ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXXI, № 7 РАДИОФИЗИКА 1988

УДК 538.3

ОБ ИЗЛУЧЕНИИ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ, РАВНОМЕРНО ДВИЖУЩЕЙСЯ НА ЗАДАННОМ УЧАСТКЕ ПУТИ, ПРИ НАЛИЧИИ ПЛАВНОГО УСКОРЕНИЯ В НАЧАЛЕ ПУТИ И ПЛАВНОГО ЗАМЕДЛЕНИЯ В КОНЦЕ

И. И. Аббасов, Б. М. Болотовский, В. А. Давыдов

Рассмотрено излучение заряженной частицы, равномерно движущейся на заданном ограниченном отрезке, с учетом плавного ускорения в начале пути и плавного замедления в конце. Проанализированы выражения, определяющие спектральное и угловое распределения энергии излучения для случаев, представляющих физический интерес.

В работе Тамма [1], посвященной теории излучения Вавилова — Черенкова, определено излучение, возникающее при следующем законе движения заряженной частицы. Первоначально частица покоится. В некоторый момент времени скорость ее скачком меняется от нуля до некоторого значения v. С этой скоростью v частица движется в течение заданного времени, а затем мгновенно останавливается. Оказалось, что спектр возникающего при этом излучения не стремится к нулю с ростом частоты и поэтому интеграл от спектральной интенсивности излучения по всем частотам расходится. Причиной расходимости является предположение о мгновенном старте и мгновенном финише заряженной частицы. Очевидно, при плавном замедлении и плавном ускорении спектр излучения должен быстро падать, начиная с некоторого значения частоты.

В настоящей работе мы рассмотрим случай плавного изменения скорости, причем выберем закон движения частицы таким образом, чтобы получить аналитическое выражение для амплитуды поля излучения.

Пусть точечная частица с зарядом q движется по оси z прямоугольной системы координат, так что скорость движения v зависит от времени t по закону

$$\boldsymbol{v}(t) = (\boldsymbol{v}/2)\left(\operatorname{th}(t+T)/\Delta - \operatorname{th}(t-T)/\Delta\right), \tag{1}$$

где $\operatorname{th} x$ — гиперболический тангенс. Из формулы (1) следует, что при выбранном законе движения скорость v экспоненциально мала для больших по величине отрицательных моментов времени. Вблизи момента времени $t=-T$ скорость движения плавно нарастает в течение промежутка времени, равного Δ, затем скорость остается примерно равной v в течение промежутка времени $2T$, и далее вблизи момента времени $t=T$ скорость плавно уменьшается практически до нуля за промежуток времени Δ. Для времени $t \gg T$ скорость движения экспоненциально мала. Очевидно, что предельный переход $\Delta \to 0$ дает случай движения, рассмотренный в работе Тамма.

Если скорость частицы меняется по закону (1), то ее положение $z(t)$ зависит от времени следующим образом:

$$z(t) = (v\Delta/2)\left(\ln(\operatorname{ch}(t+T)/\Delta) - \ln(\operatorname{ch}(t-T)/\Delta)\right), \tag{2}$$

причем мы выбрали константу интегрирования так, чтобы при $t=0$ было $z(0)=0$, т. е. чтобы при $t=0$ частица находилась в начале координат.

Если известен закон движения, то вектор-потенциал излучаемой волны определяется следующим выражением [2]:

$$A_{(\omega)}(\boldsymbol{r})=q\,\frac{\exp(ikr)}{cR}\,\boldsymbol{l}. \tag{3}$$

Здесь $A_{(\omega)}(\boldsymbol{r})$ — амплитуда вектор-потенциала, отвечающая частоте ω, $k=\omega/c$, R — расстояние от области движения частицы до точки наблюдения, и считается, что $R\gg 2vT$, т. е. расстояние до области движения много больше, чем размеры этой области. Величина $\boldsymbol{l}$ определяет амплитуду излучения волны и имеет следующий вид:

$$\boldsymbol{l}=\int \boldsymbol{v}(t)\exp\left(i\omega t-i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}(t)\right)dt. \tag{4}$$

Для нашего случая $\boldsymbol{l}$ имеет только компоненту по оси z:

$$l_z=\int v(t)\exp\left(i\omega t-ik_z z(t)\right)dt, \tag{5}$$

где $v(t)$ определяется формулой (1), $z(t)$ — формулой (2),

$$k_z=(\omega/c)\cos\theta, \tag{6}$$

θ — угол между направлением волнового вектора и осью z.

С учетом (1), (2), (6) из (5) получаем

$$\begin{aligned} \boldsymbol{l}=(\boldsymbol{v}/2)\int &\left(\operatorname{th}(t+T)/\Delta-\operatorname{th}(t-T)/\Delta\right)\exp\Big(i\omega t-\\ &-i(v\omega\Delta/2c)\cos\theta\left(\ln(\operatorname{ch}(t+T)/\Delta)-\ln(\operatorname{ch}(t-T)/\Delta)\right)\Big)dt. \end{aligned} \tag{7}$$

Как показано в работе [4], этот интеграл выражается через гипергеометрическую функцию $F(\alpha,\beta;\gamma,z)$ (см. также работу [5]):

$$\boldsymbol{l}=\frac{\pi\omega\Delta^2(1-\exp(-4T/\Delta))\boldsymbol{v}}{4\operatorname{sh}(\pi\omega\Delta/2)}F(\alpha,\beta;\gamma,z), \tag{8}$$

где

$$\alpha=1-i\frac{\omega\Delta v}{2c}\cos\theta,\qquad \beta=1+\frac{i\omega\Delta}{2},\quad \gamma=2,\quad z=1-\exp\left(-\frac{4T}{\Delta}\right).$$

Интенсивность излучения на частоте ω в элемент телесного угла $d\Omega$ выражается через $\boldsymbol{l}$ следующим образом [2]:

$$d\mathscr{E}_{n,\omega}=\frac{q^2}{4\pi^2 c}\left|[\boldsymbol{k}\boldsymbol{l}]\right|^2 d\Omega d\omega, \tag{9}$$

где $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор в направлении излучения.

При наших предположениях относительно закона движения частицы мы получили в замкнутом виде выражение для амплитуды $\boldsymbol{l}$ излучаемой волны. В работе [4] была рассмотрена высокочастотная асимптотика выражения для $\boldsymbol{l}$ с помощью метода стационарной фазы, а также и низкочастотная асимптотика. Ниже мы рассмотрим некоторые следствия из (8), представляющие физический интерес. Наше рассмотрение имеет целью дополнить результаты, полученные в [4].

Если время равномерного движения достаточно велико ($T\to\infty$), формулы (8), (9) дают

$$\begin{aligned} d\mathscr{E}_{n,\omega}=q^2\omega\Delta v\operatorname{sh}\left(\frac{\pi\omega v\Delta}{2c}\cos\theta\right)\cos^{-1}\theta\sin^2\theta\, d\Omega d\omega\,\times\\ \times\left[4\pi c^2\left(1-\frac{v}{c}\cos\theta\right)\operatorname{sh}\left(\frac{\pi\omega\Delta}{2}\right)\operatorname{sh}\left(\frac{\pi\omega\Delta}{2}\left(1-\frac{v}{c}\cos\theta\right)\right)\right]^{-1}. \end{aligned} \tag{10}$$

Если рассмотреть излучение, возникающее при однократном плавном изменении скорости заряда от нуля до v [7,8] по закону

$$v(t) = (v/2)(1 \pm \operatorname{th}(t/\Delta)), \tag{11}$$

то окажется, что это излучение описывается выражением (10) с точностью до множителя 2. Формула (10) дает вдвое больший результат. Физическая причина такого различия понятна. Закон движения (1) описывает ускорение частицы, затем движение с постоянной скоростью, а затем замедление. Если время движения с постоянной скоростью достаточно велико, то области ускорения и замедления расположены на большом расстоянии друг от друга и излученные при ускорении и замедлении заряда волны не интерферируют. Поэтому полное излучение равно удвоенному излучению при ускорении (или при замедлении).

Рассмотрим полученную зависимость при малых частотах ($\omega\Delta \ll 1$). С учетом равенств [3]

$$F(1, 1, 2; -x) = \frac{\ln(1+x)}{x}, \quad \operatorname{sh} x = x - \frac{x^3}{6}$$

получим

$$d\mathscr{E}_{n,\omega} = \frac{q^2\omega^2 v^2 T^2}{\pi^2 c^3}\left(1 - \frac{\pi^2\omega^2\Delta^2}{24}\right)\sin^2\theta\, d\Omega d\omega,$$

это выражение совпадает с результатом Тамма при малых частотах [1]. Второе слагаемое в круглых скобках дает поправочный член к формуле Тамма [1], учитывающий конечное ускорение.

Оценим теперь, как зависит интенсивность излучения от времени Δ замедления и ускорения. При больших значениях Δ ($\Delta \to \infty$) величина l (8) убывает пропорционально $\Delta \exp(-\pi\omega\Delta/2)$, т. е. по показательному закону.

При малых Δ ($\Delta \ll T$) величина $x = 1 - \exp(-4T/\Delta)$, представляющая собой аргумент гипергеометрической функции в выражении (8) для l, мало отличается от единицы. Воспользуемся формулой [3]

$$\begin{aligned} F(\alpha, \beta, \gamma; x) = {} & \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)} F(\alpha, \beta, \alpha+\beta-\gamma+1;\ 1-x) + \\ & + (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma-\alpha-\beta+1;\ 1-x). \end{aligned} \tag{12}$$

При значениях x, близких к единице, мы можем считать аргумент $1-x$ гипергеометрических функций в правой части равенства (12) равным нулю, а, следовательно, сами функции — равными единице [3]. Тогда с учетом (12) выражение (8) для l принимает вид

$$\begin{aligned} l = {} & \frac{\pi\omega v\Delta^2}{4\operatorname{sh}(\pi\omega\Delta/2)}\left(\Gamma\left(-\frac{i\omega\Delta}{2}\left(1-\frac{v}{c}\cos\theta\right)\right)\left[\Gamma\left(1+i\frac{\omega\Delta v}{2c}\cos\theta\right)\times\right.\right. \\ & \left.\times F\left(1-\frac{i\omega\Delta}{2}\right)\right]^{-1} + \exp\left(-2i\omega T\left(1-\frac{v}{c}\cos\theta\right)\right)\times \\ & \left.\times\Gamma\left(i\frac{\omega\Delta}{2}\left(1-\frac{v}{c}\cos\theta\right)\right)\left[\Gamma\left(1-\frac{i\omega\Delta v}{2c}\cos\theta\right)\Gamma\left(1+i\frac{\omega\Delta}{2}\right)\right]^{-1}\right) \\ & (\Delta \ll T). \end{aligned} \tag{13}$$

Такой вид имеет амплитуда излучаемой волны, если время равномерного движения T значительно превышает время ускорения и замедления.

Рассмотрим свойства амплитуды (13) при малых и больших частотах. При достаточно малых частотах ($\omega\Delta \ll 1$) мы можем считать, что аргументы гамма-функций в знаменателях равны единице, и учитывать, что $\Gamma(1) = \Gamma$. Гамма-функции в числителях при $\Delta\omega \ll 1$ мы можем заменить на обратные аргументы с учетом равенства

$$\Gamma(x) \sim 1/x \quad (|x| \ll 1)\,. \tag{14}$$

Тогда получаем из (13)

$$l = 2v \exp\left(-2i\omega T\left(1-\frac{v}{c}\cos\theta\right)\right)\frac{\sin(\omega T(1-(v/c)\cos\theta))}{\omega(1-(v/c)\cos\theta)}\,. \tag{15}$$

Этот результат совпадает с результатом Тамма для случая мгновенного ускорения и замедления. Следовательно, для достаточно малых частот (таких, что соответствующий период колебания $2\pi/\omega$ оказывается много больше, чем время ускоренного движения Δ) и для больших $T \gg \Delta$ излучение оказывается таким же, как и для мгновенного старта [1].

Таким образом, переход от случая плавного замедления и плавного ускорения к случаю мгновенного старта и финиша получается при соблюдении двух условий.

1) Время равномерного движения T много больше, чем время замедления и ускорения Δ. При соблюдении этого условия справедливо выражение (13) для амплитуды излучаемой волны.

2) Время замедления и ускорения Δ много меньше, чем период $2\pi/\omega$ излучаемой волны. При соблюдении этого условия выражение (13) переходит в формулу (15), найденную Таммом.

В случае больших частот $((\omega\Delta/2)(1-(v/c)\cos\theta) \gg 1)$ можем оценить величину слагаемых в фигурных скобках выражения (13), используя формулу

$$|\Gamma(ix)|^2 = \pi/x\,\mathrm{sh}\,\pi x\,. \tag{16}$$

Поскольку нас интересует главная часть зависимости от частоты, мы будем опускать предэкспоненциальные множители. Тогда формулу (16) можно переписать так:

$$|\Gamma(ix)| \sim \exp(-\pi|x|/2)\,, \tag{17}$$

причем это равенство означает, что абсолютная величина функции Γ от мнимого аргумента спадает по экспоненте с ростом абсолютной величины аргумента.

Используя оценку (17), получаем

$$l \sim \exp\left(-\frac{\pi\omega\Delta}{2}\left(1-\frac{v}{c}\cos\theta\right)\right) \quad \left(\frac{\omega\Delta}{2}\left(1-\frac{v}{c}\cos\theta\right) \gg 1\right), \tag{18}$$

т. е. амплитуда излучаемой волны (а следовательно, и интенсивность излучения) спадает с ростом частоты по показательному закону (18). Физическим условием, при выполнении которого имеет место такое спадание, является требование, чтобы время ускорения или замедления было много больше, чем время формирования излучения.

$$t_\Phi = (1/\omega)(1-(v/c)\cos\theta)^{-1}. \tag{19}$$

Асимптотическое поведение амплитуды l при высоких частотах можно оценить с помощью метода перевала исходя непосредственно из интегрального выражения (7) для l [4]. При этом результат уже не ограничен случаем $T \gg \Delta$, для которого справедливо соотношение (13) и вытекающее из него соотношение (18).

Метод перевала дает

$$l = \sqrt{\frac{2\pi}{|\boldsymbol{a}(t_0)\boldsymbol{k}|}}\,\boldsymbol{v}(t_0)\exp(i\omega t_0 - i\boldsymbol{kr}(t_0))\exp(i\beta_m)\,. \tag{20}$$

Величина t_0 определяется из условия $d\Phi(t)/dt|_{t=t_0}$, где $\Phi(t) = \omega t - \boldsymbol{kr}(t)$. Далее, $\boldsymbol{a}(t_0) = d^2\boldsymbol{r}(t)/dt^2|_{t=t_0}$, β_m — угол, определяющий направление пути интегрирования в методе перевала. В нашем случае t_0 имеет вид

$$t_0 = (\Delta/2) \ln (a - \sqrt{a^2 - 1}) + (i\pi\Delta)/2\,, \tag{21}$$

где $a = \operatorname{ch}(2T/\Delta) - (v \cos\theta/c) \operatorname{sh}(2T/\Delta)$. С учетом (20), (21) при любых значениях a из (9) получаем, что интенсивность излучения экспоненциально спадает:

$$d\varepsilon_{n,\omega} \sim \exp(-\pi\omega\Delta(1 - (v/c)\cos\theta))\,,$$

поэтому спектр излучения заряженной частицы, движущейся по гладкой траектории, быстро спадает, начиная с некоторого значения частоты [4]. Таким образом, плавное ускорение в начале пути и плавное замедление в конце в законе движения [1] приводит к тому, что спектр излучения на малых частотах не меняется, а на больших частотах спадает экспоненциально.

В заключение интересно отметить, что исследование некоторых ядерных процессов приводит к выражению вида (10). В частности, такое выражение используется в работе Дремина [6].

ЛИТЕРАТУРА

1. Tamm I. E. — J. Phys. USSR, 1939, **1**, p. 439 /Перевод: Тамм И. Е. Собрание научных трудов. — М.: Наука, 1985, т. 1.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. — М Наука, 1973.
3. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: Наука, 1971.
4. Аббасов И. И. — Краткие сообщения по физике ФИАН, 1985, № 8, с. 33.
5. Аббасов И .И., Болотовский Б. М., Давыдов В. А. — УФН, 1986, **149**, вып. 4, с. 709.
6. Дремин И. М. — Физика элементарных частиц и атомного ядра, 1987, **18**, с. 79
7. Болотовский Б. М., Давыдов В. А., Рок В. Е. — УФН, 1982, **136**, с. 501.
8. Болотовский Б. М., Давыдов В. А — Изв. вузов — Радиофизика, 1981, **24**, № 2, с. 231.

Физический институт им. П. Н. Лебедева
АН СССР

Поступила в редакцию
20 августа 1986 г.

RADIATION OF A CHARGED PARTICLE UNIFORMLY MOVING ALONG THE GIVEN PATH LENGTH IN THE CASE OF SMOOTH ACCELERATION AT THE START AND SMOOTH DECELERATION AT THE FINISH

I. I. Abbasov, B. M. Bolotovskij, V. A. Davydov

Radiation of a charged particle is considered for the case when the law of motion induces smooth acceleration at the beginning, then uniform motion along a given length and smooth deceleration at the end. Spectral and angular distribution of radiation is analysed for some cases of physical interest.