

ния сначала выравнивались на входе квадратора спектральные плотности флуктуаций в области высоких частот ( $(4) \rightarrow (3)$ , рис. 2), затем — при увеличении пропускаемого через большеобъемный микрорезистор тока до 16 мА — устанавливались равными на входе квадратора и спектральные плотности избыточного низкочастотного шума в обоих образцах ( $(2) \rightarrow (1)$ ).

Как видно из рис. 3б, гистограмма мощности  $1/f$ -шума при увеличении объема микрорезистора становится более симметричной, а величина «хвоста» существенно уменьшается. При этом гистограмма сужается по сравнению с рис. 3а, и теперь соответствующее гауссовой модели шума хи-квадрат распределение (кривая 2) лишь в шесть раз уже наблюдаемой гистограммы. Типичные (усредненные по семи подобным гистограммам) параметры вероятностного распределения мощности:  $\eta \approx 1,01$ ,  $\sigma/\langle z \rangle \approx 0,12$ ,  $\gamma_2 \approx 1,06$ ,  $\gamma_4 \approx 2,7$ .

**2. Заключение.** Проведены измерения вероятностных характеристик текущей мощности шума в металлических мезоскопических проводниках — тонкопленочных хромовых микрорезисторах. Наблюдаемые гистограммы вероятностного распределения текущей мощности малообъемных образцов демонстрируют те же самые характерные черты, которые наблюдались в экспериментах [1] с малообъемными графитовыми микрорезисторами: сочетание асимметричного пика (значительно более широкого, чем предсказывает гауссова модель шума) с длинным «хвостом» справа и наличие слева от наиболее вероятного значения области весьма маловероятных значений.

Эти своеобразные негауссовые свойства наиболее отчетливо проявляются в образцах предельно малого объема. При этом одномерное вероятностное распределение шума  $x(t)$  при сравнительно большом числе носителей заряда может быть как сильно негауссовым, например, в случае островковых, переколяционных микропроводников (при сильной коррелированности отдельных актов переноса заряда), так и весьма близким к гауссову — как это наблюдалось в данной работе (см. также [1, 2]). Для выявления свойств, отражающих нетривиальную (негауссову) временную структуру шума, необходимо непосредственно измерять его корреляторы четвертого и более высокого порядка; в частности, можно анализировать вероятностное распределение текущей мощности шума в определенной полосе частот (как это сделано в [1] и в настоящей работе).

Полученные экспериментальные результаты могут представлять интерес для шумовой диагностики проводящих сред, практического расчета характеристик низкочастотных шумов микроэлементов, статистических оценок допустимых токовых режимов и размеров микропроводников.

Авторы выражают глубокую благодарность за помощь в изготовлении образцов-резисторов Ю. М. Грязнову, Т. Н. Бочковой, Н. И. Дружининой, В. П. Саичеву, Э. П. Волковой, А. В. Познякову.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Александров А. А., Бочкин Г. Н., Дубков А. А., Чикин А. И. — Изв. вузов — Радиофизика, 1986, 29, № 8, с. 980.
2. Restle P. J., Hamikton R. J., Weissman M. B., Love M. S. — Phys. Rev. B, 1985, 31, № 4, p. 2254.

Горьковский государственный  
университет

Поступила в редакцию  
1 июля 1986 г.

**Примечание при корректуре.** В последнее время авторами проведены измерения вероятностного распределения текущей мощности  $1/f$ -шума тонкопленочных хромовых микропроводников меньшего объема и другой технологии изготовления. Микрорезисторы с размерами  $10 \times 10 \times 3 \cdot 10^{-3}$  мкм были изготовлены с помощью жидкостного травления центральной части мостика-перемычки (с «геометрией», подобной рис. 1), имеющей толщину 0,12 мкм и ширину 10 мкм. Экспериментально снятые гистограммы мощности  $1/f$ -шума новых образцов имели вид, подобный гистограмме на рис. 3а и примерно те же характерные параметры.

## ПИСЬМО В РЕДАКЦИЮ «РАДИОФИЗИКИ»

Опубликованная в № 10 за 1986 г. статья С. В. Зайцева «Распределение электромагнитного поля вблизи края импедансной полуплоскости» [1] посвящена нахождению структуры поля у края полуплоскости, на которой заданы импедансные граничные условия

$$E_z = \mp W H_p, \quad E_p = \pm W H_z, \quad \varphi = 0,2\pi, \quad (1)$$

где  $E$  и  $H$  — напряженность электрического и магнитного поля;  $W$  — поверхностный импеданс;  $p, \varphi, z$  — цилиндрические координаты, ось  $z$  совпадает с ребром полуплоскости; верхние (нижние) знаки относятся к поверхности  $\varphi=0$  ( $\varphi=2\pi$ ). Результатом

[1] является представление компонент поля на плоскости  $\varphi=0$ ,  $\pi$  в виде ряда по целым и полуцелым степеням параметра, пропорциональному расстоянию до ребра полуплоскости. Если такое представление справедливо, то оно должно естественным образом получаться непосредственным применением метода Мейкснера [2].

Применим метод Мейкснера к задаче [1]. Пусть импедансная полуплоскость соединена с электрической стенкой при  $\varphi=\pi$ . Будем искать общий вид решения уравнений Максвелла в полупространстве  $0 < \varphi < \pi$  с граничными условиями (1) при  $\varphi=0$  и условием  $E_\rho = E_z = 0$  при  $\varphi=\pi$ . Зависимость полей от времени  $t$  и координаты  $z$  выберем в виде  $\exp(-ik_0ct + ih_0z)$ ,  $k_0$  — волновое число,  $c$  — скорость света,  $h_0$  — постоянная распространения вдоль оси  $z$ . Далее экспоненциальный множитель опускается. Полагая  $H_z = I\psi$ ,  $E_z = \xi I\chi$ , где  $I$  — размерный множитель,  $\xi$  — волновой импеданс среды, сведем задачу к двумерным уравнениям Гельмгольца

$$\left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + 1 \right] \begin{Bmatrix} \psi \\ \chi \end{Bmatrix} = 0 \quad (2)$$

с граничными условиями

$$\frac{\partial \psi}{\partial \varphi} = 0, \quad \chi = 0 \quad \text{при } \varphi = \pi, \quad (3)$$

$$\frac{ik}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} + ih \frac{\partial \chi}{\partial r} = w\psi, \quad ih \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{ik}{r} \frac{\partial \chi}{\partial \varphi} = -\frac{1}{w} \chi \quad \text{при } \varphi = 0.$$

Здесь  $k = k_0/\chi$ ,  $h = h_0/\chi$ ,  $r = \rho\chi$ ,  $\chi = \sqrt{k_0^2 - h_0^2}$ ,  $w = W/\xi$ . Искомые функции  $\psi$  и  $\chi$ , следуя [2], представим в виде

$$\psi = r^\tau \sum_{m=0}^{\infty} a_m(\varphi) r^m, \quad \chi = r^\tau \sum_{m=0}^{\infty} b_m(\varphi) r^m, \quad \tau \geq 0. \quad (4)$$

Для коэффициентов  $a_m$ ,  $b_m$  получаем систему дифференциальных уравнений

$$a_m'' + (m+\tau)^2 a_m + a_{m-2} = 0, \quad b_m'' + (m+\tau)^2 b_m + b_{m-2} = 0 \quad (5)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} a_m'(\pi) &= 0, \quad b_m(\pi) = 0, \quad ik a_m'(0) + ih(m+\tau) b_m(0) = w a_{m-1}(0), \\ ikh(m+\tau) a_m(0) - ikb_m'(0) &= -\frac{1}{w} b_{m-1}(0). \end{aligned} \quad (6)$$

Решая (5) при  $m=0$ , найдем

$$a_0 = P_0 \cos \tau \varphi + Q_0 \sin \tau \varphi, \quad b_0 = S_0 \cos \tau \varphi + T_0 \sin \tau \varphi. \quad (7)$$

Подставляя (7) в (6), получим систему однородных уравнений

$$\begin{aligned} -\tau P_0 \sin \pi \tau + \tau Q_0 \cos \pi \tau &= 0, \quad S_0 \cos \pi \tau + T_0 \sin \pi \tau = 0, \\ ik \tau Q_0 + i \tau S_0 &= 0, \quad i \tau P_0 - ik \tau T_0 = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

относительно постоянных  $P_0$ ,  $Q_0$ ,  $S_0$ ,  $T_0$ . Условие существования ненулевого решения этой системы дает  $\tau^2 \sin 2\pi \tau = 0$ . Отсюда  $\tau = 0; 1/2; 1; 3/2, \dots$ . Проведем дальнейший поиск решения, например, при наименьшем значении  $\tau = 0$ . Тогда  $b_0(\varphi) = 0$ ,  $a_0(\varphi) = P_0$ , где  $P_0$  — произвольная постоянная. Далее из (5) при  $m=1$  находим

$$a_1 = P_1 \cos \varphi + Q_1 \sin \varphi, \quad b_1 = S_1 \cos \varphi + T_1 \sin \varphi \quad (9)$$

и после подстановки в (6) имеем

$$Q_1 = 0, \quad S_1 = 0, \quad ikQ_1 + ihS_1 = wP_0, \quad i \tau P_1 - ikT_1 = 0. \quad (10)$$

Эта система оказывается совместной только при  $P_0 = 0$  и дает  $Q_1 = 0$ ,  $S_1 = 0$ ,  $T_1 = P_1 h/k$ , где  $P_1$  произвольно. Но из условия существования решения для  $m=2$  получается, что  $P_1 = 0$ . Продолжая этот рекуррентный процесс, убеждаемся, что при  $\tau = 0$  все коэффициенты  $a_m$  и  $b_m$  в разложениях (4) оказываются нулевыми. Тот же нулевой результат, как легко убедиться, получается и при любом другом значении  $\tau$ .

Таким образом, приходим к выводу, что решение уравнений Максвелла с граничными условиями (1) не может быть представлено в виде степенных рядов (4).

Аналогичное утверждение в случае двусторонних граничных условий импедансного типа содержится в работе [3]. Там же указано, что разложения (4) следует дополнить логарифмическими членами, а точнее, искать  $\psi$  и  $\chi$  в виде

$$\psi = r^\tau \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^m a_{mn}(\varphi) r^m \ln^n r, \quad \chi = r^\tau \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^m b_{mn}(\varphi) r^m \ln^n r. \quad (11)$$

Для коэффициентов  $a_{00}$  и  $b_{00}$  вновь получаем систему (8), и, следовательно, показатель  $\tau$  принимает значения, приведенные выше. Однако теперь дальнейшее последовательное решение систем уравнений для  $a_{mn}$ ,  $b_{mn}$  уже не приводит к нулевому решению и позволяет найти общий вид распределения всех компонент поля. Приведем здесь первые члены разложений, для нахождения которых следует принять  $\tau=0$  и  $\tau=1/2$ :

$$\begin{aligned}
 H_z &= I \left\{ P_{00} - \frac{h}{k} S_{00} \sin \frac{\varphi}{2} r^{1/2} - \frac{ik}{\pi} w P_{00} \cos \varphi r \ln r + \dots \right\}, \\
 E_z &= \xi I \left\{ S_{00} \cos \frac{\varphi}{2} r^{1/2} - \frac{ih}{\pi} w P_{00} \sin \varphi r \ln r + \frac{ih}{\pi} w P_{00} (\pi - \varphi) \cos \varphi r + \dots \right\}, \\
 E_\rho &= \xi I \left\{ -\frac{1}{\pi} w P_{00} \sin \varphi \ln r - \frac{1}{\pi} w P_{00} \sin \varphi + \frac{1}{\pi} w P_{00} (\pi - \varphi) \cos \varphi + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{ik}{2\pi^2} w^2 P_{00} \sin 2\varphi r \ln^2 r - \frac{ik}{\pi^2} w^2 P_{00} (\pi - \varphi) \cos 2\varphi r \ln r + \dots \right\}, \\
 E_\varphi &= \xi I \left\{ -\frac{1}{\pi} w P_{00} \cos \varphi \ln r - \frac{1}{\pi} w P_{00} \cos \varphi - \frac{1}{\pi} w P_{00} (\pi - \varphi) \sin \varphi + \dots \right\}, \\
 H_\rho &= I \left\{ \frac{i}{2k} S_{00} \sin \frac{\varphi}{2} r^{-1/2} + \frac{1}{\pi w} S_{00} \sin \frac{3\varphi}{2} r^{1/2} \ln r + \right. \\
 &\quad \left. + \left[ \frac{2}{3\pi w} S_{00} \sin \frac{3\varphi}{2} - \frac{1}{\pi w} S_{00} (\pi - \varphi) \cos \frac{3\varphi}{2} \right] r^{1/2} - ih P_{00} \cos^2 \varphi r + \dots \right\}, \\
 H_\varphi &= I \left\{ \frac{i}{2k} S_{00} \cos \frac{\varphi}{2} r^{-1/2} + \frac{1}{\pi w} S_{00} \cos \frac{3\varphi}{2} r^{1/2} \ln r + \dots \right\}.
 \end{aligned} \tag{12}$$

Для сравнения с результатами работы [1] следует вычислить поля на импедансной полуплоскости и на электрической стенке, полагая в (12)  $\varphi=0$  и  $\varphi=\pi$ . Как видно при этом в разложениях полей некоторые члены, содержащие логарифмические функции, сохраняются. Таким образом, сделанное в [1] утверждение о том, что при  $\varphi=0, \pi$  разложение полей имеет вид степенного ряда, оказалось ошибочным и привело к тому, что главный член в разложении  $E_\varphi$  оказался неправильным. Из формулы (12) следует, что  $E_\varphi|_{\varphi=0, \pi} \sim \ln r$ , в то время как в табл. 3 из [1] приведено  $E_\varphi|_{\varphi=0, \pi} \sim \text{const}$ . Кроме того, в этой таблице неверно даны вторые члены разложений  $E_\rho|_{\varphi=0}$ ,  $H_\varphi|_{\varphi=0}$ ,  $H_z|_{\varphi=0}$  и для  $H_\rho|_{\varphi=\pi}$ . Подобные недостатки имеются и среди других табл. 1, описывающих поле вблизи общего ребра импедансной полуплоскости и магнитной стенки. Мы не выписываем здесь правильных разложений этого поля, поскольку их первые члены совпадают с приведенными в [3]. Отметим только факт наличия логарифмической особенности [3] у перпендикулярной к ребру составляющей нитного поля.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Зайцев С. В. — Изв. вузов — Радиофизика, 1986, 29, № 10, с. 1215.
2. Meixner J. — IEEE Trans. AP, 1972, 20, № 4, p. 442.
3. Бравер И. М., Гарб Х. Л., Фридберг П. Ш., Яковер И. М. — ДАН СССР, 1986, 286, № 5, с. 1092.

И. М. Бравер, Х. Л. Гарб,  
П. Ш. Фридберг, И. М. Яковер.