

$$\varphi_1(\omega)Q(x) = -\alpha g'(g(-x/\alpha))Q(-x/\alpha) - \alpha Q(g(-x/\alpha))e_{i\omega}. \quad (9)$$

Используя известную полиномиальную аппроксимацию для $g(x)$, нетрудно численно определить собственное значение $\varphi_1(\omega)$ (аналогичное вычисление проведено в [6]), которое даст более хорошую аппроксимацию соотношения подобия (8). Заметим, что в статическом пределе $\omega=0$ имеем, естественно, $\varphi_1(\omega)=\delta$. Если считать $Q(x) \simeq \text{const}$, то из (9) получим приближение (8): $\varphi_1(\omega) \approx \alpha(\alpha - \exp(i\omega))$. На рис. 1 полученное в численном эксперименте с отображением $f(\lambda, x) = \lambda(1-2x^2)$ значение $\varphi(\omega) = \overline{G}_7(\omega)/\overline{G}_8(2\omega)$ (точки) сравнивается с функциями $\varphi_0(\omega)$ (пунктир) и $\varphi_1(\omega)$ (сплошная линия).

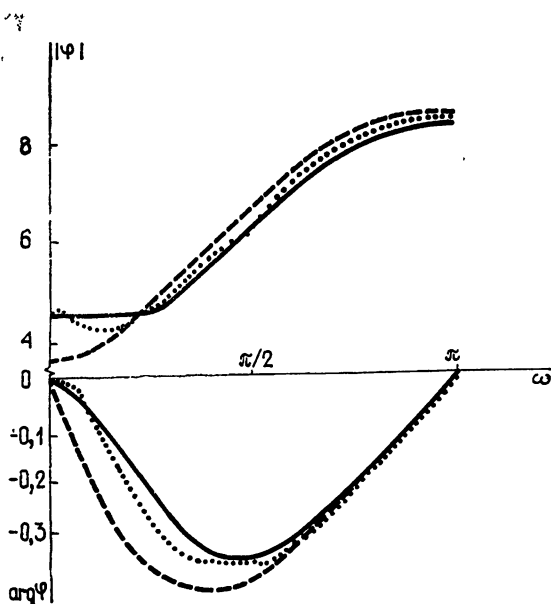


Рис. 1.

Автор выражает благодарность С. П. Кузнецову и М. И. Рабиновичу за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фейгенбаум М. — УФН, 1983, 141, с. 343.
2. Feigenbaum M. J. — In: Nonlinear Problems: Present and Future / Eds. A. R. Bishop, D. K. Campbell, B. Nicolaenko. North-Holland, 1982, p. 379.
3. Wolf A., Swift J. — Phys. Letters A, 1981, 83, p. 184.
4. Kai T. — J. Stat. Phys., 1982, 29, p. 329.
5. Кузнецов С. П. — Письма в ЖЭТФ, 1984, 39, с. 113.
6. Arneodo A. — Phys. Rev. Lett., 1984, 53, p. 1240; 54, p. 86.
7. Heldstab J., Thomas H., Geisel T., Radons G. — Zeit. Physik B, 1983, 50, p. 141; 1984, 55, p. 165.
8. Капекко К. — Prog. Theor. Phys., 1984, 72, p. 202.
9. Анищенко В. С., Летчфорд Т. Е., Сафонов М. А. — Изв. вузов — Радиофизика, 1984, 27, № 5, с. 565.

Институт прикладной физики
АН СССР

Поступила в редакцию
12 января 1987 г.

УДК 538.574:530.18

О РЕЗОНАНСНОМ ВОЗБУЖДЕНИИ СОЛИТОНОВ ШУМОМ

Ю. Р. Вайнберг, Б. И. Меерсон, П. В. Сасоров

Возникновение солитонов в нелинейных диспергирующих средах до настоящего времени исследовалось, в основном, в процессах эволюции начальных возмущений (см. обзоры [1, 2]). Нас будет интересовать здесь другая задача. Пусть имеется среда, допускающая распространение в ней солитонов, и на нее действует малое внешнее (за-

висящее от координат и времени) возмущение. При каких условиях в такой среде могут возбуждаться солитоны? Рассмотрим суть дела на примере среды, описываемой известным уравнением Кортевега—де Вриза, а внешнее возмущение представим в виде малой правой части уравнения:

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = \varepsilon \operatorname{Re} [a(t) \exp(ix)], \quad \varepsilon \ll 1, \quad (1)$$

где Re обозначает вещественную часть комплексного числа. Правая часть (1) описывает малую нестационарную внешнюю силу, периодическую по координате x (период всегда можно выбрать равным 2π). Такую силу можно моделировать, например, в экспериментах с нелинейными линиями передачи с дисперсией [3]. В последнее время задачи аналогичного типа вызывают большой интерес, в частности, в связи с приложениями в области генерации и усиления импульсов в нелинейных резонаторах (см. [4] и цитированную там литературу).

Если начальное возмущение среды отсутствует (или достаточно мало, $u(x, 0) \ll 1$), то в левой части уравнения (1) при малых t можно пренебречь нелинейным членом. Тогда полученное линейное уравнение допускает точное решение (например, методом Фурье), и результат описывает возбуждение в среде линейных волн $A_t \exp(-i\omega t + ikx)$ с волновыми числами $k = \pm 1$ и такими частотами ω , которые содержатся в фурье-спектре функции $a(t)$. Амплитуды этих волн постоянны и пропорциональны ε . Важное исключение, однако, составляет тот случай, когда в фурье-спектре $a(t)$ присутствуют гармоники с частотами ± 1 . В этом случае соответствующие внешние волновые воздействия $\exp(\pm it \pm ix)$ удовлетворяют дисперсионному уравнению линейных волн данной (невозмущенной) среды: $\omega = -k^3$. Решений линеаризованного уравнения в виде волн с постоянной амплитудой тогда не существует, а правильное решение описывает линейный рост амплитуд этих волн со временем — резонанс. В этом случае в уравнении (1) следует учитывать нелинейность, и эволюция волн будет определяться данным типом нелинейности и структурой резонансных областей фурье-спектра функции $a(t)$, т. е. областей вблизи гармоник с частотами ± 1 . Если расстояние между гармониками $a(t)$ в резонансных областях велико, рост амплитуды индуцированной кноидальной волны ограничивается уже слабой нелинейностью (генерацией небольшого числа высших гармоник) [5]. Это ограничение связано с выходом индуцированной волны из резонанса вследствие зависимости ее скорости от амплитуды. Так, например, если спектр $a(t)$ состоит только из одной резонансной гармоники, т. е. $a(t) = \exp(it)$, максимальная амплитуда первой гармоники индуцированной волны оказывается равной $(96\varepsilon)^{1/3} \ll 1$ [6]. Пусть, наоборот, спектральные гармоники $a(t)$ достаточно плотно заполняют резонансную область (соответствующий критерий имеет вид $\delta\omega \ll \nu - \varepsilon^{2/3}$, где $\delta\omega$ — расстояние между спектральными гармониками, ν — характерная «нелинейная» частота задачи в случае монохроматической волны внешнего воздействия [5]). Тогда рост амплитуды кноидальной волны может продолжаться вследствие резонансного взаимодействия волны с соседними гармониками. Это взаимодействие достаточно эффективно, если ширина спектра функции $a(t)$ (назовем ее γ) значительно превосходит нелинейную частоту ν . При еще большей ширине спектра, $\gamma \geq 1$, такой рост должен приводить к образованию цепочки солитонов на отрицательной «подложке» — нелинейных сигналов, отличие которых от «настоящих» солитонов не превышает величину порядка ε . Этот вывод в рассматриваемом случае связан с тем, что уравнение

(1) имеет первый интеграл: $\int_0^{2\pi} u(x, t) dx = 0$ (предполагается, что $u(x, 0) = 0$). Тогда

профиль кноидальной волны определяется не двумя, как в общем случае (см, например, [2]), а одним параметром — например, амплитудой. С ростом амплитуды (вследствие резонанса) неизбежно реализуется «солитонная» асимптотика кноидальной волны ([2], с. 55).

Дальнейшее изменение амплитуды сформировавшихся солитонов связано прежде всего со степенью эффективности резонанса между фазовыми скоростями волновых компонент внешнего воздействия и скоростями солитонов. Соответствующая задача была исследована в работе [9]. Ограничение роста амплитуды солитонов (или, по крайней мере, существенное уменьшение темпа этого роста) должно всегда иметь место в том случае, когда ширина частотного спектра внешнего воздействия конечна.

Предельным случаем спектра с большим количеством близко лежащих гармоник является сплошной спектр. В этом случае рост амплитуды кноидальной волны, по-видимому, должен иметь диффузионный характер. Начальную стадию этого роста, соответствующую малой амплитуде кноидальной волны, можно описывать уравнением Эйнштейна—Фоккера—Планка. В том случае, когда спектр $a(t)$ спадает достаточно быстро при больших расстройках от резонанса, средний квадрат установившейся амплитуды солитона растёт с ростом ν и не зависит от ε (при $\varepsilon \ll 1$). Время установления при этом должно быть пропорционально ε^{-2} .

Для иллюстрации изложенной идеи приведем результаты численного интегрирования уравнения (1). В качестве $a(t)$ мы выбрали функцию вида $b(t) \exp(it)$, где $b(t)$ — стационарный случайный процесс. Дискретная реализация этого процесса имеет вид

$$b_l = qb_{l-1} + Z_l(1-q^2)^{1/2}, \quad l \geq 1, \quad b_0 = 1. \quad (2)$$

Здесь $l = t/\Delta t$ — дискретное время (шаг по времени равен Δt), $q = \exp(-\nu \Delta t)$, $\nu \Delta t \ll 1$. Последовательность случайных комплексных чисел Z_l генерировалась в ЭВМ датчиком случайных чисел; она удовлетворяла условиям $Z = Z^* = 0$, $Z_l Z_{l+m} = \delta_{lm}$

(черта означает усреднение по l , $\delta_{a\beta}$ — символ Кронекера). Как легко убедиться, в этих условиях $\overline{b_l b_{l+m}^*} = q^{|m|}$, в частности, $|b^2| = 1$. Спектр мощности процесса (2) является лоренцевым с шириной спектра γ . Таким образом, правая часть (1) представляет собой теперь случайные «толчки», спектр которых центрирован на резонансную частоту и характеризуется шириной γ и «амплитудой» ϵ . Расчеты при различных значениях ϵ и γ (ϵ в диапазоне 0,1—0,3, γ в диапазоне 0,5÷2) показали, что во всех случаях в системе возбуждаются кноидальные волны, средний квадрат амплитуды которых $\overline{A^2}$ вначале нарастает, а затем (иногда после нескольких колебаний) выходит на «плато» или существенно замедляет рост. На рис. 1 изображена возбужденная кноидальная волна в момент времени $t=140$ в случае $\epsilon=0,2$ и $\gamma=1$. На рис. 2 приведена зависимость $\overline{A^2}(t)$ для тех же значений параметров ϵ и γ . Степенной характер спектра мощности $a(t)$ при больших частотах при отсутствии какого-либо обрезания должен приводить к дальнейшему (медленному) росту $\overline{A^2}(t)$ (см. [6]). Сравнение различных вариантов счета показывает, что темп начального роста $\overline{A^2}(t)$ увеличивается при увеличении ϵ и уменьшении γ . В области $A \geq 2$ с хорошей точностью справедлива солитонная асимптотика кноидальной волны.

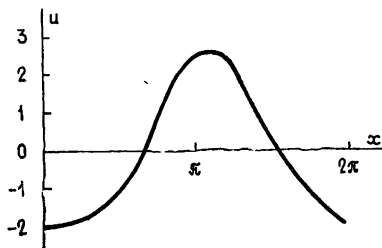
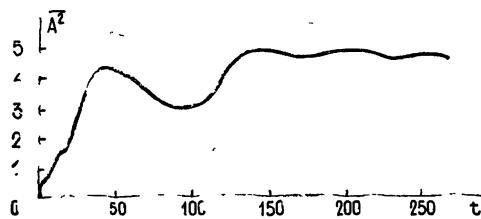


Рис. 1.

Таким образом, численное моделирование подтверждает основные положения предложенного механизма. В заключение отметим, что выбор пространственной структуры внешнего воздействия в виде $a(t)\exp(ix)$ (см. уравнение (1)) был обусловлен соображениями удобства численного моделирования. Предложенный механизм возбуждения солитонов должен, по-видимому, иметь место и в более общем случае произвольного числа пространственных гармоник внешнего воздействия (например, шум и по пространственной координате (а не только по времени)).

Авторы искренне благодарят В. А. Мохову за помощь в обработке результатов численного моделирования.

Рис. 2.



ЛИТЕРАТУРА

1. Кадомцев Б. Б., Карпман В. И. — УФН, 1971, 103, с. 193
2. Гуревич А. В., Питаевский Л. П. — В сб.: Вопросы теории и плазмы / Под ред. М. А. Леонтовича. — М. Атомиздат, 1980, вып. 10, с. 3.
3. Лонгрен К. В кн.: Солитоны в действии / Под ред. К. Лонгрена и Э. Скотта. — М.: Мир, 1981, с. 138
4. Gasch A., Berging T., Jäger D — Phys. Rev., 1986, A34, p. 4528.
5. Вайнберг Ю. Р., Меерсон Б. И., Сасоров П. В. — Изв. вузов — Радиофизика, 1983, 26, № 12, с. 1528.
6. Меерсон Б. И. Краткие тезисы докладов VIII Всесоюзного симпозиума по дифракции и распространению волн. — М., 1981, 3, с. 126.

Институт теоретической
и экспериментальной физики,
Институт прикладной геофизики

Поступила в редакцию
29 сентября 1986 г.

УДК 621.391.029

ВЛИЯНИЕ КУБИЧНОЙ ДИСПЕРСИИ НА ДИНАМИКУ N -СОЛИТОННЫХ ИМПУЛЬСОВ В ВОЛОКОННЫХ СВЕТОВОДАХ

В. А. Выслоух, Н. А. Сухотскова

Вопрос о взаимодействии солитонов в волоконных световодах и о динамике связанных солитонных состояний интересен, во-первых, с точки зрения создания сверхскоростных информационных систем, во-вторых, в связи с проблемой получения сверхкоротких световых импульсов. Критическая мощность, необходимая для формирования солитона в оптическом волокне, тем меньше, чем ближе длина волны излучения к