с тем при $\gamma=2$, $\delta=7$ размерность квазипериодического движения была меньше размерности фазового пространства. Наличие аналогичной ситуации можно показать аналитически при $\gamma\gg 1$. В этом случае движения в первом элементе приближенно описываются уравнением $\dot{\varphi}_1=\gamma$, т. е. $\varphi_1=\gamma t$. Тогда уравнение для второго элемента имеет вид

$$\dot{\varphi}_2=\gamma - \sin\varphi_2 - \delta\sin\gamma t.$$

Как известно [9], у этого уравнения существуют как рациональные, так и иррациональные числа вращения. В первом случае имеет место периодическое движение — аттрактор имеет размерность, меньшую, чем размерность фазового пространства.

В заключение заметим, что нетипичный для динамических систем аттрактор — многомерное (больше трех) квазипериодическое движение — существует в системе (2), по-видимому, в силу ее специфики — сильной диссипативности и периодичности по всем фазовым переменным.

Автор выражает благодарность М. И. Рабиновичу и В. Д. Шалфееву за постановку задачи и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гапонов-Грехов А. В, Рабинович М. И., Старобинец И. М.—Письма в ЖЭТФ, 1984, **39**, вып. 12, с. 561.
2. Арансон И. С., Гапонов-Грехов А. В., Рабинович М. И., Старобинец И. М. — ЖЭТФ, 1986, **90**, вып. 5, с. 1707.
3. Анищенко В. С., Арансон И. С., Постнов Д. Э., Рабинович М. И.— ДАН СССР, 1986, **286**, № 5, с. 1120.
4. Кузнецов С. П., Пиковский А. С. — Изв вузов — Радиофизика, 1985, **28**, № 3, с. 308.
5. Афраймович В. С., Рабинович М. И., Сбитнев В. И. — Письма в ЖТФ, 1985, **11**, вып. 6, с. 338.
6. Лихтенберг А., Либерман М. Регулярная и стохастическая динамика. / Пер. с англ. — М.: Мир, 1984. — 528 с.
7. Рабинович М. И., Трубецков Д. И. Введение в теорию колебаний и волн. — М.: Наука, 1985. — 432 с.
8. Системы фазовой синхронизации / Под ред. В. В. Шахгильдяна и Л. Н Белюстиной. — М.: Радио и связь, 1982. — 288 с.
9. Лихарев К. К., Ульрих Б. Г. Системы с джозефсоновскими контактами. — М.: Гос. ун-т, 1978. — 446 с.
10. Grassberger P., Procaccia I. — Physica D, 1983, **9**, p. 189.
11. Bondenson A., Ott E., Antonsen T. M. — Phys. Rev. Lett., 1985, **55**, № 20, p. 2103.

Научный совет АН СССР
по комплексной проблеме
«Кибернетика»

Поступила в редакцию
4 января 1987 г.

УДК 530 1

КВАЗИОДНОРОДНЫЕ СТОХАСТИЧЕСКИЕ ДВИЖЕНИЯ И ИХ РАЗРУШЕНИЕ В СИСТЕМЕ СВЯЗАННЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ

В В. Астахов, Б. П. Безручко, В. И. Пономаренко, Е. П. Селезнев

1. Диссипативно связанные нелинейные динамические системы со странным аттрактором (СА) могут демонстрировать в зависимости от степени их идентичности полностью или почти одинаковые (однородные или квазиоднородные) стохастические движения [1–3]. В настоящем сообщении приводятся результаты экспериментального исследования колебательных режимов системы двух связанных нелинейных осцилляторов. Показана возможность существования в ней стохастических колебаний различной степени однородности. Изучена структура разбиения плоскости управляющих параметров на области характерных движений и переходы между ними, рассмотрено влияние неидентичности подсистем.

2. Исследуемая система представляла собой два радиотехнических колебательных контура с нелинейной емкостью и проводимостью, характерными для p—n-перехода [4]. Подсистемы возбуждались синфазно через развязывающие усилители гармоническим сигналом от общего внешнего генератора. Взаимная диссипативная связь осуществлялась с помощью резистора с регулируемым сопротивлением R, включенным между идентичными точками контуров. Подробная информация о динамике одиночного контура, подобного контурам, исследуемым в экспериментальной системе, имеется

в [5], где проведен анализ его поведения в пространстве трех параметров: амплитуды U, частоты f_0 внешнего гармонического воздействия и уровня диссипации. Динамика связанной системы исследовалась нами при фиксированном значении f_0, близком к частоте линейного резонанса, в зависимости от U и коэффициента связи $K=1/R$. Полная идентичность подсистем в эксперименте невозможна, поэтому, кроме подбора элементов контуров с близкими параметрами, при необходимости производилась подстройка уровня диссипации в одном из контуров Критерием идентичности служила близость временных реализаций и бифуркационных значений U в первом и втором контурах (U_1 и U_2) в отсутствие связи. Например, после подстройки критических значений $U_1^c=U_2^c=U^c$, соответствующих переходу к хаосу через последовательность удвоений периода колебаний, бифуркационные значения U, при которых появляются субгармоники $f_0/8$, отличались для подсистем не более чем на 2%. В эксперименте регистрировались временные реализации, спектры мощности, проекции фазовых портретов и стробоскопические сечения колебаний в подсистемах $x_1(t), x_2(t)$ и на элементе связи ($x_1—x_2$). Режимы, для которых $x_1—x_2\approx 0$, а проекция фазового портрета на плоскость x_1, x_2 близка к биссектрисе, классифицировались как квазиоднородные, другие колебательные режимы — как неоднородные. Примеры квазиоднородного и неоднородных режимов для случая колебаний с периодом $8T_0$ ($T_0=1/f_0$ — период внешнего воздействия) приведены на рис. 1а и рис. 1б—г.

3. На рис. 2 изображена структура разбиения плоскости параметров $U—K$ на характерные колебательные режимы. Ее удобно представить состоящей из нескольких листов: А, Б, В, Г, ... (рис. 2). Лист А соответствует различным регулярным и стохастическим квазиоднородным режимам. Здесь с ростом амплитуды внешнего воздействия наблюдается последовательность бифуркаций удвоения периода, завершающаяся на линии l^c возникновением квазиоднородного хаоса. Области периодических колебаний отмечены на рис. 2 цифрами, соответствующими их периоду в единицах T_0. В закритической области значений параметров ($U>U^c$) на этом листе квазиоднородный хаос эволюционирует в соответствии с закономерностями фейгенбаумовского СА. При удалении от линии l^c на листе А имеются «окна устойчивости» квазиоднородных регулярных режимов*. Области хаоса на рисунке заштрихованы. С уменьшением K при закритических $U>U^c$ на линии l_b происходит разрушение квазиоднородного хаоса. Степень неоднородности нарастает мягким образом: при неизменном спектре плавно расширяется линия «биссектрисы» проекции фазового портрета (рис. 1д), увеличивается размах выбросов в реализации $x_1—x_2$. Дальнейший уход по параметрам от линии l_b приводит к перескоку с края листа А на один из листов Б, В или Г в зависимости от местонахождения исходной точки на листе А.

Листы Б, В и Г (рис. 2б—г) соответствуют неоднородным колебательным режимам. На них наблюдаются регулярные и стохастические движения. Переход от периодических колебаний к хаосу происходит через последовательность удвоений, однако наименьший из периодов циклов в этой последовательности на поверхности Б равен $2T_0$, на В—$4T_0$, на Г—$8T_0$, и сами циклы, на базе которых происходят удвоения и рождается СА, качественно отличаются по своему виду (см., соответственно, рис. 1б—г). С правого и нижнего края листов Б, В, Г, отмеченных на рис. 2д штриховыми линиями, система перескакивает на лист А. При увеличении U происходит жесткий переход с Г на В и с В на Б. Кроме отмеченных режимов и переходов в узких интервалах параметров вблизи линии удвоения цикла периода 2 на листе Б, 4 — на В и 8— на Г (области M на рис 2б—г) имели место квазипериодические движения. На листах, соответствующих неоднородным колебаниям в закритической области, наблюдаются режимы, которые по фазовым портретам, реализациям и спектрам можно классифицировать как перемежаемость хаос $\rightleftarrows$ хаос (двойная штриховка).

Сравнение $x_1(t)$ и $x_2(t)$ показывает, что колебания в подсистемах сдвинуты друг относительно друга на листе Б на T_0, на В — $2T_0$ и на Г—$4T_0$. С увеличением временного сдвига уменьшаются размеры области параметров существования колебаний данного вида. Однако можно предположить, что при совершенствовании эксперимента или использовании численного моделирования в структуре разбиения плоскости параметров исследуемой системы обнаружится еще множество листов, на которых временные сдвиги между колебаниями подсистем равны $8T_0$, $16T_0$ и т. д., а минимальный период цикла последовательности удвоений — $16T_0$, $32T_0$ и т. д.

4. Рассмотрим, как изменяется разбиение плоскости параметров, если производить подстройку идентичности колебаний в контурах при $K=0$ для каждого U. После такой процедуры система приближается к идеализированной ситуации идентичных подсистем. Дополнительная подстройка приводит к следующим изменениям картины на рис. 2, полученной для $U_1^c=U_2^c=U^c$: 1) исчезают зоны нарушения однородности периодических колебаний при $U<U^c$ и малых K, выделенные на рис. 2а штрихпунктиром; 2) «окна устойчивости» в закритической области квазиоднородных колебаний продолжаются влево и простираются узкими полосами далеко за отмеченный на рис. 2а край на листе А, наблюдаемое их число увеличивается. В результате граница листа А и линия l_b становятся сильно изрезанными, а структура листа А — качественно более схожей с полученной для связанных одномерных отображений в работе [3]; 3) зона M квазипериодических движений на листе Б (рис. 2б) расширяется и разделяет

* Наблюдаемая картина в общих чертах аналогична описанной в теоретической работе [3].

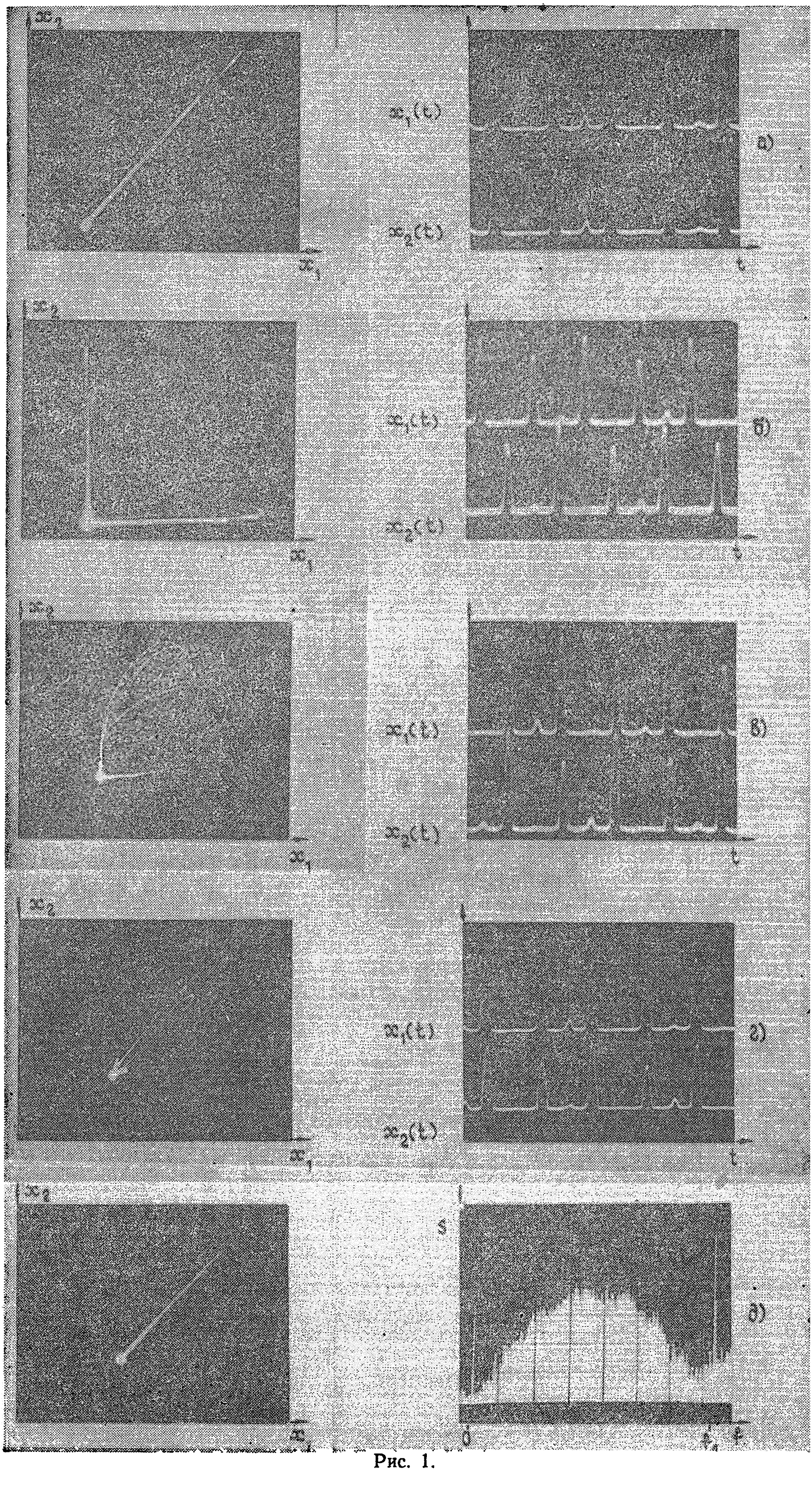

Рис. 1.

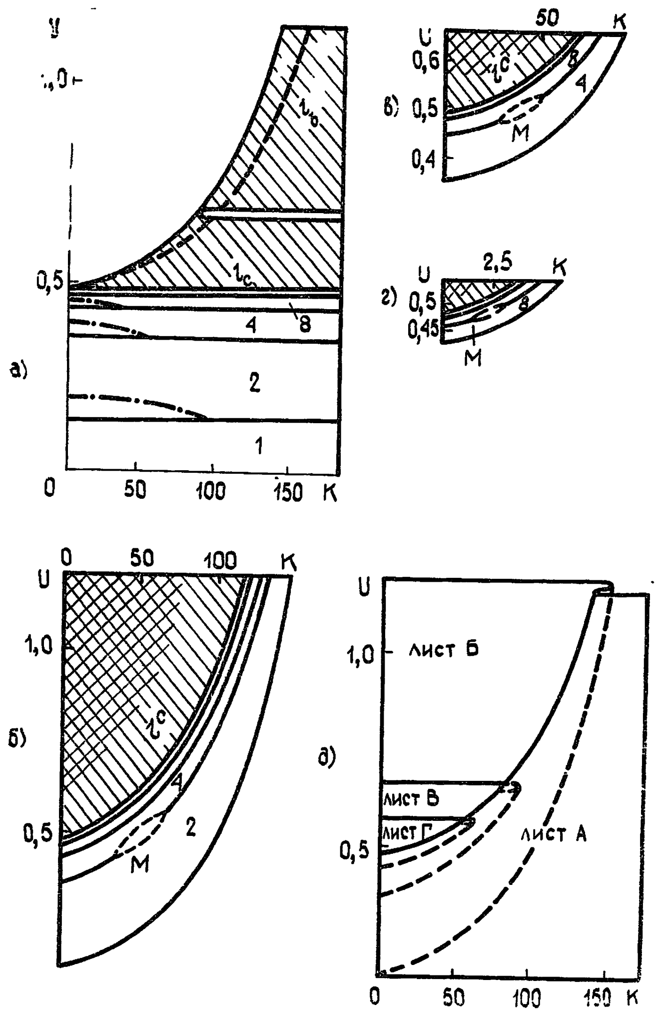

Рис. 2.

области существования циклов периода 2 и 4. При этом цикл периода 4 возникает в результате синхронизации движения на торе. Аналогичные области возникают перед удвоением циклов периода 4 и 8 на листах В и Г соответственно.

Что касается общих закономерностей в структуре пространства параметров системы, а также сценариев перехода к хаосу, то они оказываются достаточно грубыми и не меняются при дополнительной подстройке.

5. Проведенное экспериментальное исследование расширяет существующие представления о поведении диссипативно связанных систем; это, в первую очередь, касается неоднородных колебательных режимов — динамики на листах Б, В, Г пространства параметров. Полученная информация, в частности, позволяет предположить наличие скейлинговых закономерностей неоднородных режимов.

В заключение выражаем признательность С. П. Кузнецову, А. С. Пиковскому и В. С. Афраймовичу за полезное обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Афраймович В. С., Веричев Н. Н., Рабинович М. И. — Изв. вузов — Радиофизика, 1986, 29, № 9, с. 1050.
2. Pikovsky A. S. — Z. Phys. B, 1984, 55, p. 149
3. Кузнецов С. П. — Изв. вузов — Радиофизика, 1985, 28. № 8, с. 991.
4. Linsay P. S. — Phys. Rev. Lett., 1981, 47, № 19, p. 1349.
5. Астахов В. В., Безручко Б. П., Селезнев Е. П. — Радиотехника и электроника, 1987, 32, № 12, с. 2558.

Саратовский филиал
Института радиотехники и электроники
АН СССР

Поступила в редакцию
20 апреля 1987 г.