ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXXI, № 5 РАДИОФИЗИКА 1988

УДК 550.388.2

НЕЛИНЕЙНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИХ ВОЛН В *E*-ОБЛАСТИ ИОНОСФЕРЫ

А. В. Волосевич, М. Г. Гельберг

Исследуется возможность нелинейного трехмерного взаимодействия фарлей-бунемановских волн в E-области ионосферы. Показано, что в результате такого взаимодействия могут образовываться волны, распространяющиеся под углом к плоскости, ортогональной направлению магнитного поля. Эти волны могут диагностироваться с помощью радиолокационной техники.

Несмотря на то что линейная теория неустойчивостей E-области ионосферы достаточно хорошо изучена, существуют трудности при построении нелинейной теории стабилизации неустойчивостей. Одним из главных вопросов нелинейной теории является определение области диссипации линейно нарастающих волн. В существующих нелинейных моделях процесс стабилизации неустойчивости происходит за счет перекачки волн из области линейной генерации в коротковолновую область затухания [1–3]. В этих работах изучалась двумерная перекачка волн, т. е. рассматривалось взаимодействие волн с волновыми векторами, ортогональными направлению магнитного поля Земли. При этом не учитывалась возможная диссипация энергии линейно нарастающих волн за счет перекачки в волны, имеющие составляющую волнового вектора вдоль направления магнитного поля Земли.

В данной работе проводится анализ квазираспадного взаимодействия волн, результатом которого является образование волн, распространяющихся под ракурсными углами $\psi\neq 0$ (ψ — угол между направлением волнового вектора $\boldsymbol{k}$ и плоскостью, ортогональной направлению магнитного поля Земли). Такое взаимодействие приводит к сильной диссипации энергии и к установлению квазистационарного состояния. Результатом такого процесса является образование электростатических волн с ракурсными углами $\psi\neq 0$, которые могут диагностироваться радиолокационной техникой.

1. Из линейной теории фарлей-бунемановской неустойчивости следует, что закон дисперсии и инкремент нарастания волн определяются соотношениями [1, 3]

$$\omega_k=\frac{kv_{0e}}{1+\hat{R}}, \quad \hat{R}=(\theta_i\theta_e)^{-1}+\theta_e\theta_i^{-1}\,\frac{k_z^2}{k^2}; \tag{1}$$

$$\gamma_k=\frac{\hat{R}}{(1+\hat{R})\,\nu_i}\,(\omega_k^2-k^2c_s^2), \qquad \theta_e=\frac{\omega_{He}}{\nu_e}, \qquad \theta_i=\frac{\omega_{Hi}}{\nu_i}, \tag{2}$$

где ν_e, ν_i — частота столкновений электронов, ионов с нейтралами, ω_{He}, ω_{Hi} — гирочастоты, v_{0e} — дрейфовая скорость электронов, c_s — скорость звука в плазме, $\boldsymbol{k}$ — волновой вектор, k_z — проекция волнового вектора на направление магнитного поля.

Из соотношений (1), (2) следует, что при увеличении k_z/k возрастает $\hat{R}$, а частота ω_k и инкремент нарастания волн резко убывают.

Легче всего возбуждаются волны в направлении, ортогональном направлению магнитного поля. Рассмотрим возможность нелинейного взаимодействия с учетом перекачки волн по ракурсным углам ψ: $(\sin\psi=k_z/k_\perp,\ k_\perp\sim k)$.

Предположим, что две волны $\boldsymbol{k}'$ и $\boldsymbol{k}''$ с $k_z'\neq0$ и $k_z''\neq0$ образуются в результате распада волны с $k_z=0$. Для этих трех волн выполняются условия синхронизма

$$\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}'+\boldsymbol{k}'',\qquad \omega_k=\omega_{k'}+\omega_{k''}. \tag{3}$$

Из этих условий следует

$$k_x'=-k_x''\frac{1+\hat{R}'}{1+\hat{R}''}\frac{(\hat{R}''-\hat{R})}{(R'-\hat{R})}. \tag{4}$$

Если выполняется условие

$$(\theta_e/\theta_i)\,(k_z^2/k^2)\gg1, \tag{5}$$

то из соотношений (1), (4), (5) следует, что волны с ненулевыми ракурсными углами ($k_z\neq0$) могут образовываться при распаде волны с нулевым ракурсным углом только в том случае, если эта волна имеет $k_x=0$ ($|k|=k_y$, $k_z=0$) и распространяется вдоль оси Y, т. е. является в линейном приближении затухающей. Такая волна может образовываться при слиянии двух нарастающих волн с нулевыми ракурсными углами.

Пусть две волны с волновыми векторами $\boldsymbol{k}_1$ и $\boldsymbol{k}_2$ образуют волну, у которой $k_x=0$ и $k_z=0$. Из условия резонансного взаимодействия для этих трех волн

$$\omega_k=\omega_{k_1}+\omega_{k_2},\qquad \boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2 \tag{6}$$

следует, что $k_{1x}=-k_{2x}$ и $\omega_k=0$. Причем волна, образованная в результате слияния двух волн из области линейной генерации, распространяется вдоль оси Y в системе координат, где направление X совпадает с направлением дрейфовой скорости электронов, а ось Z направлена вдоль направления магнитного поля Земли. Таким образом, процесс образования волн с ненулевыми ракурсными углами идет в два этапа. На первом этапе нарастающие волны из конуса линейной генерации перекачиваются в затухающие волны, распространяющиеся почти ортогонально направлению дрейфовой скорости электронов. Затем на втором этапе эти волны отдают свою энергию волнам с ненулевыми ракурсными углами.

2. Исследуем процесс нелинейного взаимодействия пяти волн, три из которых в линейном приближении являются затухающими. Уравнение для амплитуд n_k взаимодействующих волн имеет вид [3, 4]

$$\partial n_k/\partial t-\gamma_k n_k=\sum_{k_1,k_2}V_{k,k_1,k_2}\,n_{k_1}n_{k_2}. \tag{7}$$

Коэффициент нелинейного взаимодействия определится как

$$V_{k,k_1,k_2}=i\omega_{k_1}\left(1-i\frac{\omega_{k_1}}{\nu_i}\right)\frac{\boldsymbol{k}\hat{\mu}_e\boldsymbol{k}_1}{\boldsymbol{k}_1\hat{\mu}_i\boldsymbol{k}_1}+i\omega_{k_2}\left(1-i\frac{\omega_{k_2}}{\nu_i}\right)\frac{\boldsymbol{k}\hat{\mu}_e\boldsymbol{k}_2}{\boldsymbol{k}_2\hat{\mu}_i\boldsymbol{k}_2}, \tag{8}$$

где $\hat{\mu}_e$, $\hat{\mu}_i$ — тензоры подвижности электронов, ионов. Для E-области ионосферы, учитывая соотношения ионосферных параметров $\nu_e/\omega_{He}\ll1$, $\nu_i/\omega_{Hi}\gg1$, можно упростить соотношение (8) и записать в виде [3]

$$V_{k,k_1,k_2}=i\frac{1}{2\theta_i}\left(\frac{\omega_{k_1}}{k_1^2}-\frac{\omega_{k_2}}{k_2^2}\right)([\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2]e_z+\theta_e k_{1z}k_{2z}). \tag{9}$$

Используем результаты теории слабой турбулентности [5] при предположении малости уширения частот при нелинейном взаимодействии волн. Применяя стандартную процедуру статистического усреднения, можно из уравнения (7) получить уравнение для нелинейного инкремента нарастания волн [4]:

$$\Gamma_k = -\sum_{k_1, k_2} \frac{1}{\Gamma_{k_2}} V_{k,k_1,k_2} V_{k_2,k,-k_1} I_k, \tag{10}$$

здесь $I_k = \langle n_k n_k^* \rangle$. Учитывая соотношение (9) для выбранных пяти взаимодействующих волн, можно записать соответствующие коэффициенты нелинейного взаимодействия волн:

$$V_{k,k_1,k_2} = V_{k,k_2,k_1} = 2i\beta \frac{\omega_{k_1}}{k_1^2} ([\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2]\, \boldsymbol{e}_z); \tag{11}$$

$$V_{k_1,-k_2,k} = V_{k_1,k,-k_2} = i\beta \frac{\omega_{k_1}}{k_1^2} ([\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}]\, \boldsymbol{e}_z); \tag{12}$$

$$V_{k,k',k''} = V_{k,k'',k'} = 2i\beta \frac{\omega_{k'}}{k'^2} ([\boldsymbol{k}', \boldsymbol{k}]\, \boldsymbol{e}_z) + i\beta \frac{\omega_{k'}}{k'^2} \frac{\omega_{He}}{\nu_e} k'_z k''_z; \tag{13}$$

$$V_{k_2,k,-k_1} = V_{k_2,-k_1,k} = i\beta \frac{\omega_{k_1}}{k_1^2} ([\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}]\, \boldsymbol{e}_z); \tag{14}$$

$$V_{k',k,-k''} = V_{k'',k,-k'} = i\beta \frac{\omega_{k'}}{k'^2} ([\boldsymbol{k}', \boldsymbol{k}]\, \boldsymbol{e}_z); \tag{15}$$

$$\omega_{k'} = \frac{k' v_{0e}}{1 + \hat{R}'}, \qquad \omega_{k''} = \frac{k'' v_{0e}}{1 + \hat{R}''}, \qquad \beta = \frac{1}{2} \frac{\nu_i}{\omega_{Hi}}. \tag{16}$$

При выводе этих соотношений учли $k_1 = k_2$ и $k' = k''$. Учет $k'_z \neq 0$ и $k''_z \neq 0$ приводит к незначительным поправкам в коэффициенте нелинейного взаимодействия при выполнении условия

$$\theta_i/\theta_e \ll k_z'^2/k^2 \ll 1/\theta_e. \tag{17}$$

Для выбранных пяти взаимодействующих волн запишем соответствующие уравнения нелинейного взаимодействия, вытекающие из соотношения (10):

$$\Gamma_k = -2 \frac{I_{k_1}}{\Gamma_{k_1}} V_{k,k_1,k_2} V_{k_2,k,-k_1} - 2 \frac{I_{k'}}{\Gamma_{k'}} V_{k,k',k''} V_{k',k,-k''}; \tag{18}$$

$$\Gamma_{k_1} = \Gamma_{k_2} = -\frac{I_k}{\Gamma_{k_1}} V_{k_1,k,-k_2} V_{k_2,k,-k_1} - \frac{I_{k_1}}{\Gamma_k} V_{k,k_1,k_2} V_{k_2,k,-k_1}; \tag{19}$$

$$\Gamma_{k'} = \Gamma_{k''} = -\frac{I_k}{\Gamma_{k'}} V_{k',k,-k''} V_{k'',k,-k'} - \frac{I_{k'}}{\Gamma_k} V_{k,k',k''} V_{k'',k,-k'}. \tag{20}$$

Учитывая соотношения (11)—(16), а также

$$\omega_{k'} = \frac{k' v_{0e}}{1 + R} \frac{1 + R}{1 + \hat{R}'} = \omega_{k_1} \frac{1 + R}{1 + \hat{R}'} \approx \omega_{k_1} (1 + R) \frac{\theta_i}{\theta_e} \frac{k'^2}{k_z'^2}, \quad R = \theta_e^{-1} \theta_i^{-1},$$

запишем уравнения (18)—(20) в виде

$$\Gamma_k = 4\beta^2 \frac{\omega_{k_1}^2}{k_1^4} ([\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}_1]\, \boldsymbol{e}_z)^2 \left(\frac{I_{k_1}}{\Gamma_{k_1}} + (1 + R)^2 \frac{\theta_i^2 k_1^4}{\theta_e^2 k_z'^4} \frac{I_{k'}}{\Gamma_{k'}} \right); \tag{21}$$

$$\Gamma_{k_1} = \beta^2 \frac{\omega_{k_1}^2}{k_1^4} ([k, k_1] e_z)^2 \left(\frac{I_k}{\Gamma_{k_1}} + 2 \frac{I_{k_1}}{\Gamma_k} \right); \tag{22}$$

$$\Gamma_{k'} = \beta^2 \frac{\omega_{k_1}^2}{k_1^4} ([k, k_1] e_z)^2 (1 + R)^2 \frac{\theta_i^2 k_1^4}{\theta_e^2 k_z'^4} \left(\frac{I_k}{\Gamma_{k'}} + 2 \frac{I_{k'}}{\Gamma_k} \right). \tag{23}$$

Если ввести обозначения

$$\Gamma_k = \beta \frac{\omega_{k_1}}{k_1^2} |[k, k_1] e_z| A_k, \qquad b = (1 + R)^2 \frac{\theta_i^2}{\theta_e^2} \frac{k_1^4}{k_z'^2}, \tag{24}$$

систему уравнений (21)—(23) можно переписать в виде

$$A_k = 4 \left(\frac{I_{k_1}}{A_{k_1}} + b \frac{I_{k'}}{A_{k'}} \right); \tag{25}$$

$$A_{k_1} = \frac{I_k}{A_{k_1}} + 2 \frac{I_{k_1}}{A_k}; \tag{26}$$

$$A_{k'} = b \left(\frac{I_k}{A_{k'}} + 2 \frac{I_{k'}}{A_k} \right). \tag{27}$$

Можно разрешить эту систему уравнений относительно величин A_k, $A_{k_1}, A_{k'}$, однако мы найдем приближенные решения в ряде частных случаев, наиболее интересных с точки зрения возможных приложений.

Из уравнения (7) при учете свойств коэффициентов нелинейного взаимодействия

$$V_{k,k_1,k_2} + V^*_{k_1,-k_2,k} + V^*_{k_2,k,-k_1} = 0$$

и

$$V_{k,k',k''} + V^*_{k',k,-k''} + V_{k'',k,-k'} = 0,$$

можно получить уравнение

$$\partial/\partial t \, (I_k + I_{k'} + I_{k''}) = \gamma_k I_k + \gamma_{k'} I_{k'} + \gamma_{k_1} I_{k_1}.$$

При условии малой надкритичности интенсивность волн вне конуса линейной генерации мала:

$$I_k/I_{k_1} \sim I_{k'}/I_{k_1} \ll 1.$$

В стационарном состоянии это соответствует условию $|\gamma_{k_1}/\gamma_k| \ll 1$, если $\gamma_k \sim \gamma_{k'}$. Также считаем, что справедливо условие

$$b \ll 1/2 \, (I_{k_1}/I_{k'})^2, \tag{28}$$

которое следует из принятого неравенства (17), так как при этом $b \ll 1$.

В этом частном случае можно найти приближенное решение системы уравнений (25)—(27), пренебрегая вторыми членами в правой части уравнений (25) и (27). Это справедливо при выполнении условий

$$\frac{A_{k'}}{A_k} \ll \frac{1}{2} \frac{I_k}{I_{k'}}, \qquad \frac{A_{k'}}{A_{k_1}} \gg b \frac{I_{k'}}{I_{k_1}}. \tag{29}$$

В этом случае приближенное решение системы уравнений можно записать в виде

$$\frac{A_{k'}}{A_{k_1}} = \left(\frac{b}{2} \right)^{1/2}, \quad \frac{A_k}{A_{k_1}} = 2 \frac{I_{k_1}}{I_k}, \quad \frac{A_{k'}}{A_k} = \frac{\sqrt{2b}}{4} \frac{I_k}{I_{k_1}}. \tag{30}$$

Подстановкой найденных решений можно убедиться, что система неравенств (29) удовлетворяется при учете (28). Из решения системы (30) следует, что в условиях малой надкритичности энергия линейно растущих волн перекачивается, в основном, в волну с волновым вектором $\boldsymbol{k}$ где и происходит основная диссипация энергии.

Из системы (30) следуют соотношения для нелинейных инкрементов

$$\Gamma_{k'}/\Gamma_{k_1} \ll 1, \qquad \Gamma_{k}/\Gamma_{k'} \gg 1, \qquad \Gamma_{k'}/\Gamma_{k} \ll 1.$$

При высоком уровне надкритичности интенсивность волн вне конуса линейной генерации может быть велика, $I_k \gg I_{k_1}$. Если $|\gamma_{k_1}/\gamma_k| \gg 1$ и $\gamma_k \sim \gamma_{k'}$, тогда $I_k + I_{k'} \gg I_{k_1}$. При этом возможна ситуация, когда $I_k \gg I_{k'}$. В этом случае, как следует из (30), $\Gamma_{k'} \sim \Gamma_k$ и $\Gamma_{k_1} > \Gamma_k$, т. е. нелинейные инкременты волн с ненулевыми ракурсными углами, такого же порядка, как для волн, распространяющихся ортогонально дрейфовой скорости электронов.

Таким образом, перекачка энергии линейно нарастающих волн в волны с ненулевыми ракурсными углами возможна только при высоком уровне надкритичности. В этом случае максимальна интенсивность волн с волновыми векторами $\boldsymbol{k}$, ортогональными направлению дрейфовой скорости электронов.

Исследование системы уравнений (18)—(20) взаимодействующих волн с волновыми векторами, удовлетворяющими соотношению

$$k_{\parallel}^2 \theta_e \gg |([\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}_1]\, \boldsymbol{e}_z)|,$$

показало, что такое взаимодействие невозможно.

Таким образом, проведенный в работе анализ показал, что нелинейное взаимодействие фарлей-бунемановских волн при достаточно высоком уровне надкритичности может приводить к образованию волн с достаточно большими ракурсными углами. Эти волны можно диагностировать с помощью радиолокационной техники.

ЛИТЕРАТУРА

1. Sudan R. N. — J. Geophys. Res., 1983, 88 A6, p. 48.
2. Sudan R. N., Keskinen M. I. — J. Geophys. Res., 1984, 89 A11, p. 9840.
3. Волосевич А. В., Липеровский В. А., Лившиц М. А. В кн: Исследование высокоширотной ионосферы и магнитосферы Земли. — Л.: Наука, 1982, с. 80.
4. Гельберг М. Г., Федоров В. П. — Геомагнетизм и аэрономия, 1983, 23, № 2, с. 230.
5. Кадомцев Б. Б. В кн.: Вопросы теории плазмы. — М.: Атомиздат, 1964, № 4, с. 188.

Могилевский государственный
педагогический институт

Поступила в редакцию
30 мая 1986 г.

NONLINEAR INTERACTION OF ELECTROSTATIC WAVES IN THE *E*-REGION OF THE IONOSPHERE

A. V. Volosevich, M. G. Cel'berg

The possibility of nonlinear three-dimensional interaction of Farley-Buneman waves in the ionosphere *E*-region is investigated. It is shown that this interaction can form waves propagating at some angle to the plane perpendicular to the magnetic field. These waves can be found in radar backsatter measurements.