ЛИТЕРАТУРА

1. Гинзбург В. Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. — М.: Наука, 1967. — 683 с.
2. Кераблай Т. С., Ковалевская Е. М. О траекториях коротких радиоволн в ионосфере. — М., Наука, 1974. — 160 с.
3. Альперт Я. Л. Распространение электромагнитных волн и ионосфера. — М.: Наука, 1972—563 с.

Казанский государственный университет

Поступила в редакцию 5 марта 1987 г.

УДК 621.373.12.532

О РАЗВИТИИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ ПО ЛАНДАУ В ДИСКРЕТНОЙ МОДЕЛИ ПОТОКОВЫХ СИСТЕМ

Г. В. Осипов

Сравнительно недавно появились работы, посвященные изучению природы и механизмов пространственного развития турбулентности в потоковых диссипативных системах [1–5]. Первые результаты по этому вопросу получены в [1], где численно обнаружены пространственные бифуркации развития хаоса в цепочке однонаправленно связанных генераторов. Периодический в начале цепочки режим с ростом номера генератора сменялся квазипериодическим, который, в свою очередь, переходил в режим хаотических колебаний. В [2] этому механизму пространственного развития турбулентности дано аналитическое доказательство. В [2, 3] приведены примеры и построена модельная теория пространственного развития турбулентности на основе универсального закона Фейгенбаума. Таким образом, оказалось, что два из нескольких известных сценариев возникновения стохастичности при изменении управляющего параметра в сосредоточенных системах [6, 7] реализуются и при пространственном развитии турбулентности (здесь роль управляющего параметра играет пространственная координата вдоль цепочки).

В настоящей работе приводится пример, который демонстрирует реализацию в пространстве сценария развития турбулентности по Ландау—Хопфу, — вдоль цепочки структур происходит постепенное усложнение движения за счет появления новых несоизмеримых с предыдущими частот и нарастание таким образом размерности квазипериодического движения.

Исходной моделью служит цепочка однонаправленно связанных ротаторов с сильной диссипацией, описываемая системой обыкновенных дифференциальных уравнений маятникового типа с учетом связи:

$$\ddot{\varphi}_j+\lambda\dot{\varphi}_j=\gamma-\sin\varphi_j-\delta\sin\varphi_{j-1},\qquad j=\overline{1,N},\qquad \varphi_0(t)\equiv 0, \tag{1}$$

φ_j — фазовая переменная, γ, λ — параметры точечной системы, δ — параметр связи.

Подчеркнем, что изучение системы (1) представляет самостоятельный интерес для теории систем фазовой синхронизации [8], связанных джозефсоновских контактов [9] и др.

При больших λ (что аналогично большой вязкости) движения в системе (1) разделяются на быстрые и медленные, причем произвольные медленные движения устойчивы и описываются системой

$$\dot{\varphi}_j=\gamma-\sin\varphi_j-\delta\sin\varphi_{j-1},\quad j=\overline{1,N}. \tag{2}$$

Ввиду периодичности φ_j ($\varphi_j\in(0,2\pi]$) фазовое пространство системы (2) и N-мерный тор.

Отметим, что возникновение хаоса в цепочечных структурах, рассматривавшихся в [1–3], связано с тем, что в испытывающем воздействие со стороны соседа точечном элементе, имеющем при этом четырехмерное фазовое пространство, существуют стохастические движения. Специфика цепочечной структуры, динамика которой подчиняется системе (2), состоит в том, что точечные элементы, описываемые (2) при фиксированных j ($j\neq 1$), имеют двумерное фазовое пространство, в котором невозможно существование стохастических движений. Учитывая этот факт и то, что в силу однонаправленности связи добавление новой координаты j в системе (2) не ведет к изменению аттракторов в фазовом пространстве $(j-1)$-мерной системы, заключаем, что хаос в рассматриваемой цепочечной структуре не возникает. При небольших λ хаос в системе (1) наблюдался при численном эксперименте.

Для того чтобы понять, что в системе (2) представляют собой установившиеся движения и как они изменяются с увеличением номера j, выясним, какие вообще движения возможны в системе (2) фиксированной размерности при изменении параметров γ или δ.

Пусть значения γ и δ таковы, что $\gamma_j \equiv |\gamma - \delta \sin \varphi_{j-1}| < 1$, $j=\overline{1,N}$. Тогда во всех N элементах цепочки наступает стационарный режим, которому в N-мерном фазовом пространстве соответствует единственное устойчивое состояние равновесия $O_1(\varphi_j^*)$ $(\varphi_j^*: \sin\varphi_j^* = \gamma_j,\ \varphi_j^* \in [-\pi/2, \pi/2]$ для всех $j=\overline{1,N})$. Кроме O_1 существует $2^N - 2$ седловых состояний равновесия и одно неустойчивое. При любых начальных условиях φ_j^0 ротаторы будут находиться в состоянии покоя. При увеличении γ, а именно при $\gamma = \gamma^1$ величина γ_N становится больше единицы, а остальные $\gamma_j < 1$, $j = \overline{1, N-1}$. При этом по координате φ_N происходит слияние и исчезновение состояний равновесия и рождение 2^{N-1} периодических движений, одно из которых устойчиво, одно неустойчиво и остальные седлового типа. В фазовом пространстве им соответствуют прямые линии, проходящие параллельно оси φ_N через точки, имеющие координаты состояний равновесия $(N-1)$-мерной системы. Аттрактор здесь — предельный цикл. Происходит вращение последнего в цепочке ротатора, остальные покоятся. При $\gamma = \gamma^2 > \gamma^1$ величина γ_{N-1} становится больше единицы, остальные $\gamma_j < 1$, $j = \overline{1, N-2}$. При этом по координате φ_{N-1} происходит слияние и исчезновение периодических движений и образование 2^{N-2} квазипериодических движений по φ_{N-1}, φ_N. В фазовом пространстве аттрактор — двумерное квазипериодическое движение.

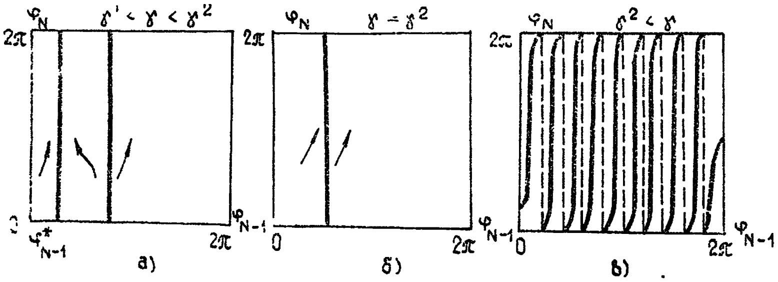

Рис. 1. а) Устойчивое и неустойчивое периодические движения. б) Полуустойчивое периодическое движение. в) Двумерное квазипериодическое движение — незамкнутая намотка на двумерном торе (показаны несколько первых витков).

На рис. 1 показан путь образования квазипериодического движения в плоскости $(\varphi_{N-1}, \varphi_N)$ при постоянных φ_j^*, $j=\overline{1, N-2}$. При $\gamma=\gamma^3$, т. е. когда γ_{N-2} становится больше единицы, сливаются и исчезают двумерные квазипериодические движения и образуется 2^{N-3} квазипериодических движений размерности три по координатам φ_{N-2}, φ_{N-1}, φ_N. При $\gamma=\gamma^K$, $K=\overline{4, N}$ происходит рождение 2^{N-K} квазипериодических движений размерности K. Таким образом, существует конечное множество значений K, при переходе через которые в сторону увеличения γ размерность аттрактора системы (2) увеличивается на единицу. При $\gamma > \gamma^N$ в N-мерном фазовом пространстве аттрактором служит незамкнутая намотка на N-мерном торе. В реальной системе (цепочке связанных ротаторов) каждый из ротаторов вращается с отличной от других, рационально несоизмеримой с остальными частотой. Показанный путь развития аттракторов в системе (2) при фиксированном числе элементов при изменении параметра γ не является единственным.

Из приведенного анализа можно предложить сценарий последовательного превращения аттракторов в системе (2) с ростом номера j: добавление нового элемента в системе (2) приводит к возникновению новой, рационально несоизмеримой с предыдущими частоты периодического изменения координаты φ_j — происходит нарастание размерности квазипериодического движения. Если бы $N \to \infty$, то образом установившегося в такой полубезграничной системе режима явилось бы бесконечномерное квазипериодическое движение. В силу сильной диссипации в цепочке не происходит полной синхронизации колебаний — исчезновения квазипериодического движения и установления периодического движения. Математически этот факт можно объяснить тем, что если в двумерной системе существует квазипериодическое движение, то вследствие того, что с ростом j аттрактор в $(j-1)$-мерной системе не меняется, квазипериодичность по первым двум координатам сохраняется при любых j.

Численное моделирование системы (2) при $\gamma=2$, $\delta=5$, $N=5, 10, 20$ показало существование в фазовом пространстве квазипериодических движений размерности N. Определение размерности проводилось с помощью метода Грассбергера—Прокаччиа [10]. Для системы (2) при $N=20$ для получения величины корреляционной размерности с точностью $\pm 0{,}2$ потребовалась временная реализация переменной $\varphi_{20}(t)$ длиной 200000 точек. Усложнение движений в цепочке, описываемой (2), с ростом числа взаимодействующих ротаторов четко прослеживается на рис. 2, где представлены спектры аттракторов в элементах цепочки для возрастающих значений j. Как видно из рисунка, аттракторы в элементах, начиная с третьего, имеют практически сплошной спектр, что характерно для «геометрических странных аттракторов» [11]. Вместе

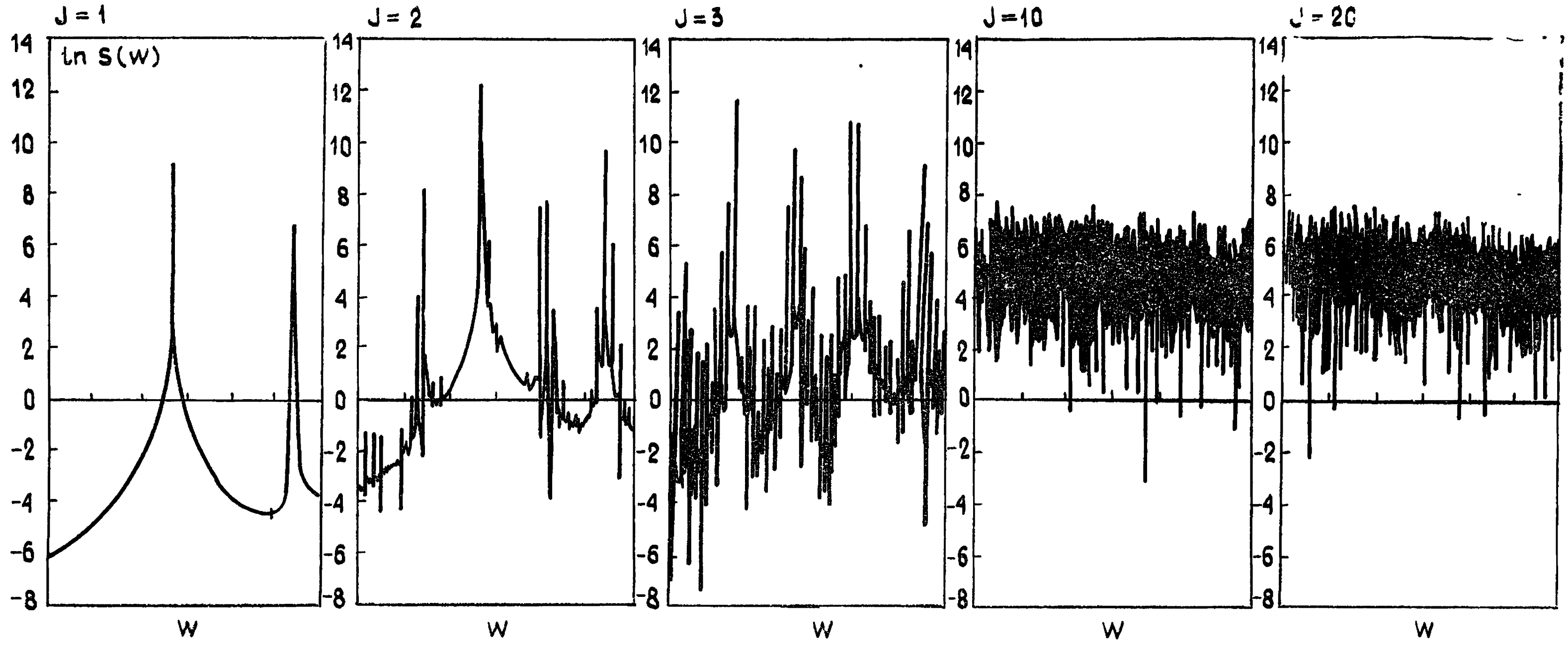

Рис. 2.

с тем при $\gamma=2$, $\delta=7$ размерность квазипериодического движения была меньше размерности фазового пространства. Наличие аналогичной ситуации можно показать аналитически при $\gamma \gg 1$. В этом случае движения в первом элементе приближенно описываются уравнением $\dot{\varphi}_1=\gamma$, т. е. $\varphi_1=\gamma t$. Тогда уравнение для второго элемента имеет вид

$$\dot{\varphi}_2=\gamma - \sin\varphi_2 - \delta \sin \gamma t.$$

Как известно [9], у этого уравнения существуют как рациональные, так и иррациональные числа вращения. В первом случае имеет место периодическое движение — аттрактор имеет размерность, меньшую, чем размерность фазового пространства.

В заключение заметим, что нетипичный для динамических систем аттрактор — многомерное (больше трех) квазипериодическое движение — существует в системе (2), по-видимому, в силу ее специфики — сильной диссипативности и периодичности по всем фазовым переменным.

Автор выражает благодарность М. И. Рабиновичу и В. Д. Шалфееву за постановку задачи и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гапонов-Грехов А. В, Рабинович М. И., Старобинец И. М.—Письма в ЖЭТФ, 1984, **39**, вып. 12, с. 561.
2. Арансон И. С., Гапонов-Грехов А. В., Рабинович М. И., Старобинец И. М. — ЖЭТФ, 1986, **90**, вып. 5, с. 1707.
3 Анищенко В. С., Арансон И. С., Постнов Д. Э., Рабинович М. И.— ДАН СССР, 1986, **286**, № 5, с. 1120.
4. Кузнецов С. П., Пиковский А. С. — Изв вузов — Радиофизика, 1985, **28**, № 3, с. 308.
5. Афраймович В. С., Рабинович М. И., Сбитнев В. И. — Письма в ЖТФ, 1985, **11**, вып. 6, с. 338.
6. Лихтенберг А., Либерман М. Регулярная и стохастическая динамика. / Пер. с англ. — М.: Мир, 1984. — 528 с.
7. Рабинович М. И., Трубецков Д. И. Введение в теорию колебаний и волн. — М.: Наука, 1985. — 432 с.
8. Системы фазовой синхронизации / Под ред. В. В. Шахгильдяна и Л. Н Белюстиной. — М.: Радио и связь, 1982. — 288 с.
9. Лихарев К. К., Ульрих Б. Г. Системы с джозефсоновскими контактами. — М.: Гос. ун-т, 1978. — 446 с.
10. Grassberger P., Procaccia I. — Physica D, 1983, **9**, p. 189.
11. Bondenson A., Ott E., Antonsen T. M. — Phys. Rev. Lett., 1985, **55**, № 20, p. 2103.

Научный совет АН СССР
по комплексной проблеме
«Кибернетика»

Поступила в редакцию
4 января 1987 г.

УДК 530 1

КВАЗИОДНОРОДНЫЕ СТОХАСТИЧЕСКИЕ ДВИЖЕНИЯ И ИХ РАЗРУШЕНИЕ В СИСТЕМЕ СВЯЗАННЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ

В. В. Астахов, Б. П. Безручко, В. И. Пономаренко, Е. П. Селезнев

1. Диссипативно связанные нелинейные динамические системы со странным аттрактором (СА) могут демонстрировать в зависимости от степени их идентичности полностью или почти одинаковые (однородные или квазиоднородные) стохастические движения [1-3]. В настоящем сообщении приводятся результаты экспериментального исследования колебательных режимов системы двух связанных нелинейных осцилляторов. Показана возможность существования в ней стохастических колебаний различной степени однородности. Изучена структура разбиения плоскости управляющих параметров на области характерных движений и переходы между ними, рассмотрено влияние неидентичности подсистем.

2. Исследуемая система представляла собой два радиотехнических колебательных контура с нелинейной емкостью и проводимостью, характерными для p—n-перехода [4]. Подсистемы возбуждались синфазно через развязывающие усилители гармоническим сигналом от общего внешнего генератора. Взаимная диссипативная связь осуществлялась с помощью резистора с регулируемым сопротивлением R, включенным между идентичными точками контуров. Подробная информация о динамике одиночного контура, подобного контурам, исследуемым в экспериментальной системе, имеется