ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXXI, № 7 *РАДИОФИЗИКА* *1988*

УДК 621.372.822.001

ОБ ОДНОМ ВАРИАНТЕ ОБОБЩЕННОГО МЕТОДА РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ В ЗАДАЧЕ РАССЕЯНИЯ НА ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩЕМ ЦИЛИНДРЕ С СЕЧЕНИЕМ В ВИДЕ ГОФРА*

В. М. Темнов, М. В. Вардanашвили

На примере задачи дифракции плоской волны на идеально проводящем гофрированном цилиндре излагается новый вариант обобщенного метода разделения переменных. Результаты расчета полей, полученные для произвольных глубин гофра и удовлетворяющие с достаточной для практики точностью как граничным условиям, так и закону сохранения энергии, иллюстрируют широкие возможности метода.

В настоящее время появилось значительное количество работ, посвященных проблеме применимости обобщенного метода разделения переменных к решению некоординатных задач прикладной электродинамики. Интерес к этой проблеме обусловлен возможностью разработки модификаций метода, отличающихся простотой алгоритмизации и эффективностью численной реализации задач рассеяния волн на гладких металлических объектах сложной формы (см., например, [1–3]). Основу используемого в них подхода составляет разложение искомого рассеянного поля по радиальным собственным волнам, удовлетворяющим условию излучения Зоммерфельда.

Наиболее простые реализации этого подхода, заключающиеся в разложении рассеянного поля в ряд по мультиполям относительно некоторого центра, произвольно выбранного внутри рассеивателя, наталкиваются на трудно преодолимые ограничения, обусловленные гипотезой Рэлея [1–6]. Пути преодоления отмеченных трудностей, предложенные в работах [7, 8] и использующие свойство полноты собственных волн на гладком контуре, приводят к алгоритмам решения поставленной задачи и в том случае, когда гипотеза Рэлея не имеет места. Однако при значительных деформациях рассеивателя, когда его поперечное сечение существенно отличается от окружности, здесь возникают численные неустойчивости.

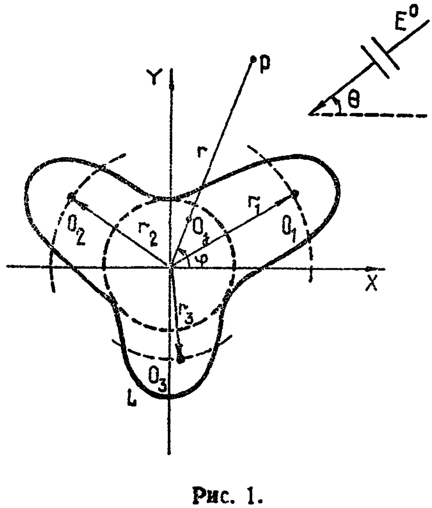

Рис. 1.

В настоящей работе в рамках метода обобщенного разделения переменных излагается новый вариант решения задачи для сильнодеформированных рассеивателей. С целью пояснения сути подхода в даль-

* Результаты этой работы были доложены на Всесоюзной научно-технической конференции по радиоприемным устройствам. — Горький, 1985.

нейшем рассматривается класс контуров, описываемых аналитической функцией вида $\rho=\rho(\varphi)\equiv\rho(\varphi+2\pi)$. Прежде всего необходимо отметить, что традиционное представление для рассеянного поля, записанное относительно некоторого центра O (рис. 1), имеет вид

$$V^- = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n H_n^{(1)}(kr)e^{in\varphi}. \tag{1a}$$

Поскольку ряд (1а) при больших значениях индекса $|n|$ является степенным*, то можно заключить, что его радиус сходимости равен расстоянию от центра O до наиболее удаленной особой точки O_1, при котором этот ряд расходится [10]. Далее, для выбранного класса контуров положение особых точек однозначно определяется корнями следующего трансцендентного уравнения:

$$\rho'(\varphi)/\rho(\varphi) = i. \tag{2}$$

Корни этого уравнения, изученного во многих работах (см., например, [4, 5]), представляют собой точки на комплексной плоскости φ и порождают семейство особых точек поля, расположенных внутри рассеивателя. Каждая из этих особых точек по аналогии со степенными рядами определяет радиус сходимости соответствующего ряда (1) и вносит вклад в представление (1а) согласно выражению

$$V^- = \sum_{j=1}^{M} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{nj}H_n^{(1)}(kr)e^{in\varphi}, \tag{1б}$$

где $\sum_{j=1}^{M} A_{nj} = A_n$. При этом первый ряд в (1б) ($j=1$) имеет радиус сходимости r_1, второй ряд ($j=2$) — радиус r_2 и т. д. (рис. 1). Нумерация точек O_j выбрана с учетом выполнения неравенств $r_1 \geqslant r_2 \geqslant r_3 \ldots$ Последний ряд в (1б) включает в себя все особые точки, расположенные внутри вписанной окружности.

Сформулируем теперь суть предлагаемого подхода. Она заключается в том, что особые точки O_j в разложении рассеянного поля выбираются в качестве центров разложения этого поля по радиальным расходящимся волнам; иными словами, вводятся несколько локальных цилиндрических систем координат с центрами в точках O_j. Ввиду отсутствия строгого теоретического обоснования эффективность подхода иллюстрируется численно на примере задачи дифракции плоской электромагнитной волны на идеально проводящем цилиндре сечением в виде гофра.

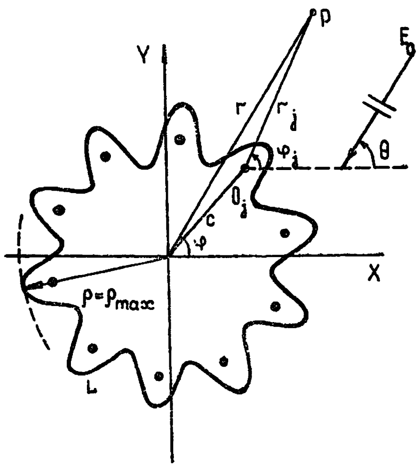

Рис. 2.

Итак, пусть на гладкий идеально проводящий бесконечный цилиндр падает под углом θ плоская E-поляризованная волна с электрической компонентой $E_z^0 = \exp\{-ikr\cos(\varphi-\theta)\}$ (k — волновое число свободного пространства). Контур L, определяющий поперечное сечение рассеивателя (рис. 2), в цилиндрических координатах описывается уравнением

$$\rho(\varphi) = a + \varepsilon\sin(M\varphi), \tag{3}$$

* При $|n|\gg1$ ряд (1а) переходит в степенной ряд, сходящийся в окрестности бесконечно удаленной точки.

где M — число лепестков гофрированного цилиндра. E_z-компоненту рассеянного поля представим в виде следующей суперпозиции мультипольных разложений по расходящимся волнам:

$$E_z^- = \sum_{j=1}^{M} \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_{jn} H_n^{(1)}(kr_j) \exp(in\varphi_j) , \tag{4}$$

где S_{jn} — неизвестные коэффициенты; r_j и φ_j — координаты точки наблюдения P в системе координат с центром в точке (O_j см. рис. 2). Выбор этих центров, которые, как отмечалось, совпадают с источниками рассеянного поля, сводится к определению корней уравнения (2). Для заданного уравнения (3) контура L местонахождение точек O_j по количеству совпадающих с числом лепестков цилиндра определяется достаточно просто. Они находятся внутри каждого лепестка на отрезках, соединяющих точки контура $\rho=\rho_{\max}$ с общим центром O и на расстоянии c от него:

$$c = [a+\varepsilon/2(\eta+1/\eta)]\,(1/\eta)^{1/M},$$

где

$$\eta = \frac{1+\sqrt{1+(M^2-1)(\varepsilon/a)^2}}{(M-1)(\varepsilon/a)}, \quad M=2,\ 3,\ \ldots$$

Неизвестные коэффициенты S_{jn} находятся из системы линейных алгебраических уравнений, получаемой из следующего функционального уравнения путем удовлетворения ему в ряде дискретных точек контура L:

$$\exp\{-ikr\cos(\varphi-\theta)\} + \sum_{j=1}^{M} \sum_{n=-N}^{N} S_{jn} H_n^{(1)}(kr_j) \exp(in\varphi_j)\,|_L = 0 . \tag{5}$$

Число точек коллокации N_2 в уравнении (5) выбирается из условия $N_2 > N_1$, где $N_1 = M(2N+1)$ — число неизвестных коэффициентов. Точки коллокации на контуре L задаются из условия равномерного их распределения по углу φ_j на j-м лепестке, причем распределение точек на каждом лепестке одинаково и не зависит от его номера j. Такой выбор точек не противоречит рекомендациям работы [9]. Сходимость алгоритма устанавливалась одновременно по двум критериям: удовлетворению нулевым граничным условиям для E_z-компоненты полного поля на контуре L (критерий E) и по выполнению закона сохранения энергии (критерий P). Последний соответствует обращению в нуль полного потока Δ_P вектора Пойнтинга через замкнутую поверхность, окружающую идеально проводящий рассеиватель.

Обратимся к результатам численного эксперимента. В таблице приведены данные для величин $\Delta_E = \max\limits_L |E_z^0 + E_z^-|$, Δ_P и $\Delta_P^{(*)}$, иллюстрирующие зависимость погрешности выполнения соответственно E- и P-критериев от номера приближения N и от степени деформации границы рассеивателя при различном значении числа лепестков M.

Характер поведения величин Δ_E и Δ_P свидетельствует о быстрой сходимости приближенных решений к точному практически при любых деформациях рассеивающего цилиндра. В то же время величина $\Delta_P^{(*)}$, характеризующая погрешность выполнения энергетического критерия P при использовании представления Рэлея (1а) (с центром в точке O), остается малой лишь для случаев $\varepsilon/a = 0 \div 0{,}2$ и совершенно неприемлемой для $\varepsilon/a = 0{,}9$. Из табл. 1, в частности, видно, что достигаемая на основе предложенного подхода точность расчета полей как по E-, так и P-критериям вполне достаточна для практических расчетов. Например, были рассчитаны нормированные диаграммы рассеяния для возмущенных цилиндров с числом лепестков $M=10$ при двух значениях деформации границ $\varepsilon/a=0{,}2$ и $\varepsilon/a=0{,}9$ и при различных ka (рис. 3а, б). Результаты, изображенные на рис. 3а (при $ka=1$), совпадают с графической точностью с соответствующими результатами работы [2], полученными методом интегральных уравнений. Для случая $\varepsilon/a = 0{,}9$ или близкого к нему в литературе какие-либо данные отсутствуют. Необходимо отметить, что с увеличением ka при неизменном порядке приближения N погрешности Δ_E и Δ_P возрастали, однако в нашем случае они не превосходили значений 10^{-2} и 10^{-3} соответственно.

Таблица 1

N_1	M	$\varepsilon/a = 0{,}2$ ($ka = 1$, $\theta = \pi/2$)			$\varepsilon/a = 0{,}909$ ($ka = 1$, $\theta = \pi/2$)		
		Δ_E	Δ_P	$\Delta_P^{(*)}$	Δ_E	Δ_P	$\Delta_P^{(*)}$
1	2	$2{,}1\cdot10^{-1}$	$3{,}4\cdot10^{-2}$	$2{,}2\cdot10^{-1}$	$4{,}5\cdot10^{-1}$	$5{,}3\cdot10^{-2}$	$7{,}7\cdot10^{-1}$
5		$4{,}4\cdot10^{-3}$	$3{,}1\cdot10^{-4}$	$5{,}7\cdot10^{-4}$	$8{,}9\cdot10^{-3}$	$6{,}5\cdot10^{-4}$	$0{,}2\cdot10^{1}$
9		$3{,}7\ 10^{-6}$	$5{,}8\cdot10^{-7}$	$4{,}4\cdot10^{-6}$	$5{,}8\cdot10^{-5}$	$7{,}4\cdot10^{-6}$	$2{,}1\cdot10^{1}$
1	4	$3{,}5\cdot10^{-1}$	$8{,}1\cdot10^{-2}$	$4{,}3\cdot10^{-1}$	$5{,}1\cdot10^{-1}$	$8{,}8\cdot10^{-2}$	$\sim10^{2}$
5		$4{,}8\cdot10^{-3}$	$4{,}3\cdot10^{-4}$	$3{,}4\cdot10^{-3}$	$9{,}7\cdot10^{-3}$	$8{,}1\cdot10^{-4}$	
9		$8{,}9\cdot10^{-6}$	$3{,}3\cdot10^{-6}$	$4{,}7\cdot10^{-3}$	$2{,}1\cdot10^{-4}$	$1{,}1\cdot10^{-5}$	
1	10	$5{,}6\ 10^{-1}$	$8{,}3\cdot10^{-2}$	$4{,}7\cdot10^{-1}$	$6{,}6\cdot10^{-1}$	$9{,}3\cdot10^{-2}$	$> 10^{2}$
5		$8{,}4\cdot10^{-3}$	$7{,}7\cdot10^{-4}$	$7{,}4\cdot10^{-2}$	$1{,}8\cdot10^{-2}$	$8{,}8\cdot10^{-4}$	
9		$8{,}8\cdot10^{-5}$	$9{,}1\cdot10^{-6}$	$7{,}3\cdot10^{-2}$	$7{,}8\cdot10^{-3}$	$5{,}5\cdot10^{-5}$	

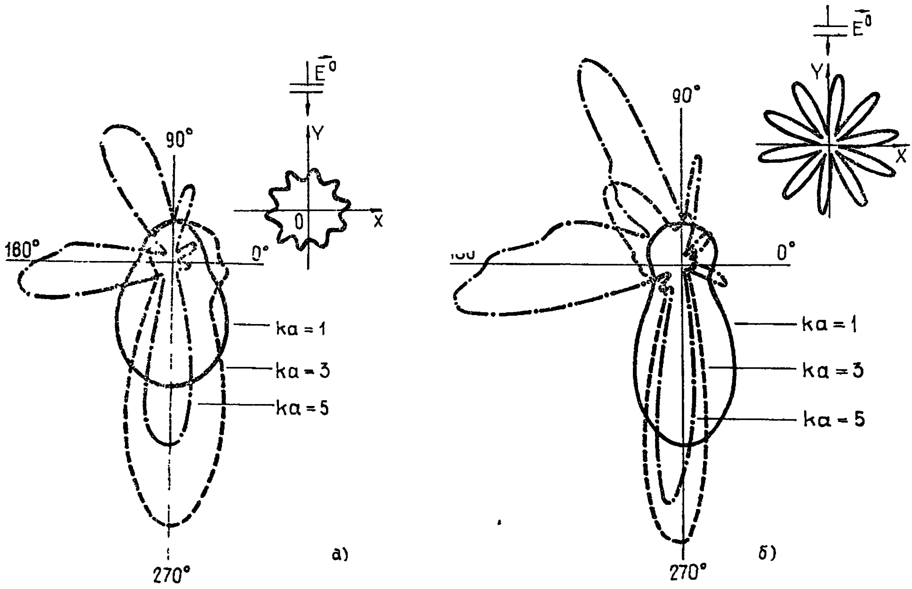

Рис. 3.

Вычисления были проведены на ЭВМ ЕС-1022, число точек коллокации во всех случаях не превышало 140. Условие $N_2 > N_1$ с последующим обращением прямоугольной матрицы с помощью метода наименьших квадратов позволило создать быстродействующий алгоритм, устойчивый, по существу, при любых параметрах задачи. Время вычислений (с учетом временных затрат на трансляцию и редактирование программы) искомых значений полей и диаграмм рассеяния, включая процедуру проверки обоих вышеотмеченных критериев, для случая $M = 10$, $N = 4$, $\varepsilon/a = 0{,}9$ составило примерно 13 мин.

Предложенный в настоящей работе подход может быть применен для решения широкого класса задач дифракции волн на гладких металлических цилиндрах с произвольным поперечным сечением.

ЛИТЕРАТУРА

1. Millar R. F. — Radio Sci., 1973, **8**, № 8, 9, p. 785.
2. Bolomey J. C., Wirgin A. — Proc. IEE, 1974, **121**, № 8, p. 794.
3. Апельцын В. Ф., Кюркчан А. Г. — Радиотехника и электроника, 1985, **30**, № 2, с. 193.
4. Hill H. R., Celli V — Phys. Rev., B, 1978, **17**, № 6, p. 2478.
5. Van den Berg P M., Fokkema J. T. — IEEE Trans., 1979, **AP-27**, № 5, p. 577.
6. Millar R. F. — Electron. Lett., 1969, **5**, № 17, p. 416.
7. Векуа И. Н — ДАН СССР, 1953, **90**, № 5, с 715.
8. Клеев А. И, Маненков А. В. Тезисы докладов IX Всесоюзного симпозиума по дифракции и распространению волн. — Тбилиси: Гос. ун-т, 1985, **1**, с. 493.
9. Гончаров В Л. — Изв. АН СССР, 1937, с. 171.
10. Титчмаш Е. Теория функций. — М.: Наука, 1980. — 463 с.

Московский институт
электронной техники

Поступила в редакцию
21 августа 1986 г.

A VARIANCE OF GENERALIZED METHOD OF SEPARATING VARIABLES IN A SCATTERING PROBLEM FOR A PERFECTLY CONDUCTING PERTURBED CYLINDER

V. M. Temnov, M. V. Vardanashvili

A new variance of generalized method of separating variables is introduced as an example of a problem of a plane wave scattered by a perfectly conducting perturbed cylinder. The numerical results obtained by testing boundary conditions and energy conservation for arbitrary deformation values of scatterers, illustrate wide applicational possibilities of the proposed method.