

УДК 534.1

О ДИНАМИКЕ ВЗАИМОСВЯЗАННЫХ РОТАТОРОВ

В. Н. Белых, Н. Н. Веричев

Проведено исследование динамической системы взаимодействующих ротаторов, имеющей многочисленные приложения. Полученные результаты позволяют, в частности, объяснить происхождение стохастичности динамических процессов в ряде физических систем.

1. Известно, что ряд физических систем, таких, как взаимосвязанные джозефсоновские переходы [1], взаимосвязанные системы фазовой синхронизации [2], электрогенераторы, работающие «в параллель» [3], связанные маятники [4], обладают общностью динамических свойств, что отражается (при определенных идеализациях) в адекватности их динамических моделей. В частности, некоторые задачи динамики названных систем сводятся к исследованию системы «взаимосвязанные ротаторы» вида

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} \ddot{\varphi}_1 + \delta_1 \dot{\varphi}_1 + \nu_1 \sin \varphi_1 &= i_1 + \sigma_1 \dot{\varphi}_2 + \alpha_1 \sin \varphi_2, \\ \lambda_{2,2} \ddot{\varphi}_2 + \delta_2 \dot{\varphi}_2 + \nu_2 \sin \varphi_2 &= i_2 + \sigma_2 \dot{\varphi}_1 + \alpha_2 \sin \varphi_1. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь переменные $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ и параметры $\{\lambda_{1,2}, \gamma_{1,2}, \nu_{1,2}, i_{1,2}, \sigma_{1,2}, \alpha_{1,2}\}$ безразмерны, $(\dot{}) \equiv d/d\tau$, τ — безразмерное время.

Несмотря на многочисленные приложения уравнений (1), определяющие важность их места в теории нелинейных колебаний, нелокальные динамические свойства системы «взаимосвязанные ротаторы» остаются мало изученными, тем самым мало изучены динамические свойства и упомянутых выше физических систем.

2. Переменные и параметры уравнений (1) для перечисленных систем имеют различный физический смысл. Так, для системы двух взаимосвязанных маятников $\varphi_{1,2}$ — углы отклонения, $\lambda_{1,2}$ — моменты инерции, $\delta_{1,2}$ — коэффициенты вязкого трения, $\nu_{1,2}$ — максимальные значения моментов сил тяжести, $i_{1,2}$ — действующие на маятники постоянные моменты внешних сил, $\sigma_{1,2}, \alpha_{1,2}$ — коэффициенты связи. Для определенности рассмотрим конкретное соединение джозефсоновских переходов, изображенное на рис. 1. Технически такое соединение — один из простых способов организации взаимной синхронизации переходов. (Некоторые вопросы синхронизации джозефсоновских переходов рассматривались в [5–7].) Допустим, что каждый из них описывается резистивной моделью [1]. При этом правила Кирхгофа с учетом соотношений Джозефсона для фаз переходов φ_1, φ_2 и их напряжений V_1, V_2 приводят к следующей системе уравнений относительно физических переменных:

$$\begin{aligned} C_1 \frac{dV_1}{dt} + R_1^{-1} V_1 + I_{c1} \sin \varphi_1 &= J - R^{-1} (V_1 + V_2) - C_0 \frac{d(V_1 + V_2)}{dt}, \\ C_2 \frac{dV_2}{dt} + R_2^{-1} V_2 + I_{c2} \sin \varphi_2 &= J - R^{-1} (V_1 + V_2) - C_0 \frac{d(V_1 + V_2)}{dt}, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = \frac{2\pi}{\Phi_0} V_1, \quad \frac{d\varphi_2}{dt} = \frac{2\pi}{\Phi_0} V_2,$$

где, соответственно, $C_{1,2}$, $R_{1,2}$, $I_{c1,2}$ — емкости, нормальные сопротивления и критические значения сверхтоков переходов, J — ток внешнего источника, R , C_0 — сопротивление и емкость связи. Процедура приведения уравнений (2) к форме уравнений (1) заключается в том, что сначала из уравнений (2) исключаются переменные V_1 и V_2 и выписываются уравнения относительно φ_1 и φ_2 . Затем вводятся безразмерные параметры схемы и время:

$$I_c = \frac{I_{c1} + I_{c2}}{2}, \quad R = \frac{R_1 + R_2}{2}, \quad \frac{2\pi R I_c}{\Phi_0} t = \tau, \quad \gamma_{1,2} = \frac{R}{R_{1,2}}, \quad \nu_{1,2} = \frac{I_{c1,2}}{I_c},$$

$$J_{1,2} = \frac{J}{I_c}, \quad \gamma_0 = \frac{R}{R_0}, \quad \frac{2\pi C_{1,2} R^2 I_c}{\Phi_0} = c_{1,2}, \quad \frac{2\pi C_0 R^2 I_c}{\Phi_0} = c_0.$$

Далее, «безразмерные» уравнения разрешаются относительно старших производных и приводятся к форме (1). При этом связь безразмерных параметров (1) с безразмерными параметрами схемы осуществляется с помощью соотношений

$$\lambda_{1,2} = \frac{c_1 c_2 + c_0 (c_2 + c_1)}{c_{2,1} + c_0},$$

$$\delta_{1,2} = \gamma_{1,2} + \gamma_0 \frac{c_{2,1}}{c_{2,1} + c_0},$$

$$\dot{i}_{1,2} = J_{1,2} - \frac{c_0 J_{1,2}}{c_{2,1} + c_0},$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{c_0 (\gamma_{2,1} + \gamma_0)}{c_{2,1} + c_0} - \gamma_0 \dot{i}$$

$$\alpha_{1,2} = \frac{c_0 \nu_{2,1}}{c_{2,1} + c_0}.$$

Представляются наиболее интересными следующие задачи.

1) Определение областей параметров, отвечающих качественно различным, стационарным динамическим режимам переходов (ротаторов). Конкретнее, определение области параметров, отвечающей сверхпроводящему состоянию ($\langle \varphi_1 \rangle_\tau = \langle \varphi_2 \rangle_\tau = 0$) обоих переходов, реализующемуся при любых начальных условиях системы; области параметров, отвечающей резистивному состоянию обоих переходов ($\langle \varphi_1 \rangle_\tau \neq 0$, $\langle \varphi_2 \rangle_\tau \neq 0$) — режиму джозефсоновской генерации, реализующемуся при любых начальных условиях; области параметров, соответствующей совокупности этих режимов, когда тот или иной из них реализуется в зависимости от начальных условий.

2) Определение конкретного характера движений (качественных структур траекторий в фазовом пространстве и их бифуркаций) фаз переходов для различных областей параметров.

3) Исследование взаимной синхронизации переходов в режиме джозефсоновской генерации. А именно, определение областей ее захва-

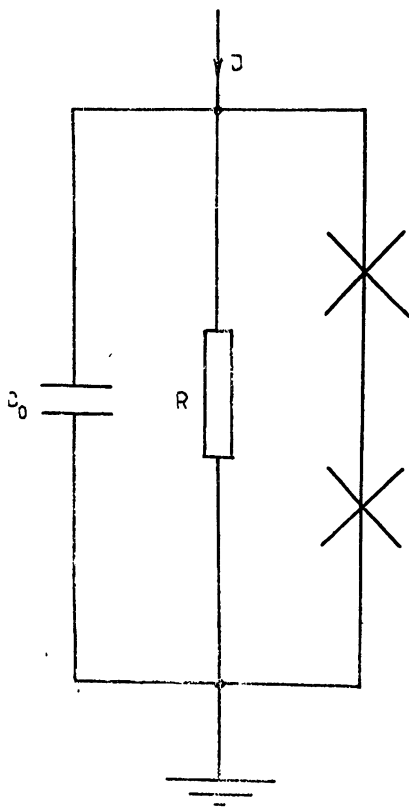


Рис. 1.

та и удержания, определение характера биений, предшествующих взаимному захвату синхронизации, отражение этих движений на вольт-амперных характеристиках переходов.

Настоящая работа посвящена решению перечисленных задач. Поскольку эти задачи являются центральными при исследовании и других, упомянутых выше (в разд. 1) физических систем, результаты исследования формулируются относительно параметров уравнений (1). Используя приведенную связь параметров, можно переформулировать эти результаты относительно соответствующих параметров схемы.

3. В этом разделе обсудим динамику ротаторов и притягивающие множества траекторий в фазовом пространстве. Систему (1) рассмотрим при значениях параметров из области

$$D^* = \{\lambda_{1,2} > 0, \delta_{1,2} > 0, \nu_{1,2} > 0, \delta_1 \delta_2 - \sigma_1 \sigma_2 > 0\}.$$

Для точек D^* любое решение φ_1, φ_2 имеет для всех τ ограниченные производные $\dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2$. При этом в фазовом пространстве $G(\varphi_{1,2}, \dot{\varphi}_{1,2}) = T^2 \times R^2$ существует область диссипации

$$G^* = \{V \varphi_1, \varphi_2, \omega_{1,2} - \omega_{1,2}^0 \leq \dot{\varphi}_{1,2} \leq \omega_{1,2} + \omega_{1,2}^0\},$$

в которую попадают все фазовые траектории (1) при $\tau \rightarrow \infty$. Очевидно, что $\langle \varphi \rangle_\tau = \langle \dot{\varphi}^* \rangle_\tau$, где $\dot{\varphi}^*$ — решение уравнений (1), соответствующее траектории предельного множества в области фазового пространства G^* . Таким образом, каждый из обозначенных стационарных динамических режимов переходов соответствует некоторому предельному множеству системы (1). Все предельные множества траекторий (1) в фазовом пространстве разделяем на следующие «негомотопные» классы:

K_{00} — множество траекторий, ограниченных по φ_1 и φ_2 ,

K_{0r} — ограниченных по φ_1 и не ограниченных по φ_2 ,

K_{r0} — не ограниченных по φ_1 и ограниченных по φ_2 ,

K_{rr} — множество траекторий, не ограниченных по φ_1 и φ_2 .

При этом $\langle \dot{\varphi}_1^* \rangle_\tau = \langle \dot{\varphi}_2^* \rangle_\tau = 0$, если $\{T^*\} \in K_{00}$, где T^* — фазовая траектория (1), соответствующая решению φ_1^*, φ_2^* :

$$\langle \dot{\varphi}_1^* \rangle_\tau = 0, \langle \dot{\varphi}_2^* \rangle_\tau \neq 0, \quad \text{если } \{T^*\} \in K_{0r},$$

$$\langle \dot{\varphi}_1^* \rangle_\tau \neq 0, \langle \dot{\varphi}_2^* \rangle_\tau = 0, \quad \text{если } \{T^*\} \in K_{r0},$$

$$\langle \dot{\varphi}_1^* \rangle_\tau \neq 0, \langle \dot{\varphi}_2^* \rangle_\tau \neq 0, \quad \text{если } \{T^*\} \in K_{rr}.$$

Таким образом, решение первой задачи (см. разд. 2) сводится к определению областей параметров, соответствующих существованию различных классов $K_{(r)}$ притягивающих множеств в фазовом пространстве системы.

Воспользуемся методом двумерных систем сравнения [2, 8]. Введем по отношению к каждому из уравнений (1) системы сравнения вида

$$A_1^{\pm}: \lambda_1 \dot{\varphi}_1 + \delta_1 \ddot{\varphi}_1 + \nu_1 \sin \varphi_1 = \delta_1 \omega_1 \pm \varepsilon_1, \quad (3)$$

$$A_2^{\pm}: \lambda_2 \dot{\varphi}_2 + \delta_2 \ddot{\varphi}_2 + \nu_2 \sin \varphi_2 = \delta_2 \omega_2 \pm \varepsilon_2,$$

где

$$\delta_{1,2} \omega_{1,2} \pm \varepsilon_{1,2} = \sup \left\{ i_{1,2} + \sigma_{1,2} \varphi_{2,1} + \alpha_{1,2} \sin \varphi_{2,1} \right\},$$

$$\forall \varphi_{1,2}, \varphi_{1,2} \in G^*,$$

$$\varepsilon_{1,2} = |\sigma_{1,2}| \omega_{1,2}^0 + |\alpha_{1,2}|.$$

Вычисления величин $\omega_{1,2}, \omega_{1,2}^0$ (т. е. их выражение через параметры системы) — границ области диссипации G^* — приведены в Приложе-

нии. Нетрудно убедиться в том, что поверхности, задаваемые траекториями систем сравнения, в фазовом пространстве не имеют контакта с векторным полем системы (1). По этой причине, если A_k^\pm ($k=1, 2$) имеют топологически одинаковые структуры разбиения плоскости $(\varphi_k, \dot{\varphi}_k)$ на траектории, то проекции множеств $K_{(\cdot),k}$ на плоскости $(\varphi_k, \dot{\varphi}_k)$ оказываются лежащими между особыми многообразиями систем сравнения. Определим области параметров, для которых системы A_k^\pm имеют одинаковые структуры фазовых траекторий. Введем обозначения: $D_{(0),k}^+$, $D_{(0r),k}^+$, $D_{(r),k}^\pm$; $k=1, 2$ — области параметров, для которых A_k^\pm имеют соответственно: абсолютно устойчивое состояние равновесия, состояние равновесия и предельный цикл, абсолютно устойчивый предельный цикл. Как известно [2], эти области в плоскостях параметров (λ_k^*, ρ_k^*) , $\lambda_k^* = \delta_k (v_k / \lambda_k)^{-1}$, $\rho_k^* = (\delta_k \omega_k \pm \varepsilon_k) v_k^{-1}$ отделяются прямой $\rho_k^* = 1$, отвечающей бифуркации состояния равновесия, и кривой Трикоми $\rho_k^*(\lambda_k^*)$, соответствующей петле сепаратрисы седла. Очевидно, что для областей $D_{(\cdot),k}^+ = D_{(\cdot),k}^+ \cap D_{(\cdot),k}^-$ (рис. 2, $\omega_k^{*\pm} = \frac{v_k \rho_k^* \pm \varepsilon_k}{\delta_k}$, $\omega_{k1} = \frac{\varepsilon_k}{\delta_k}$, $\omega_{k2} = \frac{v_k - \varepsilon_k}{\delta_k}$, $\omega_{k3} = \frac{v_k + \varepsilon_k}{\delta_k}$), системы сравнения A_k^\pm имеют

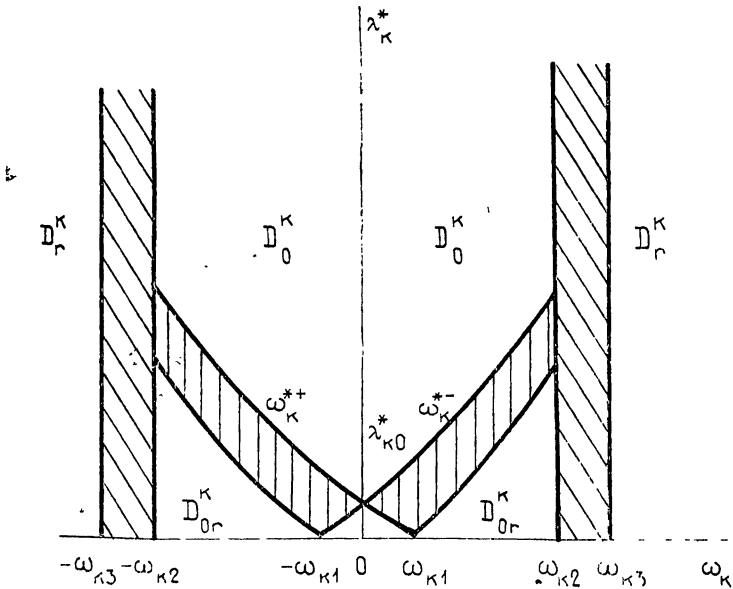


Рис. 2.

одинаковые структуры траекторий в плоскостях $(\varphi_k, \dot{\varphi}_k)$: для областей D_0^k — структуру L_0^k , для D_{0r}^k — L_{0r}^k , для D_r^k — L_r^k (см. соответственно рис. 3а, б, в). На рис. 3 стрелками указана ориентация векторного поля (1) на особых траекториях A_k^\pm . Принимая во внимание рис. 3, с очевидностью получаем, что $K_{00} \in G_0^1 \times G_0^2$, $K_{0r} \in G_0^1 \times G_r^2$, $K_{r0} \in G_r^1 \times G_0^2$, $K_{rr} \in G_r^1 \times G_r^2$. Отсюда нетрудно получить, что

1) для области $D_{00} = D_0^1 \times D_0^2$ система (1) имеет единственное притягивающее множество K_{00} , следовательно, при любом начальном условии системы $\langle \varphi_1 \rangle_\tau = \langle \varphi_2 \rangle_\tau = 0$;

2) для $D_{0r} = D_0^1 \times D_r^2$ — единственное множество K_{0r} , $\langle \varphi_1 \rangle_\tau = 0$, $\langle \varphi_2 \rangle_\tau \neq 0$, а для $D_{r0} = D_r^1 \times D_0^2$ — K_{r0} , поэтому $\langle \varphi_1 \rangle_\tau \neq 0$, $\langle \varphi_2 \rangle_\tau = 0$ при любом начальном условии;

3) для $D_{rr} = D_r^1 \times D_r^2$ — единственное притягивающее множество K_{rr} , $\langle \dot{\varphi}_1 \rangle_\tau \neq 0$, $\langle \dot{\varphi}_2 \rangle_\tau \neq 0$ при любом начальном условии системы.

Вне указанных областей параметров существуют различные совокупности притягивающих множеств $K_{(\cdot)(\cdot)}$; следовательно, соответствующие им стационарные динамические режимы переходов реализуются в зависимости от начальных условий;

4) для $D_{0(0r)} = D_0^1 \times D_0^2$ существуют множества K_{00} и K_{0r} , а для $D_{(0r)0} = D_{0r}^1 \times D_0^2$ — K_{00} и K_{r0} ;

5) для $D_{(0r)r} = D_{0r}^1 \times D_r^2$ — K_{0r} и K_{rr} , а для $D_{r(0r)} = D_r^1 \times D_{0r}^2$ — K_{r0} и K_{rr} ;

6) для $D_{(0r)(0r)} = D_{0r}^1 \times D_{0r}^2$ — K_{00} , K_{0r} , K_{r0} , K_{rr} .

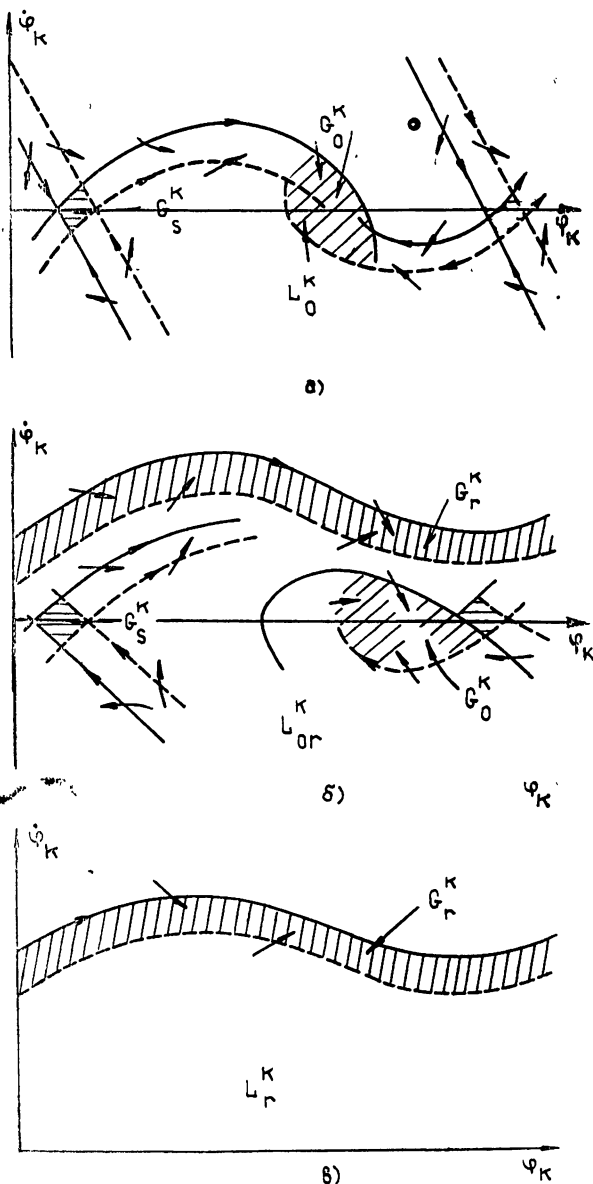


Рис. 3.

Взаиморасположение областей параметров в плоскости (ω_1, ω_2) при $\lambda_{rk0} = \text{const}$ приведено на рис. 4. При переходе из одной области параметров $D_{(\cdot)(\cdot)}$ в другую (в заштрихованных полосах, рис. 4) проис-

ходят бифуркации, связанные с изменением топологической структуры множеств $K_{(\cdot)(\cdot)}$, с рождением гомоклинических траекторий и связанных с ними сложных структур траекторий в фазовом пространстве, порождающих стохастизацию динамических режимов джозефсоновских переходов. Как будет показано ниже, стохастизация динамических процессов характерна и для значений параметров из областей $D_{(\cdot)(\cdot)}$.

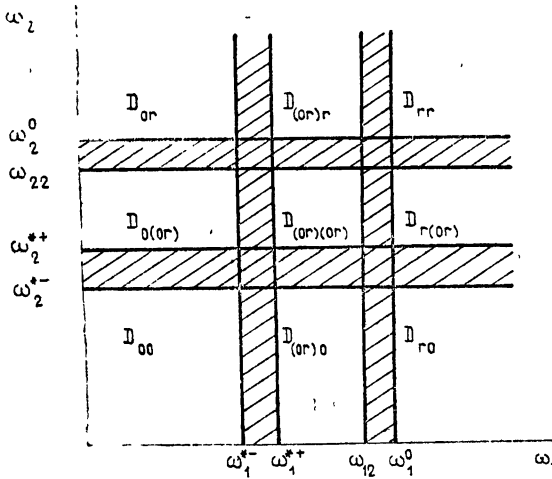


Рис. 4.

4. Обсудим конкретные структуры траекторий. Рассмотрим качественную структуру множества вращательных движений K_{rr} в асимптотическом случае $\lambda_{1,2} \gg 1$. Параметры из области $D_{(or)(or)}$ или D_{rr} .

Уравнения (1) заменой переменных [9]

$$\dot{\varphi}_1 = \omega_1 + \mu \Phi_1(\varphi_1, \varphi_2, x_1), \quad \dot{\varphi}_2 = \omega_2 + \mu \Phi_2(\varphi_1, \varphi_2, x_2),$$

где

$$\Phi_1 = \frac{\mu_1 \nu_1}{\omega_1} \cos \varphi_1 - \frac{\mu_1 \alpha_1}{\omega_2} \cos \varphi_2 + x_1,$$

$$\Phi_2 = \frac{\mu_2 \nu_2}{\omega_2} \cos \varphi_2 - \frac{\mu_2 \alpha_2}{\omega_1} \cos \varphi_1 + x_2,$$

$$\mu = \frac{2}{\lambda_1 + \lambda_2}, \quad \mu_1 = \frac{\lambda_1' + \lambda_2}{2\lambda_1}, \quad \mu_2 = \frac{\lambda_1 + \lambda_2'}{2\lambda_2},$$

сводятся к эквивалентной системе в стандартной форме с быстро вращающимися фазами φ_1 и φ_2 [10], которые для главного резонанса ($\omega_1 \approx \omega_2$) имеют следующие укороченные уравнения:

$$\dot{x}_1 = \mu (-\mu_1 \delta_1 x_1 + \sigma_1 \mu_1 x_2 - \Omega_1 \sin \eta),$$

$$\dot{x}_2 = \mu (\sigma_2 \mu_2 x_1 - \delta_2 \mu_2 x_2 + \Omega_2 \sin \eta), \quad (4)$$

$$\dot{\eta} = \mu (\Delta + x_1 - x_2); \quad \dot{\varphi}_2 = \omega_2 + \mu x_2,$$

где

$$\eta = \varphi_1 - \varphi_2, \quad \omega_1 - \omega_2 = \mu \Delta, \quad \Omega_1 = \frac{\alpha_1 \mu_1}{2\omega_1 \omega_2} (\mu_1 \nu_1 + \mu_2 \alpha_2),$$

$$\Omega_2 = \frac{\alpha_2 \mu_2}{2\omega_1 \omega_2} (\mu_2 \nu_2 + \mu_1 \alpha_1).$$

В свою очередь, первые три уравнения (4), при замене времени

$$\mu\Omega_0\tau = \tau_H, \quad \Omega_0 = \left(\frac{\Omega_1\mu_2(\delta_2 - \sigma_2) + \Omega_2\mu_1(\delta_1 - \sigma_1)}{\delta_1\mu_1 + \delta_2\mu_2} \right)^{1/2}$$

сводятся к известному из теории систем фазовой синхронизации уравнению вида [11]

$$b\eta + \dot{\eta} + a \cos \eta \dot{\eta} + \lambda\eta + \sin \eta = \gamma. \quad (5)$$

где

$$b = \frac{\Omega_0}{\delta_1\mu_1 + \delta_2\mu_2}, \quad a = \frac{\Omega_1 + \Omega_2}{\Omega_0(\delta_1\mu_1 + \delta_2\mu_2)},$$

$$\lambda = \frac{\mu_1\mu_2(\delta_1\delta_2 - \sigma_1\sigma_2)}{\Omega_0(\delta_1\mu_1 + \delta_2\mu_2)}, \quad \gamma = \frac{\mu_1\mu_2(\delta_1\delta_2 - \sigma_1\sigma_2)}{\Omega_0^2(\delta_1\mu_1 + \delta_2\mu_2)} \Delta.$$

Разбиение пространства параметров $\{a, b, \lambda, \gamma\}$ на области, соответствующие качественно различным структурам траекторий (5) в фазовом пространстве $\{\eta, \dot{\eta}, \eta\}$, существенно зависит от отношения a/b . Рассмотрим наиболее простой случай $a > b$. При этом разбиение плоскости параметров (γ, λ) $a, b = \text{const}$ осуществляется бифуркационными кривыми кратного вращательного цикла $\gamma = \gamma_1(\lambda)$ и петли сепаратрисы седла $\gamma = \gamma_2(\lambda)$ и имеет качественный вид, изображенный на рис. 5.

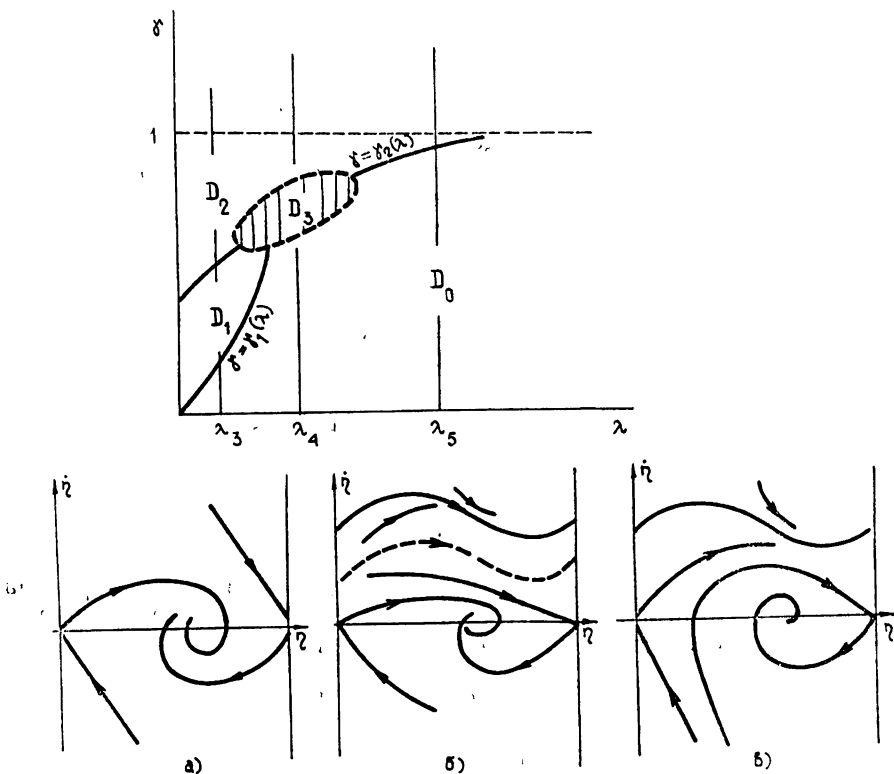


Рис. 5.

В силу инвариантности уравнения (5) относительно преобразования $\eta \rightarrow -\eta, \gamma \rightarrow -\gamma$ картина разбиения симметрична относительно оси $\gamma = 0$. По этой причине в дальнейшем предполагаем $\gamma \geq 0$. Кривые $\gamma_{1,2}(\lambda)$ могут быть построены численными методами [2]. Двумерные аналоги структур траекторий для областей D_0, D_1, D_2 изображены на рис. 4а, б, в. Неустойчивый цикл (рис. 5б) движется вниз по цилиндру, устойчивый — вверх при возрастании γ . В некоторой окрестности точки смыкания бифуркационных кривых $\gamma_{1,2}(\lambda)$ существует область D_3 , соответствующая сложной структуре траекторий [12]. Для точек об-

ласти D_3 уравнение (5) имеет в фазовом пространстве аттрактор со счетным множеством седловых и некоторым числом устойчивых вращательных периодических траекторий. Как известно, каждому предельному множеству l системы (5) соответствует предельное множество $l \times S^1$ системы (1). Таким образом, для области D_0 система (1) имеет в фазовом пространстве единственный устойчивый предельный цикл, для D_1 — устойчивый цикл, а также устойчивый и неустойчивый инвариантные торы, для D_2 — устойчивый цикл и устойчивый тор, для D_3 — аттрактор, содержащий множество двумерных инвариантных торов. Сложные динамические режимы системы взаимосвязанных ротаторов возможны также и для областей параметров, соответствующих их вращательно-колебательным движениям (множества K_{0r} и K_{r0}). По крайней мере, если движения одного из ротаторов ограничены по фазе φ (тем самым он подобен нелинейному осциллятору), то рассматриваемая система, в определенном смысле, близка к системе ротатор-осциллятор, сводящейся при некоторых предположениях к уравнениям Лоренца [13-16].

5. Синхронизация вращений ротаторов.

Как известно [8], режимы синхронизации двух взаимодействующих автоколебательных систем с одной степенью свободы полностью определяются значениями и устойчивостью числа вращения Пуанкаре на торе. В рассматриваемом случае число вращения имеет выражение $r = \lim_{\tau \rightarrow \infty} (\varphi_1(\tau) / \varphi_2(\tau))$. Ра-

циональным, устойчивым значениям $r = p/q$ соответствует устойчивая синхронизация вращательных движений ротаторов (вращательные предельные циклы системы (1)), иррациональным r — режим биений фаз (инвариантные торы системы (1)). При этом, значения параметров системы, для которых r принимает одно и то же значение, независимо от начального условия системы, представляют собой область захвата синхронизации, а область параметров существования данного резонанса — область удержания синхронизации типа p/q . В случае простой синхронизации $r=1$. Таким образом, исследование качественных особенностей синхронизации сводится к качественному исследованию зависимостей числа вращения от параметров системы. Обсудим связь числа враще-

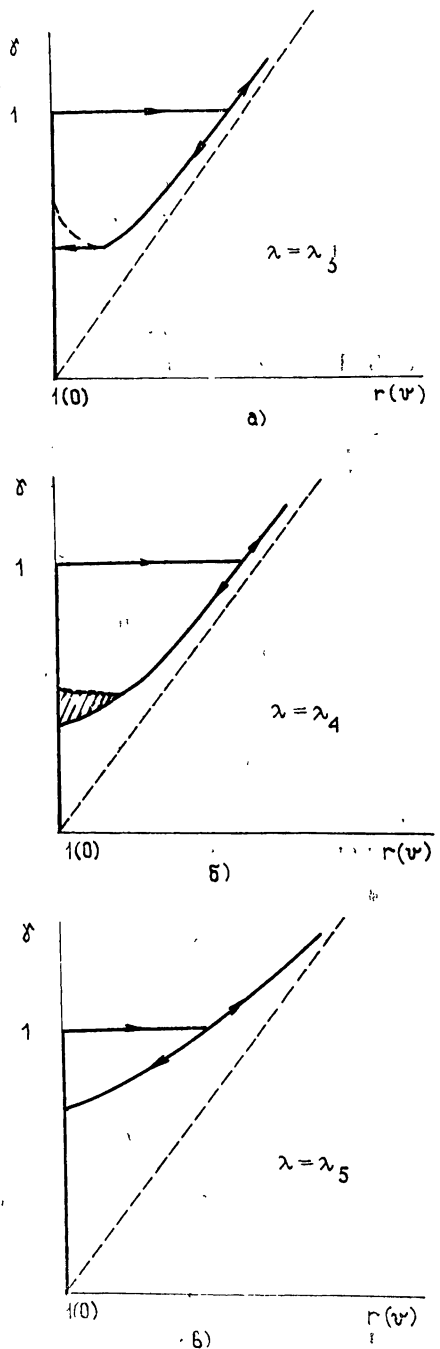


Рис. 6.

ния с предельными множествами усредненного уравнения (5), а также его связь с вольт-амперными характеристиками джозефсоновских пере-

ходов, которые определяются выражениями $v_k(i_k) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \dot{\varphi}(\tau) d\tau$,

v_k, i_k — постоянные напряжение и ток переходов.

При $\lambda_{1,2} \gg 1$, используя формулы преобразования переменных, приводящих систему (1) к стандартной форме, получаем выражение для числа вращения:

$$r = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\omega_1 + \mu(1/\tau) \int_0^\tau \Phi_1(s) ds}{\omega_2 + \mu(1/\tau) \int_0^\tau \Phi_2(s) ds} = 1 + \frac{1}{\omega_2} \langle \dot{u}^* \rangle_\tau,$$

где η^* — решение уравнения (5), соответствующее траектории предельного множества. С другой стороны, в силу определения вольт-амперных характеристик переходов, для разности напряжений $v = v_1 - v_2$ имеем выражение $v = \langle \dot{\eta}^* \rangle_\tau$. Таким образом, зависимости числа вращения r и «напряжения» v от параметров системы имеют очевидную связь. На рис. 6 представлены качественные картины зависимости r и v от параметра γ при различных фиксированных значениях λ , указанных на рис. 5. Из результатов разд. 4 следует, что область удержания простой взаимной синхронизации при любых λ , a и b определяется неравенством $\gamma < 1$. При $\gamma = 1$ система скачком переходит в режим биений. Возврат из режима биений в режим синхронизации с уменьшением расстройки γ может происходить как жестко (скачком) — случай а), так и мягко — случай в). Область захвата синхронизации зависит от λ . В случае а) она выражается неравенством $\gamma < \gamma_1(\lambda_3)$ и $\gamma < \gamma_2(\lambda_5)$ — в случае в). При $\lambda, \gamma \in D_3$ — случай б) — ситуация более сложная. Здесь число вращения и напряжения v_1, v_2 переходов могут принимать при одном и том же γ , в зависимости от начальных условий, совершенно различные значения, определяемые различными устойчивыми циклами, принадлежащими сложной структуре. Однако устойчивые циклы, ввиду малости своих областей притяжения, не проявляются в реальной системе, всегда подверженной действию сколь угодно малых флуктуаций. По этой причине реально процесс возврата системы в режим синхронизации сопровождается стохастическими автоколебаниями и происходит «квазислучайным» образом. В этом случае спектр напряжения на джозефсоновских переходах сплошной.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Определим границы области диссипации $G^*(\cdot)$ системы (1) из эквивалентной ей системы вида

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_1 &= \omega_1 + \lambda_1^{-1} y_1, & \dot{\varphi}_2 &= \omega_2 + \lambda_2^{-1} y_2, \\ \dot{y}_1 &= -\delta_1 \lambda_1^{-1} y_1 - \sigma_1 \lambda_2^{-1} y_2 + F_1, & & (П.1) \\ \dot{y}_2 &= \sigma_2 \lambda_1^{-1} y_1 - \delta_2 \lambda_2^{-1} y_2 + F_2, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} F_1 &= \alpha_1 \sin \varphi_2 - v_1 \sin \varphi_1, & F_2 &= \alpha_2 \sin \varphi_1 - v_2 \sin \varphi_2, \\ \omega_1 &= \frac{i_1 \delta_2 + i_2 \sigma_1}{\delta_1 \delta_2 - \sigma_1 \sigma_2}, & \omega_2 &= \frac{i_2 \delta_1 + i_1 \sigma_2}{\delta_1 \delta_2 - \sigma_1 \sigma_2}. \end{aligned}$$

Производные функций Ляпунова

$$V_{1,2} = \frac{\delta_2}{2|\sigma_1|} y_1^2 + \frac{\delta_1}{2|\sigma_2|} y_2^2 \pm y_1 y_2 \quad \text{при } \sigma_1 \sigma_2 > 0$$

(«+» соответствует случаю $\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0$, «-» — случаю $\sigma_1 < 0, \sigma_2 < 0$)

и

$$V_3 = \frac{\lambda_2}{2|\sigma_1|} y_1^2 + \frac{\lambda_1}{2|\sigma_2|} y_2^2 \quad \text{при } \sigma_1\sigma_2 < 0,$$

взятые в силу системы (П.1), имеют вид

$$\dot{V}_{1,2} = \frac{1}{|\sigma_1|} y_1 \left(-\frac{\delta_1\delta_2 - \sigma_1\sigma_2}{\lambda_1} y_1 + \delta_2 F_1 + \sigma_1 F_2 \right) + \frac{1}{|\sigma_2|} \times \\ \times y_2 \left(-\frac{\delta_1\delta_2 - \sigma_1\sigma_2}{\lambda_2} y_2 + \delta_1 F_2 + \sigma_2 F_1 \right),$$

$$\dot{V}_3 = \frac{\lambda_2}{|\sigma_1|} y_1 \left(-\frac{\delta_1}{\lambda_1} y_1 + F_1 \right) + \frac{\lambda_1}{|\sigma_2|} y_2 \left(-\frac{\delta_2}{\lambda_2} y_2 + F_2 \right).$$

Требование знакоотрицательности $\dot{V}_{1,2,3}$ для $\forall \varphi_1, \varphi_2$ приводит к следующим выражениям для $\omega_{1,2}^0$:

$$\omega_1^0 = \frac{1}{\delta_1\delta_2 - \sigma_1\sigma_2} (|\delta_2\alpha_1 - \sigma_1\nu_2| + |\delta_2\nu_1 - \sigma_1\alpha_2|),$$

$$\omega_2^0 = \frac{1}{\delta_1\delta_2 - \sigma_1\sigma_2} (|\delta_1\alpha_2 - \sigma_2\nu_1| + |\delta_1\nu_2 - \sigma_2\alpha_1|) \quad \text{при } \sigma_1\sigma_2 > 0$$

и

$$\omega_1^0 = \frac{|\alpha_1| + \nu_1}{\delta_1}, \quad \omega_2^0 = \frac{|\alpha_2| + \nu_2}{\delta_2} \quad \text{при } \sigma_1\sigma_2 < 0.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Лихарев К. К., Ульрих Б. Т. Системы с джозефсоновскими контактами. Основы теории. — М.: Гос. ун-т, 1968.
2. Системы фазовой синхронизации / Под ред. В. В. Шахгильдяна и Л. Н. Белюстиной. — М.: Радио и связь, 1982.
3. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. — М.: Физматгиз, 1959.
4. Барбашин Е. А., Табуева В. А. Динамические системы с цилиндрическим фазовым пространством. — М.: Наука, 1969.
5. Кузьмин Л. С., Лихарев К. К., Овсянников Г. А. — Радиотехника и электроника, 1981, 26, с. 1067.
6. Vargasis C., Sandell R. D., Jain A. K., Lukens J. E. — Appl. Phys. Lett., 1978, 33, p. 357.
7. Wang T. C., Gayley R. I. — Phys. Rev., 1978, В 18, p. 293.
8. Белых В. Н. Качественные методы теории нелинейных колебаний сосредоточенных систем (Учебное пособие). — Горький: Гос. ун-т, 1980.
9. Веричев Н. Н. — Радиотехника и электроника, 1986, 31, № 11, с. 2267.
10. Волосов В. М., Моргунов В. И. Метод осреднения в теории нелинейных колебаний. — М.: Гос. ун-т, 1971.
11. Белых В. Н., Некоркин В. И. — ПММ, 1975, 39, № 4, с. 642.
12. Шильников Л. П. — Матем. сб., 1967, 74, № 3, с. 378.
13. Lorenz E. — J. Atmos. Sci., 1963, 20, p. 130.
14. Афраймович В. С., Быков В. Н., Шильников Л. П. — ДАН СССР, 1977, 234, № 2, с. 336.
15. Веричев Н. Н. Межвуз. тематический сб. научн. тр. / Под ред. Е. А. Леонтович-Андроновой. — Горький, Гос. ун-т, 1984, с. 54.
16. Рабинович М. И. — УФН, 1978, 125, с. 123.

Горьковский институт
инженеров водного транспорта

Поступила в редакцию
11 августа 1986 г.,
после доработки
30 января 1987 г.

ON THE DYNAMICS OF MUTUALLY CONNECTED ROTATORS

V. N. Belykh, N. N. Verichev

The systems of interacting rotators with the wide applications are investigated. Particularly, some of the results explain onset of stochasticity of the dynamical processes in a number of physical systems.