

УДК 538.571.1

ДРЕЙФ И РЕЗОНАНС СПИРАЛЬНЫХ ВОЛН В РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ВОЗБУДИМЫХ СРЕДАХ

В. А. Давыдов, В. С. Зыков, А. С. Михайлов, П. К. Бражник

В рамках кинематического подхода к описанию автоволновых процессов в возбудимых средах сформулировано понятие квазистационарного режима. Показано, что квазистационарные режимы в слабо неоднородных и нестационарных средах описывают дрейф спиральных волн. Выяснена зависимость характера дрейфа от свойств возбудимой среды.

1. Введение. Распределенная возбудимая среда состоит из связанных локально друг с другом активных элементов, способных формировать импульс в ответ на приход внешнего сигнала. Примерами таких сред являются раствор с химической реакцией Белоусова—Жаботинского, ткань сердечной мышцы, полупроводниковые распределенные системы и т. п. [1–3]. Особым типом автоволновых режимов в распределенных возбудимых средах служат вращающиеся спиральные волны. Частота однорукавных спиральных волн в безграничной среде одинакова и представляет собой фундаментальную характеристику данной возбудимой среды (см. [4, 5]). Настоящая работа посвящена рассмотрению эволюции спиральной волны при периодическом изменении со временем свойств возбудимой среды, также в пространственно неоднородных средах. Эти явления имеют место в реальных возбудимых средах. В частности, дрейф спиральной волны в неоднородной среде наблюдался в экспериментах с реакцией Белоусова—Жаботинского [10]. Численное моделирование эффекта дрейфа было начато в работах [9, 11–13]. Однако удовлетворительная количественная теория этих эффектов до настоящего времени отсутствует.

В работах [6, 7] нами был разработан кинематический подход к описанию автоволновых процессов в возбудимых средах. Согласно этому подходу волна в двухмерной среде полностью задается указанием линии ее фронта. Каждый участок фронта смещается по нормали со скоростью $V=V(k)$, определяемой кривизной фронта k на этом участке (выпуклый в направлении своего распространения фронт движется тем медленнее, чем больше его кривизна). Фронт может иметь свободный конец, который не только смещается по нормали со скоростью $V(k_0)$, где k_0 — кривизна фронта при подходе к свободному концу, но и «прорастает» или сокращается в тангенциальном направлении со скоростью $C=C(k_0)$, зависящей от кривизны фронта при подходе к свободному концу. При достаточно малых кривизнах k_0 свободный конец прорастает, при некотором критическом значении кривизны $k_0=k_{кр}$ скорость C обращается в нуль, так, что прорастание сменяется сокращением. Вблизи $k_0=k_{кр}$ приближенно можно положить $C=-\gamma[k_0-k_{кр}]$, где $\gamma>0$.

С точностью до положения на плоскости любую кривую можно задать ее натуральным уравнением $k=k(s)$, указав зависимость кривизны k от длины дуги кривой s . Если отсчитывать длину фронта от его свободного конца, то, как показано в [4, 6, 8], эволюция фронта автоволны в возбудимой среде со временем будет описываться уравнением

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \left(\int_0^s kV ds + C \right) \frac{\partial k}{\partial s} = -k^2 V - \frac{\partial^2 V}{\partial s^2}, \quad (1)$$

в котором $\dot{V} = V(k(s, t))$ и $\dot{C} = C(k(0, t))$ — известные функции.

Чтобы следить за перемещением фронта автоволны с профилем описываемым уравнением (1) на плоскости, необходимо осуществить «привязку» этого профиля к какой-либо, например декартовой, системе координат. Для этого, очевидно, достаточно указать закон движения одной какой-либо точки фронта относительно выбранной системы координат. В рассматриваемом случае этот закон удобно сформулировать для начала фронта, т. е. точки $s = 0$. При этом если $x_0(t)$ и $y_0(t)$ — координаты свободного конца, а $\alpha_0(t)$ — угол между касательным вектором к фронту в точке $s = 0$ и осью x , то они подчиняются следующим уравнениям:

$$\dot{x}_0(t) = -V(0) \sin \alpha_0(t) - C \cos \alpha_0(t), \quad (2)$$

$$\dot{y}_0(t) = V(0) \cos \alpha_0(t) - C \sin \alpha_0(t);$$

$$\dot{\alpha}_0(t) = \partial V / \partial s |_{s=0} + Ck(0), \quad (3)$$

где $V(0) = V(s = 0, t)$ и точкой обозначена производная по времени.

Стационарное решение уравнения (1) дает установившийся режим в виде спиральной волны. При этом на свободном конце кривизна $k_0 = k_{кр}$, так что он все время смещается по нормали к фронту и описывает с течением времени окружность. Внутри этой окружности (или, иначе говоря, внутри «ядра» спиральной волны) среда сохраняет состояние покоя. Частота установившегося вращения спиральной волны ω_0 найдена в [4, 6]. При линейной зависимости скорости от кривизны $V = V_0 - Dk^*$ и условии $Dk_{кр} \ll V_0$ она дается выражением

$$\omega_0 \approx 0,69 (DV_0)^{1/2} k_{кр}^{1/2}. \quad (4)$$

Профиль фронта в этом случае удовлетворяет уравнению

$$\frac{ck}{ds} \int_0^s kV ds = -k^2V + D \frac{\partial^2 k}{\partial s^2} \quad (5)$$

и имеет форму эвольвенты ядра спиральной волны за исключением малой области $s < s_0$ (погранслоя) вблизи самого ядра

$$s_0 \sim \frac{1}{k_{кр}} (Dk_{кр}/V_0)^{1/2}, \quad (6)$$

где зависимость k от s линейна, причем

$$\partial k / \partial s |_{s=0} = -\omega_0 / D. \quad (7)$$

Кроме того,

$$\partial V / \partial s |_{s=0} = \omega_0. \quad (8)$$

2. Квазистационарный режим. Для описания нестационарных эффектов в общем случае необходимо использовать исходное уравнение (1). Однако, как мы сейчас покажем, в достаточно широком интервале параметров допустимо существенное упрощение. Оно связано с возможностью разделить эффекты прорастания от эффектов установления формы фронта спиральной волны, поскольку они имеют сильно отличающиеся временные масштабы.

Допустим вначале, что прорастание отсутствует, т. е. $\gamma = 0$. Тогда имеется целый класс стационарных решений для спиральных волн, отличающихся значением кривизны k_0 на свободном конце волны; частота вращения ω связана при этом с k_0 соотношением (4), где $k_{кр}$ следует заменить на k_0 . Какое именно из стационарных решений бу-

* В моделях возбудимых сред типа Фитц—Хью—Нагумо (см. [1]) D имеет смысл коэффициента диффузии.

дет реализовано — зависит от начального условия. Процесс выхода на установившийся режим будет занимать некоторое характерное время $\tau_{\text{хар}}$, которое легко оценить, обезразмерив уравнение (1) при $C=0$ и $V=V_0-Dk$. Это дает $\tau_{\text{хар}} \approx 1/k_0 V_0$. Ему отвечает характерная длина

$$l_{\text{хар}} = (D\tau_{\text{хар}})^{1/2} \sim (D/k_0 V_0)^{1/2}. \quad (9)$$

Нетрудно заметить, что при $k_0 \sim k_{\text{кр}}$ эта характерная длина оказывается порядка ширины погранслоя (6). Заметим также, что

$$\omega_0 \tau_{\text{хар}} \sim (Dk_{\text{кр}}/V_0)^{1/2} \ll 1. \quad (10)$$

Следовательно, установление формы спиральной волны всегда происходит быстро по сравнению с периодом ее стационарной циркуляции.

Пусть теперь фронт может прорасти (или сократиться) на свободном конце, но скорость прорастания (или сокращения), определяемая величиной коэффициента γ , очень мала. Тогда реализуется квазистационарный режим. Именно форма фронта адиабатически подстраивается к значению кривизны k_0 на свободном конце, а эта кривизна, в свою очередь, очень медленно меняется за счет прорастания или сокращения.

Получим уравнение, описывающее изменение k_0 при квазистационарном режиме. Поскольку k_0 меняется лишь благодаря прорастанию (или сокращению), справедливо равенство

$$dk_0/dt = -C(\partial k/\partial s)_{s=0}. \quad (11)$$

Так как форма фронта, согласно нашему предположению, подстраивается к значению k_0 на конце волны, для производной $(\partial k/\partial s)_{s=0}$ выполняется равенство (7), где ω_0 дается выражением (4) с заменой $k_{\text{кр}}$ на k_0 . Учитывая это, находим

$$dk_0/dt = -\xi\gamma(V_0/D)^{1/2}k_0^{3/2}(k_0 - k_{\text{кр}}), \quad (12)$$

где $\xi = 0,69$.

Согласно уравнению (12) характерное время установления для кривизны k_0 равно $\tau_0 \sim D/\gamma\omega_0$. С его помощью мы можем теперь найти критерий выполнения квазистационарного режима: необходимо, чтобы время τ_0 было гораздо больше характерного времени установления формы фронта $\tau_{\text{хар}}$. Поскольку

$$\tau_{\text{хар}}/\tau_0 \sim (Dk_{\text{кр}}/V_0)^{1/2}(\gamma/D), \quad (13)$$

мы видим, что условие квазистационарного режима есть

$$\gamma/D \ll (V_0/Dk_{\text{кр}})^{1/2}. \quad (14)$$

В квазистационарном режиме уравнение (3) приобретает вид

$$\dot{\alpha}_0 = \xi(DV_0)^{1/2}k_0^{3/2} - \gamma(k_0 - k_{\text{кр}})k_0. \quad (15)$$

Заметим, наконец, что при $\gamma \ll D$ справедливо неравенство $\omega_0\tau_0 \gg 1$, т. е. подстройка значения k_0 к $k_{\text{кр}}$ занимает много оборотов стационарной циркуляции. В этом случае мы будем говорить, что спиральная волна имеет высокую инерционность. При выполнении обратного неравенства

$$1 \ll \gamma/D \ll (V_0/Dk_{\text{кр}})^{1/2}$$

подстройка осуществляется за время, большее $\tau_{\text{хар}}$, но малое по сравнению со временем одного оборота спиральной волны (это случай малой инерционности).

3. Резонанс спиральных волн. Пусть свойства возбудимой среды периодически меняются со временем с частотой ω_1 , близкой к собственной частоте ω_0 спиральных волн. Мы ограничимся случаем измене-

ния критической кривизны $k_{кр}$, считая, что скорость V_0 и другие параметры от времени не зависят. Мы полагаем

$$k_{кр}(t) = \bar{k}_{кр} + k_1 \cos(\omega_1 t + \varphi), \quad k_1 \ll \bar{k}_{кр}. \quad (16)$$

Картина явления будет существенно зависеть от того, какова инерционность спиральной волны. Рассмотрим вначале случай высокой инерционности (отношение γ/D при этом мало).

Периодическое изменение со временем критической кривизны приводит к периодическому прорастанию и сокращению свободного конца волны, сопровождающемуся периодическим изменением кривизны k_0 на свободном конце. Оба эти эффекта ведут к периодическому изменению угловой скорости (15). Прорастание (или сокращение) свободного конца, наряду с модуляцией угловой скорости вращения, вызовет, согласно (2), движение центра спиральной волны.

В рассматриваемом случае, когда γ/D мало, естественно ожидать, что амплитуда колебаний k_0 будет пропорциональна малому параметру γ/D . Поэтому в формуле (15) можно пренебречь изменением k_0 со временем и положить $k_0 = k_{кр}$. Поскольку скорость прорастания C уже пропорциональна малому параметру γ/D , в формулу (11) следует подставить $(\partial k / \partial s)_{s=0} = -\omega_0/D$, где $\bar{\omega}_0$ определяется выражением (4) при $k_{кр} = \bar{k}_{кр}$. Интегрируя затем равенство (11) находим

$$\bar{k}_0 = \bar{k}_{кр} + (\gamma/D) (\bar{\omega}_0/\omega_1) k_1 \sin(\omega_1 t + \varphi). \quad (17)$$

Зная зависимость кривизны на свободном конце от времени, мы можем воспользоваться затем формулами (4) и (15). Из уравнения (15) тогда следует

$$\alpha_0 = \bar{\omega}_0 t - \frac{3}{2} \left(\frac{k_1}{k_{кр}} \right) \left(\frac{\gamma}{D} \right) \cos(\omega_1 t + \varphi) + \frac{\gamma k_1 \bar{k}_{кр}}{\omega_1} \sin(\omega_1 t + \varphi). \quad (18)$$

Здесь учтено неравенство $|\omega_1 - \bar{\omega}_0| \ll \bar{\omega}_0$ и сохранены лишь члены, линейные по γ и k_1 . Подставляя (18) в (2) и усредняя по периоду быстрых колебаний, получим следующие уравнения, определяющие за кон движения центра спиральной волны:

$$\bar{x}_0(t) = \frac{3}{4} V_0 \left(\frac{\gamma}{D} \right) \left(\frac{k_1}{k_{кр}} \right) \cos[(\omega_1 - \bar{\omega}_0)t + \varphi + \theta], \quad (19)$$

$$\bar{y}_0(t) = -\frac{3}{4} V_0 \left(\frac{\gamma}{D} \right) \left(\frac{k_1}{k_{кр}} \right) \sin[(\omega_1 - \bar{\omega}_0)t + \varphi + \theta],$$

где $\theta = \arcsin((2/3)\bar{k}_{кр}^2 D/\omega_1) \ll 1$ и отброшены слагаемые первой степени по γ , но малые в силу условия $D\bar{k}_{кр} \ll V_0$. Таким образом, центр ядра спиральной волны движется по окружности радиуса

$$\rho = \frac{3}{4} \frac{V_0}{|\omega_1 - \bar{\omega}_0|} \left(\frac{\gamma}{D} \right) \left(\frac{k_1}{k_{кр}} \right). \quad (20)$$

В случае резонанса ($\omega_1 = \bar{\omega}_0$) центр ядра смещается по прямой, угол которой с осью X определяется фазой $\varphi + \theta$.

Пусть теперь инерционность волны мала, т. е. γ/D велико. Как уже говорилось выше, при этом можно считать, что кривизна фронта k_0 на свободном конце быстро подстраивается к мгновенному значению критической кривизны, т. е. $k_0 = k_{кр}(t)$. В этом случае скорость прорастания C можно найти из уравнения (11), учитывая [7]:

$$C = -k_1 D (\omega_1/\bar{\omega}_0) \sin(\omega_1 t + \varphi). \quad (21)$$

Подставляя (4) и (21) в (3) и сохраняя лишь члены главного порядка по k_1 , получаем

$$\dot{\alpha}_0 = \bar{\omega}_0 + (3/2)\bar{\omega}_0(k_1/\bar{k}_{кр}) \cos(\omega_1 t + \varphi) - k_1 D\bar{k}_{кр} \sin(\omega_1 t + \varphi). \quad (22)$$

Интегрируя (22) и подставляя $\alpha_0(t)$ в (2), получим с точностью до первого порядка по k_1 и с учетом условий $D\bar{k}_{кр} \ll V_0$, $k_1 \ll \bar{k}_{кр}$

$$\dot{x}_0(t) = -V_0 \sin \left[\bar{\omega}_0 t + \frac{3}{2} \left(\frac{k_1}{\bar{k}_{кр}} \right) \left(\frac{\bar{\omega}_0}{\omega_1} \right) \sin(\omega_1 t + \varphi + \theta) \right], \quad (23)$$

$$\dot{y}_0(t) = V_0 \cos \left[\bar{\omega}_0 t + \frac{3}{2} \left(\frac{k_1}{\bar{k}_{кр}} \right) \left(\frac{\bar{\omega}_0}{\omega_1} \right) \sin(\omega_1 t + \varphi + \theta) \right].$$

Разлагая правые части этих уравнений в ряд по k_1 и ограничиваясь, как и прежде, членами первого порядка, получим, усреднив по периоду быстрых колебаний,

$$\bar{x}_0(t) = -\frac{3}{4} V_0 \left(\frac{k_1}{\bar{k}_{кр}} \right) \sin [(\omega_1 - \bar{\omega}_0)t + \varphi + \theta], \quad (24)$$

$$\bar{y}_0(t) = -\frac{3}{4} V_0 \left(\frac{k_1}{\bar{k}_{кр}} \right) \cos [(\omega_1 - \bar{\omega}_0)t + \varphi + \theta].$$

Таким образом, центр ядра спиральной волны движется со временем по окружности радиуса

$$\rho = \frac{3}{4} \frac{V_0}{|\omega_1 - \bar{\omega}_0|} \left(\frac{k_1}{\bar{k}_{кр}} \right). \quad (25)$$

При точном резонансе ($\omega_1 = \bar{\omega}_0$) центр ядра смещается со временем по прямой линии со скоростью $(3/4)V_0(k_1/\bar{k}_{кр})$, а направление движения вновь определяется значением фазы $\varphi + \theta$.

Сравнивая выражения (20) и (25), можно сделать вывод, что радиус окружности, вдоль которой вращается центр спиральной волны, возрастает с увеличением параметра γ , достигая при $\gamma \gg D$ максимального значения (25). Заметим также, что вращение идет по часовой стрелке при $\omega_1 > \bar{\omega}_0$ и против часовой — при $\omega_1 < \bar{\omega}_0$.

4. Дрейф спиральной волны. Допустим теперь, что критическая кривизна возбудимой среды меняется вдоль оси X по закону

$$k_{кр}(x) = \bar{k}_{кр} + bx, \quad (26)$$

причем это изменение достаточно плавное: $dk_{кр}/dx = b \ll \bar{k}_{кр}/R_0$, где $R_0 = V_0/\bar{\omega}_0$ — радиус ядра спиральной волны. Ниже будет показано, что в этом случае центр спиральной волны смещается под некоторым углом к оси X , т. е. происходит дрейф спиральной волны в среде.

При движении в неоднородной среде свободный конец спиральной волны последовательно проходит через области с различными значениями $k_{кр}$. Поэтому свободный конец движется так, как если бы критическая кривизна менялась со временем по определенному закону. Этот закон легко получить, учитывая, что неоднородность является слабой.

Невозмущенное движение свободного конца происходит по окружности радиуса R_0 с угловой скоростью $\bar{\omega}_0$, так что $x_0 = R_0 \cos \bar{\omega}_0 t$. В силу этого мы имеем

$$k_{кр}(t) = \bar{k}_{кр} + bR_0 \cos \bar{\omega}_0 t. \quad (27)$$

Таким образом, задача о дрейфе спиральной волны полностью сводится к рассмотренной в предыдущем разделе задаче о резонансе при $\omega_1 = \bar{\omega}_0$, $\varphi = 0$ и $k_1 = bR_0$. Это означает, что центр спиральной волны будет смещаться со временем вдоль прямой линии под некоторым углом к направлению градиента $k_{кр}$. В случае высокой инерционности скорости дрейфа вдоль осей X и Y даются выражениями

$$\bar{x}_0(t) = \frac{3}{4} \left(\frac{\gamma}{D} \right) \left(\frac{bR_0}{\bar{k}_{кр}} \right) V_0, \quad \bar{y}_0(t) = -\frac{1}{2} \left(\frac{\gamma}{D} \right) \left(\frac{bR_0}{\bar{k}_{кр}} \right) \left(\frac{D\bar{k}_{кр}}{V_0} \right) V_0 R_0 \bar{k}_{кр}. \quad (28)$$

Учитывая, что $D\bar{k}_{кр} \ll V_0$ и $R_0\bar{k}_{кр} \sim (V_0/D\bar{k}_{кр})^{1/2}$, мы видим, что дрейф происходит преимущественно вдоль оси X в направлении градиента $k_{кр}$.

При малой инерционности скорости дрейфа по осям таковы:

$$\bar{x}_0(t) = -(1/2) (bR_0/\bar{k}_{кр}) V_0 \bar{k}_{кр} R_0 (D\bar{k}_{кр}/V_0), \quad \bar{y}_0(t) = -\frac{3}{4} \left(\frac{bR_0}{\bar{k}_{кр}} \right) V_0. \quad (29)$$

Отсюда следует, что в случае малой инерционности в отличие от (28) дрейф спиральной волны происходит преимущественно перпендикулярно градиенту $k_{кр}$.

Заметим, что направление дрейфа вдоль оси X остается неизменным, а направление дрейфа вдоль оси Y меняется на обратное при изменении направления вращения спиральной волны. Формулы (28) и (29) отвечают волне, вращающейся против часовой стрелки.

Как видно из (28) и (29), направления дрейфа спиральной волны в случае большой и в случае малой инерционности взаимно ортогональны. Следовательно, с увеличением отношения γ/D происходит поворот направления дрейфа.

В заключение этого раздела заметим, что дрейф спиральной волны не может продолжаться бесконечно долго. В среде конечных размеров волна исчезает, когда ее ядро попадает на границу. Для неограниченной среды при движении волны в сторону меньших значений $k_{кр}$ радиус ее ядра возрастает; формально он равен бесконечности при $k_{кр} = 0$. При достижении этой области решение в виде спиральной волны теряется — свободный конец волны сокращается и уходит на бесконечность. Если волна дрейфует в направлении роста $k_{кр}$, то она также исчезает с течением времени, поскольку при слишком больших $k_{кр}$ решения в виде спиральной волны также не существует. В обоих предельных случаях развитая выше линейная теория дрейфа несправедлива. Если радиус ядра R_0 очень велик, то становятся большими нелинейные эффекты. С другой стороны, при очень больших $k_{кр}$ (и малых R_0) неприменимо само кинематическое описание. В этом смысле построенное решение необходимо рассматривать как промежуточную асимптотику. Подчеркнем, однако, что в имеющихся экспериментах с химической реакцией Белоусова—Жаботинского, а также в численных экспериментах размеры среды всегда не очень велики: дрейфуя с постоянной скоростью, спиральная волна попадает обычно на границу и там исчезает. Для описания таких экспериментов достаточно построенной нами линейной теории.

5. Результаты вычислительных экспериментов. Явления резонанса и дрейфа спиральных волн исследовались нами в вычислительных экспериментах на модели возбудимой среды, описываемой уравнениями типа Фитц—Хью—Нагумо:

$$\partial E/\partial t = D\Delta E + F(E) - g, \quad \partial g/\partial t = \varepsilon_R [k_g E - g]. \quad (30)$$

Кусочно-линейная функция $F(E)$ определялась следующим образом:

$$F(E) = \begin{cases} -k_l E & \text{при } E < \sigma \\ k_f(E-a) & \text{при } \sigma \leq E \leq 1-\sigma \\ k_p(1-E) & \text{при } 1-\sigma < E \end{cases} \quad (31)$$

где $k_l = \frac{a-\sigma}{\sigma} k_f$, $k_p = \frac{1-\sigma-a}{\sigma} k_f$, а параметр ϵ_k меняется в зависимости от знака производной $\partial g/\partial t$,

$$\epsilon_k = \begin{cases} \epsilon & \text{при } \partial g/\partial t \geq 0 \\ k_e \epsilon & \text{при } \partial g/\partial t < 0 \end{cases} \quad (32)$$

Расчеты проводились при значениях коэффициентов: $k_f=1,7$, $k_g=2$, $a=0,1$, $k_e=6$, $\sigma=0,01$, $D=1$. Шаги разностной схемы по пространству $h=0,6$ по времени $\Delta t=0,03$. Размер среды 45×45 .

Нуль-изоклины системы (30) при отсутствии диффузии ($D=0$) приведены на рис. 1. Точка A соответствует устойчивому положению равновесия системы (30). Если внешнее воздействие, отклоняющее изображающую точку от положения

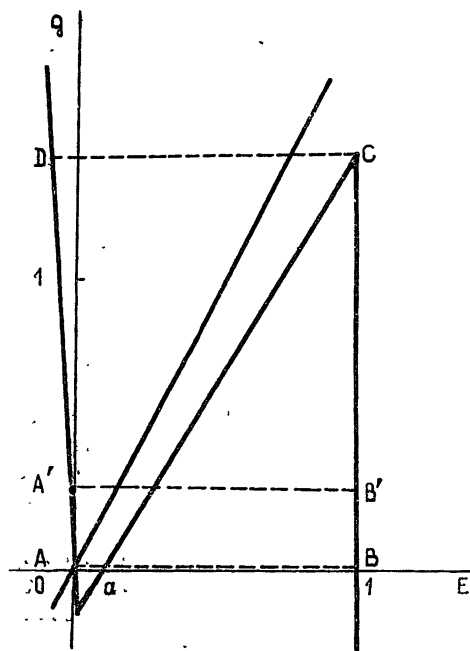


Рис. 1.

ображающую точку от положения равновесия, превышает пороговое значение, то в системе генерируется импульс возбуждения. Траектория изображающей точки системы в процессе генерации импульса (при $\epsilon \ll 1$) схематично изображена на рис. 1. Участки AB и CD соответствуют переднему и заднему фронтам импульса. Относительно медленное движение по участку BC соответствует фазе возбуждения, а возврат в исходное состояние системы описывается участком DA . Если повторное возбуждение системы производится через конечный интервал времени T , то изображающая точка не успевает возвратиться в положение равновесия и переход в возбужденное состояние происходит вдоль отрезка $A'B'$. Поэтому параметры импульса, генерируемого системой,

вообще говоря, зависят от периода возбуждения. Однако время движения изображающей точки по участку DA можно сделать достаточно малым за счет увеличения значения параметра k_e . Благодаря этому в достаточно широком диапазоне частот параметры импульса при периодическом возбуждении практически не будут отличаться от параметров одиночного импульса.

Исходя из этих соображений величина параметра k_e была выбрана с тем расчетом, чтобы скорость распространения последовательности импульсов, следующих с частотой циркуляции спиральной волны, практически не отличалась от скорости распространения одиночного импульса. В силу этого можно считать, что скорость распространения волны возбуждения в используемой модели зависит только от кривизны ее фронта, что соответствует условиям проведенного выше теоретического рассмотрения.

Заметим, что основные характеристики возбудимой среды, использованные при теоретическом рассмотрении: скорость прямолинейного фронта V_0 и критическая кривизна k_{kp} — являются характеристиками

решения системы (30). Изменить их значения можно только посредством изменения коэффициентов модели. Такого рода зависимости для модели (30) хорошо изучены [4]. В частности, показано, что увеличение параметра ε приводит к значительному уменьшению величины $k_{кр}$, а изменение скорости распространения V_0 при этом пренебрежимо мало. В силу этого изучать влияние изменений величины $k_{кр}$ на процесс циркуляции удобно, изменяя значение параметра ε .

Явление резонанса изучалось нами в вычислительных экспериментах на приведенной модели возбудимой среды, в которой значение параметра ε изменялось по закону $\varepsilon = 0,25 + 0,01 \cdot \cos \omega_1 t$. Угловая скорость вращения спирали, измеренная для данной модели, при усредненном значении параметра $\bar{\varepsilon} = 0,25$ составляет $\omega_0 = 0,24$.

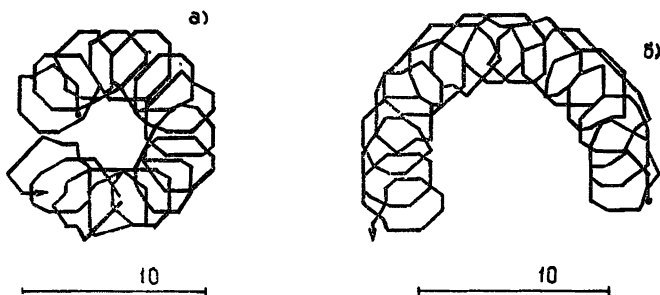


Рис. 2. Траектории конца спиральной волны при периодическом изменении свойств среды: а) $\omega_1 = 0,255$, б) $\omega_1 = 0,23$.

Данные проведенных экспериментов показывают, что при $\omega_1 > \omega_0$ центр циркуляции смещается по окружности, двигаясь по часовой стрелке (рис. 2а). При уменьшении разности $\omega_1 - \omega_0$ радиус этой окружности возрастает, а при $\omega_1 < \omega_0$ направление обхода окружности меняется на противоположное (рис. 2б). Это полностью соответствует результатам теоретического рассмотрения.

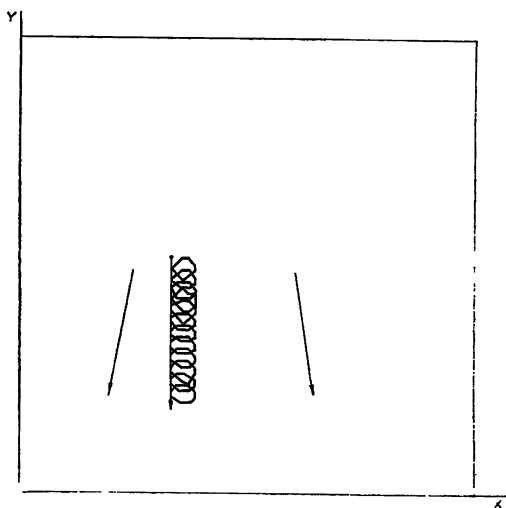


Рис. 3. Стрелками указаны направления дрейфа, соответствующие различным начальным положениям центра циркуляции. На левой границе среды $\varepsilon = 0,3$.

На рис. 3 представлена типичная траектория конца спиральной волны, полученная в вычислительном эксперименте на неоднородной возбудимой среде. Неоднородность задавалась изменением значения параметра ε вдоль оси X : $\partial\varepsilon/\partial x = -4,5 \cdot 10^{-3}$, что приводит к увеличению значения $k_{кр}$ вдоль оси X с градиентом $b = 1,45 \cdot 10^{-2}$. Величина $\bar{k}_{кр}$ обусловлена начальным положением центра циркуляции, а именно, зна-

чением параметра ε в этой точке среды. Траектория, изображенная на рис. 3, соответствует $\varepsilon=0,23$ и $\bar{k}_{кр}=0,49$. Как видно из рисунка, при этих значениях параметров дрейф спиральной волны происходит вдоль прямой, практически перпендикулярно к направлению градиента $k_{кр}$.

Однако это направление дрейфа не является единственно возможным. Так, при $\bar{\varepsilon}=0,25$ наблюдается смещение в направлении градиента ε (рис. 3) (аналогичные данные приведены в [9]), а при $\bar{\varepsilon}=0,18$ центр циркуляции смещается в направлении, противоположном градиенту ε .

Обнаруженное изменение направления дрейфа вдоль оси X соответствует данным теоретического рассмотрения и имеет принципиальное значение для исследования эволюции спиральной волны в неоднородной среде.

Действительно, смещение центра циркуляции в направлении градиента ε должно сопровождаться увеличением периода и радиуса циркуляции и скорости дрейфа. При достижении ε значения $\varepsilon_{кр}$, при котором стационарное распространение возбуждения становится невозможным, происходит срыв циркуляции (см. [9]). Если же центр циркуляции смещается ортогонально градиенту ε , то такой дрейф происходит с постоянной скоростью, неизменными радиусом и частотой циркуляции. В случае, если смещение направлено в сторону уменьшения ε , период и радиус циркуляции, а также скорость дрейфа уменьшаются.

Заметим, что при очень малых радиусах циркуляции R_0 , когда R_0 порядка ширины импульса, использованное нами кинематическое описание становится неприменимым, поскольку на распространение импульса начинает влиять «хвост» от предыдущего витка спирали. Этот случай требует дополнительного анализа.

Наличие выделенного значения $k_{кр}^*$ (и, соответственно, параметра ε^*), при котором дрейф строго ортогонален к направлению градиента, имеет важное следствие. Пусть величина $k_{кр}$ достигает этого выделенного значения при некотором $x = x^*$. Тогда, если в начальный момент времени центр спиральной волны находился в точке с координатой x , где $k_{кр} < k_{кр}^*$, то в дальнейшем спиральная волна будет смещаться в сторону уменьшения значений $k_{кр}$, т. е. в отрицательном направлении оси X . Если же начальное положение центра волны лежит правее границы $x = x^*$, то в исходный момент времени $k_{кр} > k_{кр}^*$ и последующий дрейф происходит в положительном направлении оси X . Этот эффект виден на рис. 3.

ЛИТЕРАТУРА

1. Васильев В. А., Романовский Ю. М., Яхно В. Г. — УФН, 1979, 12, с. 625.
2. Полак Л. С., Михайлов А. С. Самоорганизация в неравновесных физико-химических системах. — М.: Наука, 1983.
3. Балкарей Ю. И., Никулин М. Т., Елинсон М. И. — В сб.: Автоволновые процессы в системах с диффузией — Горький: ИПФ АН СССР, 1981, с. 11.
4. Зыков В. С. Моделирование волновых процессов в возбудимых средах. — М.: Наука, 1984.
5. Кринский В. И., Михайлов А. С., Панфилов А. В., Ермакова Е. А., Шыганов М. А. — Изв. вузов — Радиофизика, 1984, 27, № 9, с. 1116.
6. Давыдов В. А., Михайлов А. С. Спиральные волны в распределенных средах. В кн.: Нелинейные волны — М.: Наука, 1986.
7. Бражник П. К., Давыдов В. А., Михайлов А. С. — ТМФ, 1988, 74, с. 440.
8. Зыков В. С. — В сб.: Управление сложными системами. — М.: Наука, 1975, с. 59.
9. Руденко А. Н., Панфилов А. В. — *Studia biophysica*, 1983, 98, p. 183.
10. Krinsky V. I., Agladze K. I. — *Physica*, 1983, 4D, p. 160.
11. Маркин В. С., Чизладжев Ю. А. — *Биофизика*, 1971, 16, № 1, с. 119.
12. Зыков В. С., Петров А. А. — *Биофизика*, 1977, 22, № 2, с. 300.

Институт проблем управления

Поступила в редакцию
30 октября 1986 г.

DRIFT AND RESONANCE OF SPIRAL WAVES IN ACTIVE MEDIA

V. A. Davydov, V. S. Zykov, A. S. Mikhailov, P. K. Brazhnik

The conception of quasistationary regime is formulated in the framework of kinematical approach to the description of autowave processes in active media. Quasistationary regimes in weakly nonhomogeneous and unsteady with time media are shown to describe the spiral waves drift. The dependence of drift character on the active medium properties is determined.