УДК 533.9.01.072

МОДЕЛЬНЫЙ ИНТЕГРАЛ СТОЛКНОВЕНИЙ В МНОГОКОМПОНЕНТНОЙ ПЛАЗМЕ

В. В. Белый

При последовательном кинетическом рассмотрении задач динамики разреженных газов и физики плазмы столкновения частиц необходимо учитывать с помощью интегралов столкновений Больцмана для газов и Ландау или Балеску—Ленарда для плазмы. Однако эти интегралы столкновений представляют собой сложные интегро-дифференциальные операторы, использование которых в общем случае делает задачу практически неразрешимой. Даже в частном случае, когда состояние системы слабо отличается от состояния термодинамически равновесного, приходится иметь дело со сложной системой интегральных уравнений, точные решения которых удается получить только для максвелловского потенциала взаимодействия частиц ($\sim r^{-4}$). В любых других случаях используют различные аппроксимации и модельные приближения, сохраняющие существенные свойства исходного оператора столкновений. Такой подход позволяет решать задачи в условиях, когда не применимы ни бесстолкновительная кинетика, ни столкновительная гидродинамика.

Одна из первых кинетических моделей описания уравнения Больцмана была предложена Бхатнагаром, Гроссом, Круком (Б.—Г.—К.) [1] и независимо Веландером [2]. В дальнейшем эта модель получила широкое распространение в кинетической теории газов и плазмы при расчетах кинетических коэффициентов, корреляционных функций кинетических флуктуаций и дисперсионных соотношений (см., например, [3–5]).

Согласно этой модели интеграл столкновений представляется в виде отклонения функции распределения от «мифической» экспоненты:

$$\hat{I}_a f_a = -\sum_b \nu_{ab}\left[f_a - \frac{n_a}{(2\pi m_a\,\theta_{ab})^{3/2}}\exp\left(-\frac{m_a(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}_{ab})^2}{2\theta_{ab}}\right)\right], \tag{1}$$

ν_{ab} — эффективная частота соударений частиц сорта a с частицами сорта b. Параметры $\theta_{ab}, \boldsymbol{u}_{ab}$ в (1) связаны с моментами функций распределений $\boldsymbol{u}_c = \int \boldsymbol{v} f_c\,d\boldsymbol{p}$, $\theta_c = (m_c/3)\int \delta v_c^2 f_c\,d\boldsymbol{p}$ линейными соотношениями

$$\boldsymbol{u}_{ab} = \alpha_{aa}\boldsymbol{u}_a + \alpha_{ab}\boldsymbol{u}_b,\quad \theta_{ab} = \beta_{aa}\theta_a + \beta_{ab}\theta_b. \tag{2}$$

Коэффициенты α_{aa}, α_{ab}, β_{aa}, β_{ab} подбираются таким образом, чтобы выполнялись как законы сохранения числа частиц, полного импульса и энергии, так и уравнения баланса импульса и энергии для каждой из компонент системы. Такая модель обладает тем преимуществом (по сравнению, например, с моделью Фоккера—Планка), что решение кинетического уравнения с модельным интегралом типа (1) сводится к решению системы алгебраических уравнений для моментов функций распределения f_a, f_b. Тем не менее модель Б.—Г.—К. обладает целым рядом существенных недостатков. Поскольку число уравнений, которым должны удовлетворять параметры модели (при 5-моментном описании двухкомпонентной системы таких уравнений четыре: два уравнения баланса импульса и два уравнения баланса температур), меньше числа неизвестных параметров (в этом приближении их пять: ν_{ab}, α_{aa}, α_{ab}, β_{aa}, β_{ab}), то в выборе последних имеется произвол. Вследствие этого появились различные модификации модельного интеграла столкновений Б.—Г.—К. [6, 7], так же правильно описывающие релаксацию первых пяти моментов. Отличие этих моделей проявляется при учете более высоких моментов, таких, как тензор напряжений, вектор теплового потока (хотя все модели и не дают правильного числа Прандтля). Из (1) следует, что коэффициенты вязкости и теплопроводности определяются только ν_{ab}. Использование модели Б.—Г.—К. дает одинаковую оценку вязкости и теплопроводности как для легкой, так и тяжелой компоненты, т. е. оценка вязкости тяжелой компоненты в корень из отношения масс занижена. Более удовлетворительный результат дает модель Грина [7], которая включает в себя и модельное описание, приведенное Альтеркопом и Степановым [6]. Но, пожалуй, самым «темным» моментом в модели Б.—Г.—К. и ее модификациях является сложная экспоненциальная зависимость от функций распределения. Миф это или реальность? Ведь во всех работах по строгому обоснованию модельных интегралов столкновений выводились лишь линеаризованные формы модельного оператора столкновений, которые совпадают с разложением (1) только вблизи состояния полного равновесия, когда эта экспонента обращается в максвелловскую функцию распределения. Как восстановить форму оператора столкновений из его линеаризованной формы для состояний, отличных от термодинамического равновесия, например для локально-равновесных состояний?

В работе [8] техникой проекционных операторов был дан последовательный вывод линеаризованного оператора столкновений $\delta\hat{I}_a$ в многокомпонентных системах в приближении локального равновесия. При этом был снят произвол в выборе коэффициентов. Кроме того, построенный там линеаризованный интеграл столкновений правильно описывает релаксацию первых тринадцати моментов. Следуя [8], представим линеаризованный оператор $\delta\hat{I}_a\,\delta f_a$ в приближении пяти моментов:

$$\delta\hat{I}_a\,\delta f_a = -\nu_a\,\delta f_a + \sum_{j=1}^{5} \nu_a f_a^0 \psi_j^a \int \psi_j^a\,\delta f_a\,dp' + \sum_{b=1}^{n} \sum_{i,j=1}^{5} f_a^0 \psi_i^a \langle \psi_i^a | \delta\hat{I} | \psi_j \rangle \int \psi_j^b\,\delta f_b\,dp', \quad (3)$$

где ψ_i — полиномы Эрмита, ν_a — обратное время релаксации вектора теплового потока компоненты a, $\langle \psi_i^a | \delta\hat{I} | \psi_j^b \rangle$ — матричные элементы линеаризованного оператора Балеску—Ленарда, вычисленные в [8].

Нелинеаризованную форму модельного оператора столкновений можно восстановить из линеаризованной формы (3), если воспользоваться одним важным следствием кинетической теории флуктуаций в газах и плазме. А именно: законы сохранения полного числа частиц, полного импульса и полной энергии выполняются не только для средних значений, но и для функций, т. е. интенсивность ланжевеновского источника y в кинетическом уравнении обладает свойствами

$$\sum_{ab} \int \varphi_a(p_1)\,\psi_b(p_2)\,(y_a\,y_b)_{\omega k p_1 p_2}\,dp_1\,dp_2 = 0 \quad (4)$$

при φ или $\psi = 1, p,\ p^2/2m$.

Выражение для интенсивности ланжевеновского источника [9]

$$(y_a\,y_b)_{\omega k p_1 p_2} = -(\delta\hat{I}_a + \delta\hat{I}_b)\,\delta_{ab}\,\delta(p_1 - p_2)\,f_a + \delta_{ab}\,\delta(p_1 - p_2)\,\hat{I}_a f_a + \hat{I}_{ab} f_a f_b \quad (5)$$

имеет место как для «точных», так и для модельных операторов столкновений; $\hat{I}_{ab}$ — так называемый «непроинтегрированный» интеграл столкновений: $\sum_b \int \hat{I}_{ab} f_a f_b\,dp_2 = \hat{I}_a f_a$

Подставляя (3), (5) в (4) и полагая $\varphi_b = 1$, приходим к не столь компактной, как модель Б.—Г.—К., но более корректной форме интеграла столкновений:

$$\hat{I}_a f_a = -\nu_a/2\left(f_a - f_a^0\right) - \sum_b \nu_{ab}\left(\delta \mathbf{v}_a \frac{m_a}{\theta_a} \frac{\theta_a m_b + \theta_b m_a}{m_a + m_b} \frac{\theta_b u_a - \theta_a u_b}{\theta_a \theta_b} + \left(\frac{m_a\,\delta v_a^2}{\theta_a} - 3\right) \frac{m_a}{m_a + m_b} \frac{\theta_a - \theta_b}{\theta_a}\right) f_a^0, \quad (6)$$

где

$$\nu_{ab} = \frac{4}{3}\sqrt{2\pi}\,e_a^2 e_b^2\,n_b \sqrt{\frac{m_a m_b}{\theta_a m_b + \theta_b m_a}\,\frac{m_a + m_b}{\theta_a m_b + \theta_b m_a}\,\frac{L}{m_a}}$$

— обратное время релаксации импульса.

Таким образом, в приближении локального равновесия модельный интеграл столкновений не должен иметь сложной экспоненциальной зависимости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bhatnagar P. L., Gross E. P.. Krook H. // Phys. Rev. 1954. V. 94, № 1. P. 511; 1956. V. 120. № 3. P. 593.
2. Welander P. // Arkiv Fysik. 1954. V. 7. P. 507.
3. Гинзбург В. Л., Рухадзе А. А. Волны в магнитоактивной плазме. — М.: Наука, 1970.
4. Белый В. В., Климонтович Ю. Л., Наливайко В. П. // Физика плазмы. 1982. Т. 8. № 5. С. 1063.
5. Загородний А. Г., Усенко А. С., Якименко И. П. // Радиофизика. 1986. Т. 29. № 2. С. 169. (Изв. высш. учеб. заведений).
6. Степанов А. С., Альтеркоп Б. А. // ЖТФ. 1970. Т. 40. С. 1150.
7. Greene J. M. // Phys. Fluids. 1973. V. 16. P. 2022.
8. Paiva-Veretennicoff I., Belyi V. V. Proc. XIII International Symposium of rerefied gas dynamics. Novosibirsk 1982, Plenum Press, 1985. P. 1372.
9. Gantsevich S. V., Gurevich V. L., Katilus R. // Revista del Nuovo Cimento. 1979. V. 2. № 5. P. 1.

Институт земного магнетизма, ионосферы и распространения радиоволн АН СССР

Поступила в редакцию 25 марта 1987 г.