-\infty$)

$$|E|^2 = 2|R|^2, \tag{14}$$

легко получаем их решение*:

$$|R|^2 = R^2_{\max}\left(\frac{1}{\operatorname{ch}\sqrt{2}\,\nu\tau}\right)^2, \quad -\infty < \tau < \infty, \tag{15}$$

где максимальная амплитуда волны плотности заряда дается выражением

$$R^2_{\max} = \frac{4\sqrt{2}\,\nu}{1 + (3/2)\mu + (3/8)\mu^2}. \tag{16}$$

При $\mu\ll 1$ решение (14)—(16) совпадает с полученным в [2], а при $\mu\gg 1$ переходит в решение работы [1]. Легко также видеть, что неравенства (6), (11) сводятся к основному предположению (2).

Важной характеристикой процесса является эффективность преобразования энергии пучка в излучение — электронный кпд. В общем случае он определяется формулой [5]

$$\text{кпд} = \frac{1}{8}\frac{u_\parallel^2}{c^2}\frac{\gamma}{\gamma-1}\mu|\varepsilon|^2. \tag{17}$$

* В работе [1] солитонные решения типа (15) для неадиабатических начальных условий были получены прямым численным интегрированием исходных уравнений (5), что подтверждает справедливость излагаемой здесь аналитической теории.

Отсюда, из (14) и (16) получаем выражение для максимального кпд (считаем для простоты, что $\gamma \gg 1$)

$$\text{кпд}_{\max} = \sqrt{2}\,\nu \frac{\mu}{1+(3/2)\mu+(3/8)\mu^2}. \tag{18}$$

Абсолютный максимум кпд реализуется при $\mu=\sqrt{8/3}\approx 1{,}63$ и составляет величину порядка $0{,}52\nu$.

В заключение рассмотрим функцию распределения электронов пучка по «импульсам» p. В общем случае эту функцию можно записать через интеграл по характеристикам [7]

$$f(y,p) = \int \delta[y-y(y_0,\tau)]\,\delta[p-p(y_0,\tau)]\,dy_0. \tag{19}$$

Последнее выражение малоинформативно. Поэтому рассмотрим усредненную по длине волны колебаний функцию распределения

$$\langle f(p)\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(y,p)\,dy = \frac{1}{2\pi}\sum_j \left|\frac{\partial p}{\partial y_0}(y_{0j})\right|^{-1}. \tag{20}$$

Здесь y_{0j} — корень уравнения $p(y_0,\tau)=p$. Используя представление (9), последнее выражение легко можно преобразовать к виду

$$\langle f(p)\rangle = 2(2\pi)^{-1}\left[\frac{1}{4}\mu^2|R|^2 - \left(p-1+\frac{1}{8}\mu|E|^2\right)^2\right]^{-1/2}, \tag{21}$$

где $|R|$ и $|E|$ — функции τ, определенные в (14) и (15). В нерелятивистском пределе ($\mu \ll 1$) из (21) можно определить и усредненную функцию распределения по скоростям

$$\langle f(\dot{y})\rangle = \frac{1}{\pi\sqrt{|R|^2-(\dot{y}+|E|^2/4)^2}}. \tag{22}$$

Отметим, что функции (21) и (22) определяются полученными формулами для таких значений импульсов и скоростей, для которых подкоренные выражения неотрицательны. Для всех других значений p и $\dot{y}$ функции распределения тождественно равны нулю.

Поясним полученный результат, ограничиваясь для простоты распределением (22). Функция распределения симметрична относительно скорости $\dot{y}=-|E|^2/4$. Но эта же скорость получается непосредственным интегрированием выражения $\int\langle f(\dot{y})\rangle\dot{y}\,d\dot{y}$, т. е. является средней скоростью пучка. Изменение средней скорости обусловлено передачей импульса от пучка излучению. При $\dot{y}=-(|E|^2/4)\pm|R|$ функция распределения обращается в бесконечность (оставаясь нормируемой). Но так и должно быть, поскольку максимальную и минимальную скорости имеет на каждой длине волны континуум электронов (промежуточные значения скорости имеются у конечного числа электронов). «Тепловой разброс» электронов пучка определяется формулой

$$T = \int\left(\dot{y}+\frac{1}{4}|E|^2\right)^2\langle f(\dot{y})\rangle d\dot{y} = \frac{1}{2}|R|^2. \tag{23}$$

Аналогичными свойствами обладает и релятивистское распределение (21).

Таким образом, механизмом стабилизации плотного электронного пучка, излучающего в условиях аномального эффекта Доплера, является нелинейный сдвиг частоты. В нерелятивистском случае он обусловлен коллективным торможением пучка, а в релятивистском — зависимостью частоты плазменных колебаний пучка от их амплитуды.

Максимум эффективности излучения достигается при значении релятивистского параметра $\mu \approx 1{,}63$ и составляет $0{,}52\nu$. Учитывая, что об аномальном эффекте Доплера можно говорить еще по крайней мере вплоть до $v \approx 1$, можно дать максимальную оценку эффективности излучения: кпд $\approx 50\%$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кузелев М. В., Рухадзе А. А., Санадзе Г. В. // ЖЭТФ. 1985. Т. 89. № 5 (11). С. 1591.
2. Кузелев М. В., Панин В. А. // Физика. 1984. № 1. С. 31. (Изв. высш. учеб. заведений).
3. Ахиезер А. И., Любарский Г. Я. // ДАН СССР. 1951. Т. 80. С. 193.
4. Братман В. Л., Гинзбург Н. С., Петелин М. И. // ЖЭТФ. 1979. Т. 76. № 3. С. 930.
5. Кузелев М. В. // ЖТФ. 1983. Т. 32. № 6. С. 1029.
6. Ковалев Н. Ф., Петелин М. И., Райзер М. Д., Сморгонский А. В. // Сб. Релятивистская высокочастотная электроника. — Горький: ИПФ АН СССР. 1979. С. 76.
7. Кузелев М. В., Панин В. А., Рухадзе А. А., Филиппычев Д. С. Препринт ИОФ АН СССР № 172. М., 1984.
8. Вайнштейн Л. А., Солнцев В. А. Лекции по сверхвысокочастотной электронике. — М.: Сов. радио, 1973. —400 с.

Московский государственный университет

Поступила в редакцию 17 марта 1986 г., в окончательном варианте 23 декабря 1987 г.

NONLINEAR RADIATIVE INSTABILITY DYNAMICS OF LINEAR RELATIVISTIC HIGH DENSITY ELECTRON BEAM

A. F. Aleksandrov, M. V. Kuzelev, O. E. Pyrkina

The paper deals with nonlinear dynamics of a relativistic electron beam emitting at anomalous Doppler effect conditions. It is received analytically that in nonrelativistic case instability stabilization is connected with collective beam slowing-down and in relativistic case — with the effect of oscillation amplitude dependence on plasma frequency. Radiation maximum efficiency estimations are received.