

УДК 621.373.826

## ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВОЛНОВЫХ ПУЧКОВ В СРЕДЕ СО СЛУЧАЙНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

*В. Г. Лапин, В. В. Тамойкин*

Методом моментов исследовано дифракционное уширение и энергообмен квазиоптических волновых пучков, взаимодействующих в плоскостой, квадратично-нелинейной среде с крупномасштабными хаотическими неоднородностями. Проанализированы особенности взаимодействия с повышением частоты в различных случаях соотношений между масштабами взаимодействия, дифракционного рассинхронизма и многократного рассеяния. Получены аналитические выражения, позволяющие оценить требования на длину трассы и ширину апертуры экспериментальных устройств, способных производить эффективное преобразование пучков на основе компенсации дифракционной расстройки в случайно-неоднородной среде.

В различных областях физики важную роль играют трехфотонные резонансные процессы взаимодействия волн, распространяющихся в нелинейных диспергирующих средах [1-3]. К настоящему времени процессы параметрического и нелинейного распада и слияния плоских волн изучены достаточно подробно (см., например, [1-8]). Было показано, в частности, что эффективность преобразования в результате взаимодействия волн существенно снижается при достаточно большом их фазовом рассогласовании. В связи с этим в случае сравнительно узких волновых пучков из-за сильного дифракционного фазового рассинхронизма взаимодействие происходит весьма неэффективно, что ограничивает КПД мощных удвоителей и «апконверторов» [9, 10].

В работах [11, 12] было показано, что многократное рассеяние волн на крупных, по сравнению с длиной волны, случайных неоднородностях показателя преломления, приводящее к случайному сбою фаз, может на достаточно длинной трассе в среднем полностью компенсировать влияние дифракционного рассинхронизма и тем самым приводить к достижению большого коэффициента преобразования по мощности. Однако вопрос о дифракционном уширении взаимодействующих в неоднородной среде волновых пучков до сих пор остается невыясненным, а следовательно, не были вполне ясны физический механизм компенсации дифракционного рассинхронизма и требования к ширине апертуры экспериментальной установки, способной практически реализовать данный эффект.

В настоящей работе исследована пространственная динамика энергообмена и дифракционного уширения параметрически взаимодействующих квазиоптических стационарных волновых пучков. Показано, что характер взаимодействия двух волновых пучков в поле заданной плоской волны накачки зависит от соотношения между тремя пространственными масштабами: нелинейного взаимодействия  $L_N$ , дифракционного сбая фаз  $L_D$  и многократного рассеяния  $L_P$ .

### 1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Стационарное параметрическое взаимодействие квазиоптических волновых пучков, распространяющихся в среде с одномерными случайными неоднородностями вдоль оси  $Oz$ , в приближении геомоптики описывается системой параболических уравнений [8]:

$$\begin{aligned} \partial A_1 / \partial z - i D_1 \Delta_{\perp} A_1 &= -i \beta_1 A_2^* A_3 \exp(-i\psi(z)), \\ \partial A_3 / \partial z - i D_3 \Delta_{\perp} A_3 &= -i \beta_3 A_2 A_1 \exp(i\psi(z)), \\ A_1(z, \rho) |_{z=0} &= A_1(\rho), \quad A_3(z, \rho) |_{z=0} = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

$\beta_{1,3}$  — коэффициенты нелинейного взаимодействия. Здесь  $A_j(z, \rho)$  — комплексные амплитуды волн с частотами  $\omega_j$  ( $j=1, 2, 3$ ), причем предполагается, что накачка  $A_2$  частоты  $\omega_2$  имеет форму плоской волны\*, и рассматривается процесс преобразования частоты вверх («ап-конверсия») с условиями синхронизма

$$\omega_1 + \omega_2 = \omega_3, \quad \Delta k(z) = k_3(z) - k_1(z) - k_2(z), \quad |\Delta k| \ll k_j, \quad (2)$$

где расстройка  $\Delta k(z)$  возникает в диспергирующей среде из-за наличия хаотических неоднородностей и вызывает случайное фазовое расогласование волн  $\psi(z) = \int_0^z \Delta k(z) dz$ . Коэффициенты поперечной диффузии амплитуд  $D_{1,3} = 1/2 \langle k_{1,3}^2 \rangle$  (символ  $\langle \dots \rangle$  здесь и ниже означает статистическое усреднение по ансамблю неоднородностей),  $\Delta_{\perp}$  — лапласиан по поперечным координатам  $\rho$ .

Легко видеть из (1), что фурье-компоненты  $a_{1,3}(z, \mathbf{x})$ , определяемые соотношением

$$A_j(z, \rho) = \int a_j(z, \mathbf{x}) \exp\{i(\mathbf{x}\rho + D_j \mathbf{x}^2 z)\} d\mathbf{x}, \quad (3)$$

удовлетворяют уравнениям того же вида, что и плоские волны:

$$da_1/dz = -i\beta_1 A_2^* a_3 \exp(-i\Phi(\mathbf{x}, z)), \quad a_1(0, \mathbf{x}) = a_0(\mathbf{x}), \quad (4)$$

$$da_3/dz = -i\beta_3 A_2 a_1 \exp(i\Phi(\mathbf{x}, z)), \quad a_3(0, \mathbf{x}) = 0,$$

однако в фазовое расогласование волн дополнительный вклад вносит дифракционный рассинхронизм

$$\Phi(\mathbf{x}, z) = \int_0^z \Delta k_{\text{эфф}}(z) dz, \quad (5)$$

$$\Delta k_{\text{эфф}}(z) = \Delta k(z) + D_- \mathbf{x}^2, \quad D_- = D_1 - D_3.$$

В связи с этим ясно, что по крайней мере в отсутствие случайных неоднородностей ( $\Delta k(z) = 0$ ) взаимодействие пространственно ограниченных волновых пучков должно происходить менее эффективно, чем для плоских волн, из-за дифракции.

Средняя интенсивность пучков определяется формулой

$$\begin{aligned} \langle |A_1(z, \rho)|^2 \rangle &= \iint \langle a_j(z, \mathbf{x}) a_j^*(z, \mathbf{x}') \rangle \exp\{i(\mathbf{x} - \mathbf{x}')\rho + \\ &+ iD_j(\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}'^2)z\} d\mathbf{x} d\mathbf{x}' \end{aligned} \quad (6)$$

и существенно зависит от угловой корреляции отдельных фурье-компонент  $a_j(z, \mathbf{x})$ . Вычисление этих величин затруднительно, поэтому ограничимся ниже исследованием средних мощностей пучков  $W_j(z)$  и их эффективных квадратов радиусов (метод моментов ранее использовался в работе [13]):

\* Для этого заведомо достаточно, чтобы начальный радиус  $a_n$  волны накачки заметно превышал радиусы пучков при их взаимодействии, т. е.  $a_n \gg a(1 + D_{\perp}^2 z^2 / a^4)^{1/2}$ . Это условие, вообще говоря, вносит ограничение на длину трассы.

$$W_j(z) = \int \langle |A_j(z, \rho)|^2 \rangle d\rho = (2\pi)^2 \int \langle |a_j(z, \mathbf{x})|^2 \rangle d\mathbf{x}; \quad (7)$$

$$\overline{\rho_j^2(z)} = W_j^{-1}(z) \int \rho^2 \langle |A_j(z, \rho)|^2 \rangle d\rho. \quad (8)$$

Более того, учитывая с помощью (3)—(6) соотношения Мэнли—Роу

$$W_1/\beta_1 + W_3/\beta_3 = \text{const},$$

можно ввести коэффициент  $q_{3,1}(z)$ , характеризующий долю от полного числа «квантов» мощности, преобразованных в волну с частотой  $\omega_3$ :

$$q_{3,1}(z) = \frac{\beta_1}{\beta_3} \frac{W_3(z)}{W_1(0)}. \quad (9)$$

Заметим также, что в дальнейшем мы будем рассматривать лишь ситуацию, при которой на входе в нелинейную среду задан симметричный пучок  $A_1(0, \rho) = A_1(0, -\rho)$ . Тогда, очевидно, симметрия сохранится, в среднем, по всей трассе, так что можно не учитывать момент  $\rho_j$ , определяющий движение центра тяжести пучков.

Преобразуя (8) с учетом (6), получим

$$\rho_j^2(z) = (2\pi)^2 W_j^{-1}(z) \int \langle |\Gamma_{\mathbf{x}} b_j(z, \mathbf{x})|^2 \rangle d\mathbf{x}, \quad (10)$$

$$b_j(z, \mathbf{x}) = a_j(z, \mathbf{x}) \exp(iD_j \mathbf{x}^2 z).$$

Далее, если выделить эффекты, связанные с видом спектра пучка на входе  $a_0(\mathbf{x})$  согласно соотношению  $b_j(z, \mathbf{x}) = a_0(\mathbf{x}) \tilde{b}_j(z, \mathbf{x})$ , то выражение (10) принимает вид

$$\overline{\rho_j^2(z)} = a^2 q_{j,1}^{-1}(z) \int [a_0^2(x) \langle M_j(\mathbf{x}) \rangle + a_0(x) \nabla_x a_0 \langle \nabla_x m_j(\mathbf{x}) \rangle + |\nabla_x a_0|^2 \langle m_j(\mathbf{x}) \rangle] dx, \quad (11)$$

где

$$q_{j,1}(z) = \int a_0^2(x) \langle m_j(\mathbf{x}) \rangle dx; \quad (12)$$

$$M_j(z, \mathbf{x}) = \beta_j^{-1} |\nabla_x \tilde{b}_j(z, \mathbf{x})|^2, \quad m_j(z, \mathbf{x}) = \beta_j^{-1} |\tilde{b}_j(z, \mathbf{x})|^2, \quad (13)$$

$\mathbf{x} = a\mathbf{x}$ ,  $a$  — радиус начального пучка с частотой  $\omega_1$ , а уравнения для  $\tilde{b}_j(z, \mathbf{x})$  запишутся в форме

$$d\tilde{b}_1/dz - iD_1 \mathbf{x}^2 \tilde{b}_1 = -i\beta_1 A_2^* \tilde{b}_3 \exp(-i\psi(z)), \quad \tilde{b}_1(0, \mathbf{x}) = 1, \quad (14)$$

$$d\tilde{b}_3/dz - iD_3 \mathbf{x}^2 \tilde{b}_3 = i\beta_3 A_2 \tilde{b}_1 \exp(i\psi(z)), \quad \tilde{b}_3(0, \mathbf{x}) = 0.$$

При выводе (11) мы считали, для простоты, величину  $a_0(\mathbf{x})$  действительной, т. е. ограничивались рассмотрением пучков с первоначально плоским фазовым фронтом. Будем предполагать также, что при  $z=0$  пучок частоты  $\omega_1$  имеет гауссову форму:  $A_1(0, \rho) = \exp(-\rho^2/2a^2)$ . При этом

$$a_0(x) = (1/2\pi) \exp(-x^2/2). \quad (15)$$

Таким образом, эффективная ширина пучков и эффективность их преобразования определяются статистическими моментами  $\langle m_j(z, \mathbf{x}) \rangle$ ,  $\langle M_j(z, \mathbf{x}) \rangle$ . Стохастические уравнения для них можно получить из системы (14). Считая стационарный случайный процесс  $\Delta k(z)$  нор-

мальным, а его масштаб корреляции  $l$  малым по сравнению с характерными масштабами изменения комплексных амплитуд

$$\langle \Delta k(z) \Delta k(z') \rangle = 2L_p^{-1} \delta(z-z'), \quad \langle \Delta k(z) \rangle = 0$$

( $L_p = 1 / \langle (\Delta k)^2 \rangle l$  — масштаб многократного рассеяния) и воспользовавшись теоремой Фуруцу—Новикова [14], из (14) получаем систему уравнений для определения величин  $\langle m_j \rangle$  и  $\langle M_j \rangle$ :

$$\hat{L} \begin{pmatrix} m_- \\ f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = 0, \quad \hat{L} \begin{pmatrix} f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x^2 m_- \Delta_F + 4x^2 \Delta \\ 2x^2 f_1 \Delta_F \\ 2x^2 f_2 \Delta_F \end{pmatrix},$$

$$df_6/d\xi = -2x^2 \Delta_F - 4x^2 m_- \Delta; \quad dM_+/d\xi = -f_6 \Delta_F + 2f_3 \Delta, \quad (16)$$

$$\hat{L} \begin{pmatrix} M_- \\ f_7 \\ f_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_3 \Delta_F - 2f_6 \Delta \\ f_4 \Delta + 2x \Delta \cdot df_2/dx \\ f_5 \Delta - 2x \Delta \cdot df_1/dx \end{pmatrix}, \quad m_+ \equiv 1.$$

Здесь линейный дифференциальный оператор  $\hat{L}$  представляет собой матрицу

$$\hat{L} = \begin{pmatrix} d/d\xi & 2 & 0 \\ -2 & \frac{d}{d\xi} + \frac{L_H}{L_p} & -2x^2 \Delta \\ 0 & 2x^2 \Delta & \frac{d}{d\xi} + \frac{L_H}{L_p} \end{pmatrix},$$

$\xi = z/L_H$ ,  $L_H = (\beta_1 \beta_3 |A_2|^2)^{-1/2}$  — масштаб нелинейного взаимодействия, определяющий длину энергообмена плоских волн в однородной среде,  $\Delta = L_H/2L_D$ ,  $L_D = a^2/D_-$  — масштаб дифракционного рассинхронизма,  $\Delta_F = L_H/2L_F$ ,  $L_F = a^2/D_+$ ,  $m_{\pm} = \langle m_1 \rangle \pm \langle m_3 \rangle$ ,  $M_{\pm} = \langle M_1 \rangle \pm \langle M_3 \rangle$ . Величины  $f_k(z, x)$  связаны следующими соотношениями:

$$f_2 - if_1 = 2L_H A_2^* \langle b_3 b_1^* e^{i\psi} \rangle, \quad f_4 - if_5 = 2L_H x A_2^* \langle (b_3 b_1'' - b_3' b_1^*) e^{i\psi} \rangle,$$

$$f_8 - if_7 = 2L_H A_2^* \langle b_3' b_1^{*'} e^{i\psi} \rangle, \quad f_{3,6} = 2x \text{Im} \langle \beta_1^{-1} b_1 b_1^{*'} \mp \beta_3^{-1} b_3 b_3^{*'} \rangle,$$

где штрихом обозначено дифференцирование по  $x$ . Граничные условия для искомых величин имеют вид

$$m_-(0, x) = 1, \quad f_l(0, x) = M_{\pm}(0, x) = 0, \quad l = 1, 2, \dots, 8. \quad (17)$$

Заметим, что хотя система (16), (17) имеет одиннадцатый порядок, при последовательном ее решении на каждом отдельном этапе необходимо интегрировать лишь систему уравнений с постоянными коэффициентами не выше третьего порядка, так как правые части соответствующих уравнений будут определены на предыдущем этапе решения.

Таким образом, нет каких-либо принципиальных трудностей для получения решения системы (16), (17), однако ввиду громоздкости мы его приводить не будем, а ограничимся рассмотрением двух наиболее интересных предельных случаев.

## 2. ОДНОРОДНАЯ СРЕДА ( $L_p \rightarrow \infty$ )

В этом случае величины  $q_{3,1}(z)$  и  $\rho_3^2(z)$  имеют вид

$$q_{3,1}(\xi) = \Delta^{-1} \int_0^{\infty} \frac{\sin^2(\sqrt{1+t^2} \xi)}{1+t^2} \exp\left(-\frac{t}{\Delta}\right) dt; \quad (18)$$

$$\overline{\rho_3^2(\zeta)} = \frac{a^2}{q_{3,1}(\zeta)} \int_0^\infty \left\{ \left( \frac{1}{\Delta^2} + 4 \frac{D_+^2}{D_-^2} \zeta^2 \right) \frac{t \sin^2(\sqrt{1+t^2}\zeta)}{1+t^2} - \frac{4t^2}{(1+t^2)\Delta} \times \right. \\ \left. \times \left[ \frac{\zeta \sin(2\sqrt{1+t^2}\zeta)}{2\sqrt{1+t^2}} - \frac{\sin^2(\sqrt{1+t^2}\zeta)}{1+t^2} \right] + \frac{4t^3}{(1+t^2)^2} \times \right. \\ \left. \times \left[ \zeta \cos(\sqrt{1+t^2}\zeta) - \frac{\sin(\sqrt{1+t^2}\zeta)}{\sqrt{1+t^2}} \right]^2 \right\} \exp\left(-\frac{t}{\Delta}\right) dt. \quad (19)$$

Похожее по форме, хотя и более громоздкое, выражение имеет место для  $\overline{\rho_1^2}$ .

Проанализируем интегралы (18), (19) для случаев широких ( $\Delta = L_n/L_d \ll 1$ ) и узких ( $\Delta \gg 1$ ) пучков.

а) *Широкие пучки.* В этом случае естественно ожидать интенсивного энергообмена между пучками. Действительно, разлагая в (18)  $\sqrt{1+t^2}$  в ряд Тэйлора и ограничиваясь при  $\zeta\Delta^4 \ll 1$  первыми двумя членами разложения под знаком  $\sin$ , получаем

$$q_{3,1}(\zeta) \simeq \frac{1}{2} - \frac{1}{8} \sqrt{\frac{\pi}{\zeta\Delta^2}} \left\{ \left[ 1 - \Phi\left(\sqrt{\frac{i}{4\zeta\Delta^2}}\right) \right] \times \right. \\ \left. \times \exp\left[i\left(2\zeta + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4\zeta\Delta^2}\right)\right] + \text{к.с.} \right\}, \quad (20)$$

где  $\Phi(y)$  — интеграл вероятностей. Из (20) следует, что на трассе достаточной длины устанавливается равновесный режим взаимодействия с большим ( $q_{3,1} \simeq 1/2$ ) коэффициентом преобразования по числу квантов мощности:

$$q_{3,1}(\zeta) \simeq \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{\zeta\Delta^2}} \cos\left(2\zeta + \frac{\pi}{4}\right), \quad \zeta\Delta^2 \gg 1. \quad (21)$$

В обратном предельном случае ( $\zeta\Delta^2 \ll 1$ ,  $\zeta \gg 1$ ), когда еще слабо называется дифракционный рассинхронизм, происходит почти периодический обмен энергией между пучками:

$$q_{3,1}(\zeta) \simeq \sin^2\zeta + \zeta\Delta^2 \sin 2\zeta + 6(\zeta\Delta^2)^2 \cos 2\zeta. \quad (22)$$

Эффективные радиусы пучков в равновесном режиме нарастают по одинаковому закону

$$\overline{\rho_{1,3}^2} \simeq a^2 \left( 1 + \frac{D_+^2}{a^4} z^2 \right), \quad \zeta\Delta^2 \gg 1. \quad (23)$$

Для параметрического процесса распада закон уширения, аналогичный (23) (при распаде  $D_+$  следует заменить на  $D_-$ ), получен в [8] и назван аномальной дифракцией.

На начальной стадии взаимодействия ( $\zeta\Delta^2 \ll 1$ ) пучки уширяются также по закону (23), за исключением «особых» областей, в которых  $|Y_n| = |\zeta - \zeta_n| \leq \zeta\Delta^2 \ll 1$ ,  $\zeta_n = n\pi$ ,  $n = 1, 2, \dots$  При этом

$$\overline{\rho_3^2} \simeq a^2 \left[ 1 - \frac{4Y_n\zeta\Delta^2}{Y_n^2 + 6(\zeta\Delta^2)^2 + 2Y_n\zeta\Delta^2} + \frac{D_+^2}{a^4} z^2 \frac{30(\zeta\Delta^2)^2 + 6Y_n\zeta\Delta^2 + Y_n^2}{6(\zeta\Delta^2)^2 + 2Y_n\zeta\Delta^2 + Y_n^2} \right]. \quad (24)$$

В частности, при  $|Y_n| \gg \zeta\Delta^2$  (24) переходит в (23), а в противоположном случае,  $|Y_n| \ll \zeta\Delta^2$ , эффективный радиус пучка возрастает более резко:

$$\overline{\rho_3^2} \simeq a^2 \left( 1 + 5 \frac{D_+^2}{a^4} z_n^2 \right). \quad (25)$$

Естественно предположить, что такое возрастание связано с тем, что в «особых» областях форма пучка сильно отличается от гауссовой. Для доказательства этого утверждения с помощью (3), (4) было получено выражение для интенсивности пучка:

$$|A_3(\xi_n, \rho)|^2 = |A_3(\xi_n, 0)|^2 |f(\rho)|^2 \exp(-\rho^2/a^2), \quad (26)$$

где

$$f(\rho) = \frac{1}{2} \left\{ \left[ \frac{\rho^2}{2a^2} \left( 1 + i \frac{D_+ z_n}{a^2} \right) - 2 \right]^2 - 2 \right\}, \quad a^2 = a^2 \left( 1 + \frac{D_+^2}{a^4} z_n^2 \right).$$

На рисунке показана зависимость  $|A_3(\xi_n, \rho)|^2 / |A_3(\xi_n, 0)|^2$  от параметра  $\rho = \rho^2 / 2a^2$  при  $D_+ z_n / a^2 \ll 1$ , из которой следует, что кроме основного

«тела» пучка, расположенного в приосевой области, имеются два дополнительных, сравнительно слабых «кольца» с максимумами при  $\rho_1 \simeq 1,3$  и  $\rho_2 \simeq 4,7$ . Соответствующие им значения  $g_1 \simeq 0,04$ ,  $g_2 \simeq 5 \cdot 10^{-4}$ . С ростом  $z_n$  интенсивность колец возрастает, и при  $D_+ z_n / a^2 \gg 1$  пучок вырождается в кольцеобразную структуру

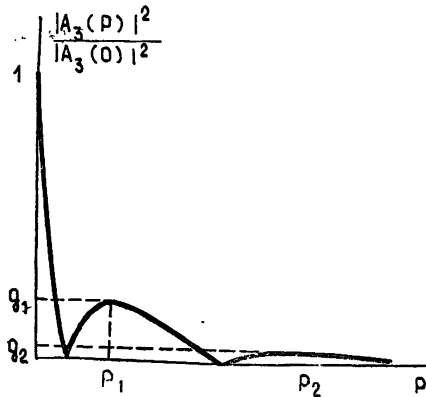


Рис. 1.

$$\frac{|A_3(z_n, \rho)|^2}{|A_3(z_n, 0)|^2} \simeq \frac{1}{4} \left[ 4 + 3 \left( \frac{\rho^2}{D_+ z_n} \right)^2 + \left( \frac{\rho^2}{D_+ z_n} \right)^4 \right] \exp \left( - \frac{\rho^2 a^2}{D_+^2 z_n^2} \right), \quad (27)$$

в которой максимум интенсивности, расположенный на расстоянии  $\rho_{\max} = 2D_+ z_n / a$ , в  $2^6 e^{-4} (D_+ z_n / a^2)^4$  раз превышает интенсивность на оси пучка.

б) Узкие пучки ( $\Delta \gg 1$ ). Легко видеть, что в случае не очень коротких трасс ( $\xi \Delta \gg 1$ ) в формуле (18) можно экспоненту приближенно положить равной единице, после чего дифференцированием по параметру получаем

$$q_{3,1}(\xi) \simeq \frac{\pi}{4\Delta} \int_0^{\xi} J_0(x) dx = \frac{\pi \xi}{4\Delta} \{ 2J(2\xi) + \pi [J_1(2\xi) H_0(2\xi) - J_0(2\xi) H_1(2\xi)] \}, \quad (28)$$

где  $J_\nu(x)$ ,  $H_\nu(x)$  — функции Бесселя и Струве. Как следует из (28), равновесный коэффициент преобразования  $q_{3,1}(\infty) = \pi / 4\Delta$  мал. Процесс установления носит характер затухающих (с периодом  $\sim L_H$ ) осцилляций:

$$q_{3,1}(\xi) \simeq \frac{\pi}{4\Delta} \left[ 1 + \frac{\sin(2\xi - \pi/4)}{\sqrt{\pi \xi}} \right], \quad \xi \gg 1. \quad (29)$$

На начальной стадии взаимодействия ( $\xi \Delta \ll 1$ ) дифракционный рассинхронизм не успевает сказаться и мощность генерируемого пучка нарастает с расстоянием по квадратичному закону

$$q_{3,1}(\xi) \simeq \xi^2 (1 - O(\xi^2 \Delta^2)). \quad (30)$$

В дальнейшем на трассах  $\Delta^{-1} \leq \zeta \ll 1$   $q_{3,1}(\zeta)$  нарастает; более медленно:

$$q_{3,1}(\zeta) \simeq \frac{\pi \zeta}{2\Delta} \left( 1 - O(\zeta^2) + O\left(\frac{\ln \Delta}{\Delta}\right) \right). \quad (31)$$

Максимум коэффициента преобразования  $q_{3,1}(\zeta)$  достигается, как следует из (28), в точке  $\zeta_{\max} \simeq 1,2$  ( $J_0(2\zeta_{\max}) = 0$ ), а  $q_{3,1}(\zeta_{\max}) \simeq 1,5 q_{3,1}(\infty)$ . Таким образом, в случае узких пучков энергообмен мал,  $q_{3,1} \sim \Delta^{-1} \ll 1$ ,  $q_{1,1} \simeq 1$ . Это означает, что уширение пучка частоты  $\omega_1$  происходит почти так же, как в линейной среде:

$$\overline{\rho_1^2(z)} \simeq a^2 \left( 1 + \frac{4D_1^2}{a^4} z^2 \right), \quad (32)$$

а его форма остается практически гауссовой.

Уширение генерируемого пучка в области  $\zeta \Delta \ll 1$  описывается формулой

$$\overline{\rho_3^2(z)} \simeq a^2 \left( 1 + \frac{(4/3)D_-^2 + D_+^2}{a^4} z^2 \right), \quad (33)$$

а при  $\Delta^{-1} \leq \zeta \ll 1$  —

$$\overline{\rho_3^2(z)} \simeq \frac{4a^2}{\pi} \Delta \left( 1 + \frac{D_+^2}{D_-^2} \right) \zeta \ln(2\zeta \Delta), \quad (34)$$

т. е. рост радиуса третьего пучка становится более медленным. С установлением равновесного режима взаимодействия ( $\zeta \gg 1$ ) величина  $\rho_3^2(\zeta)$  снова изменяется по квадратичному, хотя и отличному от (32), закону

$$\overline{\rho_3^2(\zeta)} = \frac{8}{\pi} a^2 \Delta \left( 1 + \frac{D_+^2}{D_-^2} \right) \zeta^2 \ln \Delta. \quad (35)$$

### 3. СИЛЬНОНЕОДНОРОДНАЯ СРЕДА ( $L_p \ll L_H$ )

Решая систему уравнений (16), (17) при наличии многократного рассеяния ( $\delta = 2L_p/L_H \ll 1$ ), получим

$$\begin{aligned} \langle m_{1,3} \rangle &= (1/2) [1 \pm \exp(-2\zeta\delta/(1+t^2))], \\ \langle M_1 \rangle &= 2 \frac{\Delta}{\delta} \zeta \left\{ \left( 1 + \frac{2D_+}{D_-} \right) \frac{1+t^2}{\delta} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{2\zeta\delta}{1+t^2}\right) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\zeta D_+^2}{D_-^2} \left[ 1 + \exp\left(-\frac{2\zeta\delta}{1+t^2}\right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \langle M_3 \rangle &= 2 \frac{\Delta}{\delta} t \left\{ \frac{(1+t^2)^2}{\delta^2} \left[ \frac{\zeta\delta}{1+t^2} \left( 1 + \exp\left(-\frac{2\zeta\delta}{1+t^2}\right) \right) - 1 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \exp\left(-\frac{2\zeta\delta}{1+t^2}\right) \right] + \frac{D_+^2}{D_-^2} \zeta^2 \left[ 1 - \exp\left(-\frac{2\zeta\delta}{1+t^2}\right) \right] \right\}, \end{aligned}$$

где  $t = \Delta_p x^2 = a^2 \kappa^2 \Delta_p$ ,  $\Delta_p = \Delta \delta = L_p/L_H$ . При подстановке (36) в (11), (12) имеем

$$q_{3,1}(\zeta) = \frac{1}{2\Delta_p} \int_0^{\infty} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{2\zeta\delta}{1+t^2}\right) \right] \exp\left(-\frac{t}{\Delta_p}\right) dt, \quad (37)$$

$$\overline{\rho_3^2(\zeta)} = \frac{a^2}{q_{3,1}(\zeta)} \left\{ \left( \frac{1}{2\Delta_p} + \frac{2\Delta}{\delta} \frac{D_+^2}{D_-^2} \zeta^2 \right) I_1(\zeta) + 2 \left[ \zeta \left( \delta \cdot I_2 + \frac{\Delta}{\delta^2} I_3 \right) - \frac{\Delta}{\delta^2} I_4 \right] \right\}.$$

Здесь

$$I_1 = \int_0^\infty t \exp\left(-\frac{t}{\Delta_p}\right) \left[ 1 - \exp\left(-\frac{2\zeta\delta}{1+t^2}\right) \right] dt,$$

$$I_2 = \int_0^\infty \frac{t^2}{(1+t^2)^2} \exp\left(-\frac{t}{\Delta_p} - \frac{2\zeta\delta}{1+t^2}\right) dt,$$

(38)

$$I_3 = \int_0^\infty t(1+t^2) \exp\left(-\frac{t}{\Delta_p}\right) \left[ 1 + \exp\left(-\frac{2\zeta\delta}{1+t^2}\right) \right] dt,$$

$$I_4 = \int_0^\infty t(1+t^2)^2 \exp\left(-\frac{t}{\Delta_p}\right) \left[ 1 - \exp\left(-\frac{2\zeta\delta}{1+t^2}\right) \right] dt.$$

Отметим, что формула (37) ранее была получена в [11], где показано, что на достаточно протяженной трассе независимо от ширины заданного на входе сигнального пучка устанавливается режим взаимодействия с равномерным распределением по среднему числу «квантов» мощности ( $q_{3,1}(\infty) = 1/2$ ).

Заметим, что в сильнонеоднородной среде ( $L_p \ll L_n$ ) понятия «широкий» и «узкий» пучки существенно изменяются:

$\Delta_p \ll 1$  ( $L_p \ll L_n$ ) — «широкий» пучок,

$\Delta_p \gg 1$  ( $L_p \gg L_n$ ) — «узкий» пучок.

Рассмотрим динамику взаимодействия и уширения пучков для этих предельных случаев.

а) «Широкие» пучки ( $L_p \ll L_n$ ,  $L_n$ ). Из выражения (37) видно, что равномерное распределение устанавливается по закону

$$q_{3,1}(\zeta) \simeq \frac{1}{2} (1 - e^{-2\zeta\delta}), \quad (39)$$

т. е. выход на значение  $q_{3,1}(\infty) = 1/2$ , как и в случае плоских волн, происходит на расстояниях  $z \gg L_n^2/L_p$ .

Для эффективных радиусов пучков из (38) нетрудно получить

$$\overline{\rho_1^2(\zeta)} \simeq a^2 \left[ 1 + \frac{D_+^2 L_n^2}{a^4} \zeta^2 + \frac{(D_-^2 + 2D_+ D_-) L_n^2}{a^4} \zeta / \delta \operatorname{th}(\zeta\delta) \right], \quad (40)$$

$$\overline{\rho_3^2(\zeta)} \simeq a^2 \left[ 1 + \frac{D_+^2 L_n^2}{a^4} \zeta^2 + \frac{D_-^2 L_n^2}{a^4 \delta^2} (\zeta\delta \operatorname{cth}(\zeta\delta) - 1) \right].$$

Из (40) видно, что при  $\zeta\delta \gg 1$  ( $z \gg L_n^2/L_p$ )

$$\overline{\rho_1^2(\zeta)} \simeq \overline{\rho_3^2(\zeta)} \simeq a^2 \left( 1 + \frac{D_+^2 L_n^2}{a^4} \zeta^2 \right), \quad (41)$$

т. е. оба пучка расширяются по одинаковому закону (23). Отсюда ясно, почему наличие случайных неоднородностей приводит (даже в условиях, когда  $\Delta \gg 1$ ) к компенсации дифракционного сбоя фаз и к заметному



повышению коэффициента преобразования по мощности по сравнению со случаем однородной среды. Действительно, интенсивный энергообмен между пучками наступает лишь на расстояниях  $\zeta \simeq \zeta_* \simeq \delta^{-1}$ , когда радиус сигнального пучка становится уже достаточно большим:

$$\rho_1^2(\zeta_*) = a^2 \simeq a^2(\Delta^2/\delta^2) \gg a^2. \quad (42)$$

Следовательно, к началу интенсивного энергообмена даже при  $\Delta \gg 1$  параметр  $\Delta(a_*) \simeq \delta^2/\Delta \ll 1$ , т. е. в дальнейшем пучки будут взаимодействовать как почти плоские волны.

б) «Узкие» пучки ( $L_d \ll L_p \ll L_n$  или  $\Delta_p \gg 1, \delta \ll 1$ ). На начальной стадии ( $\zeta \delta \ll 1$ ) коэффициент преобразования в соответствии с (37) нарастает с расстоянием по линейному закону

$$q_{3,1}(\zeta) \simeq \frac{\pi}{2} \frac{\zeta \delta}{\Delta_p} \left[ 1 + O\left(\frac{\ln \Delta_p}{\Delta_p}\right) + O(\zeta \delta) \right], \quad (43)$$

но, в отличие от случая  $\Delta_p \ll 1$ , более медленно, что, разумеется, является результатом действия дифракционной расфазировки.

Для достаточно протяженных трасс ( $\zeta \delta \gg 1$ ) выражение (37) можно приближенно представить в виде

$$q_{3,1}(\zeta) \simeq \frac{1}{2} \int_0^\infty \exp(-y) \left[ 1 - \exp\left(-\frac{\alpha}{y^2}\right) \right] dy, \quad (44)$$

где  $\alpha = 2\zeta \delta / \Delta_p^2$ . Отсюда видно, что при  $\alpha \ll 1$  ( $z \ll \frac{L_n^2 L_p^2}{L_p L_n^2}$ ) коэффициент преобразования мал:

$$q_{3,1}(\zeta) \simeq \left(\frac{\pi \alpha}{4}\right)^{1/2} = \left(\frac{\pi \zeta \delta}{2\Delta_p^2}\right)^{1/2} \ll 1, \quad (45)$$

и лишь при выполнении обратного неравенства  $\alpha \gg 1$  наступает равномерное распределение:

$$q_{3,1}(\zeta) \simeq \frac{1}{2} \left[ 1 - 2 \left(\frac{\pi}{3}\right)^{1/2} \left(\frac{\alpha}{4}\right)^{1/6} \exp\left(-3 \left(\frac{\alpha}{4}\right)^{1/3}\right) \right]. \quad (46)$$

Для выяснения закона эффективного уширения пучков в случае  $\Delta_p \gg 1$  необходимо вычислить интегралы  $I_1, I_2, I_3, I_4$ , входящие в (38). Разложение фактора  $\exp(-2\zeta \delta / (1+t^2))$ , входящего в эти интегралы, в бесконечный ряд с последующим почленным интегрированием и суммированием полученных бесконечных рядов дает выражения ( $\Delta_p \gg 1$ ):

$$I_1 \simeq \begin{cases} \zeta \delta (\ln \Delta_p^2 + O(1)), & \zeta \delta \ll 1 \\ \zeta \delta \left( \ln \frac{\Delta_p^2}{2\zeta \delta} + O(1) \right), & 1 \ll \zeta \delta \ll \Delta_p^2 \end{cases}$$

$$I_2 \simeq \begin{cases} \frac{\pi}{4} \left( 1 - \frac{\zeta \delta}{2} \right) + O(\zeta^2 \delta^2), & \zeta \delta \ll 1 \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{2\zeta \delta} \right)^{1/2} \left( 1 - \frac{1}{4\zeta \delta} \right), & 1 \ll \zeta \delta \ll \Delta_p^2 \end{cases}$$

$$I_3 \simeq \begin{cases} 12\Delta_p^4 + 2\Delta_p^2 - 2\Delta_p^2 \zeta \delta + (\zeta \delta)^2 \ln \Delta_p^2 + O(\zeta^2 \delta^2), & \zeta \delta \ll 1 \\ 12\Delta_p^4 + 2\Delta_p^2 - 2\Delta_p^2 \zeta \delta + (\zeta \delta)^2 \ln(\Delta_p^2 / 2\zeta \delta), & 1 \ll \zeta \delta \ll \Delta_p^2 \end{cases}$$

$$I_4 \simeq \begin{cases} 2\zeta \delta (6\Delta_p^4 + \Delta_p^2) - 2(\zeta \delta)^2 \Delta_p^2 + (2/3)(\zeta \delta)^3 \ln \Delta_p^2 + O(\zeta^4 \delta^4), & \zeta \delta \ll 1 \\ 12\Delta_p^4 \zeta \delta - 2\Delta_p^2 \zeta \delta (\zeta \delta - 1) + (2/3)(\zeta \delta)^3 \ln(\Delta_p^2 / 2\zeta \delta), & 1 \ll \zeta \delta \ll \Delta_p^2 \end{cases}$$

Для иллюстрации в Приложении изложена процедура вычисления интеграла  $I_1$ .

Подставляя выражения для  $\langle q_{3,1} \rangle$  и  $I_{1-4}$  в выражение (38), получим, что на начальной стадии ( $\zeta\delta \ll 1$ ) генерируемый пучок уширяется по закону

$$\overline{\rho_3^2(\zeta)} \simeq a^2 \left[ 1 + \frac{4}{\pi} \zeta^2 \frac{\Delta}{\delta} \left( \frac{1}{3} + \frac{D_+^2}{D_-^2} \right) \ln \Delta_p^2 + O(\zeta\delta) + O\left(\frac{\ln \Delta_p}{\Delta_p}\right) \right], \quad (47)$$

т. е. эффективный радиус пучка заметно возрастает на масштабе  $\sqrt{L_p L_d}$ , гораздо меньшем, чем в случае  $\Delta_p \ll 1$ . На промежуточных трассах  $1 \ll 2\zeta\delta \ll \Delta_p^2$  закон уширения несколько другой:

$$\overline{\rho_3^2(\zeta)} \simeq a^2 \left[ 1 + \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \left(\frac{1}{3} + \frac{D_+^2}{D_-^2}\right) \frac{2\Delta}{\delta^{1/2}} \zeta^{5/2} \ln \frac{\Delta_p^2}{2\zeta\delta} + O\left(\frac{1}{\Delta_p}\right) \right], \quad (48)$$

а с выходом на равновесный режим взаимодействия при  $\zeta\delta \gg \Delta_p^2$  происходит переход на закон уширения (23).

Таким образом, можно заключить, что случайные неоднородности, увеличивая масштаб объема энергией между пучками, приводят к сильному уширению первоначально узкого пучка до начала интенсивного энергообмена. В результате начинают взаимодействовать уже широкие пучки и преобразование энергии протекает эффективно.

#### ПРИЛОЖЕНИЕ

Остановимся подробнее на процедуре оценки интегралов  $I_1 - I_4$  в случае узких пучков ( $\Delta_p \gg 1$ ) для неустановившегося режима взаимодействия, когда  $\alpha = 2\zeta\delta/\Delta_p^2 \ll 1$  (при этом возможно как  $\zeta\delta \ll 1$ , так и  $\zeta\delta \gg 1$ ).

В выражении (38) для  $I_1$  разложим функцию, стоящую в скобках, в ряд, в результате получим

$$I_1 = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-2\zeta\delta)^k}{k!} \int_0^{\infty} \frac{t \exp(-t/\Delta_p)}{(1+t^2)^k} dt.$$

Производя интегрирование и оставляя главные по параметру  $\Delta_p$  члены (т. е. полагая  $\alpha \ll 1$ ), запишем

$$I_1 \simeq 2\zeta\delta (\ln \Delta_p - C) - \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-2\zeta\delta)^k}{k!(k-1)!},$$

где  $C$  — постоянная Эйлера. Преобразуем теперь оставшийся ряд следующим образом:

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-2\zeta\delta)^k}{k!(k-1)!} &= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-2\zeta\delta)^k}{(k-1)!(k-1)!} - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-2\zeta\delta)^k}{k!} = \\ &= -2\zeta\delta G(2\zeta\delta) - (\exp(-2\zeta\delta) - 1 + 2\zeta\delta), \end{aligned}$$

где  $G(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n \cdot n!}$  можно, дифференцируя по  $x$ , выразить через интегральную показательную функцию  $Ei(x)$ . В результате имеем

$$I_1 \simeq 2\zeta\delta (\ln \Delta_p - C) + \zeta\delta G(2\zeta\delta) + \frac{1}{2} (\exp(-2\zeta\delta) - 1 + 2\zeta\delta),$$

$$\hat{G}(x) = \int_0^x \frac{e^{-y}-1}{y} dy = -\text{Ei}(x) - \ln x - C.$$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Цытович В. Н. Теория турбулентной плазмы. — М.: Госатомиздат, 1971.—423 с.
2. Галеев А. А., Сагдеев Р. З. — Сб. Вопросы теории плазмы. — М.: Атомиздат, 1973, вып. 7, с. 3.
3. Заславский Г. М., Мейтлис В. П., Филоненко Н. Н. Взаимодействие волн в неоднородных средах. — Новосибирск: Наука, 1982. — 177 с.
4. Беспалов В. И. — Изв. вузов — Радиофизика, 1967, 10, № 1, с. 74.
5. Абрамович Б. С., Тамойкин В. В. — Физика плазмы, 1980, 6, № 3, с. 531.
6. Абрамович Б. С., Тамойкин В. В. — ЖЭТФ, 1980, 78, № 2, с. 458.
7. Карамзин Ю. Н., Сухоруков А. П. — Письма в ЖЭТФ, 1974, 20, № 7, с. 454.
8. Карамзин Ю. Н., Сухоруков А. П. — ЖЭТФ, 1975, 68, № 3, с. 834.
9. Midwinter J. E., Warner J. — J. Appl. Phys., 1967, 38, p. 519.
10. Воронин Э. С., Стрижевский В. Л. — УФН, 1979, 127, № 1, с. 99.
11. Абрамович Б. С., Сазонтов А. Г., Тамойкин В. В. — Письма в ЖТФ, 1981, 7, № 12, с. 748.
12. Abramovich B. S., Sasontov A. G., Tamojkin V. V. — Physica Scripta, 1982, 25, № 1, p. 53.
13. Власов С. Н., Петрищев В. А., Таланов В. И. — Изв. вузов — Радиофизика, 1971, 14, № 9, с. 1353.
14. Кляцкин В. И. Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах. — М.: Наука, 1980, с. 215.

Научно-исследовательский  
радиофизический институт

Поступила в редакцию  
16 июня 1986 г.

#### PARAMETRIC INTERACTION OF WAVE BEAMS IN A MEDIUM WITH RANDOM INHOMOGENEITIES

*V. G. Lapin, V. V. Tamojkin*

The diffraction broadening and the energy exchange of quasioptical wave beams interacting in a plane-stratified nonlinear medium with large-scale chaotic inhomogeneities are investigated by the method of moments. Peculiarities have been analyzed of interaction with the frequency increase in different cases of relations between interaction scales, diffraction disynchronism and multiple scattering. Analytic expressions have been derived which permit one to estimate the demands for the trace length and the aperture width of experimental devices capable of creating the effective beam transformation on the basis of the diffraction detuning in a randomly inhomogeneous medium.