

УДК 621.372.8.049.75

**О РЕШЕНИИ ПОВЕРХНОСТНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
ДЛЯ ПЛАНАРНЫХ СВЧ СТРУКТУР**

А. М. Лерер

Получено решение поверхностных интегральных уравнений для прямоугольной области. Рассчитаны резонансная частота и потери на излучение в микрополосковом резонаторе. Исследована частотная зависимость волнового сопротивления микрополосковой линии.

Поверхностные интегральные уравнения (ПИУ) используются при расчете СВЧ резонаторов и неоднородностей в планарных линиях СВЧ [1-7]. Так как численное решение ПИУ требует больших затрат машинного времени, то его сокращение — задача большой важности. Уменьшить время счета можно выбором базисных функций, учитывающих структуру поля или токов в планарных СВЧ устройствах [3, 6, 7], а также преобразованием исходных ПИУ к новым [4, 8, 9]. В настоящей работе способ решения ПИУ, изложенный в [8, 9], применен для ПИУ, записанных для прямоугольной области. Полученное решение используется, или может быть использовано, для расчета большого количества планарных резонаторов и также, аналогично [6, 7], неоднородностей в линиях СВЧ.

В [8] показано, что решение системы поверхностных интегральных уравнений относительно токов на металлических полосках может быть сведено к решению уравнений

$$\iint_{-\infty}^{\infty} \frac{V(\alpha, \beta) e^{i\mathbf{T}}}{R^2 \varphi_e(R, k)} d\alpha d\beta = \frac{f(x, z)}{i\omega\mu_0}, \quad x, z \in S; \tag{1}$$

$$\iint_{-\infty}^{\infty} \frac{U(\alpha, \beta) e^{i\mathbf{T}}}{R^2 \varphi_M(R, k)} d\alpha d\beta = a(x, z) \varepsilon_0, \quad x, z \in S, \tag{2}$$

где S — поверхность металлических полосок, $T = \alpha x + \beta z$, $R^2 = \alpha^2 + \beta^2$, f, a — неизвестные функции, удовлетворяющие на S уравнению Лапласа и связанные между собой равенством

$$\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{i}{\omega} \frac{\partial a}{\partial x} = 0, \tag{3}$$

$k = 2\pi/\lambda$, φ_e и φ_M — известные функции, определенные, например, в [10]. Уравнения $\varphi_e(h, k) = 0$ и $\varphi_M(h, k) = 0$ являются дисперсионными уравнениями соответственно LE - и LM -волн подложки. В (1), (2) V и U — неизвестные функции, связанные с фурье-образами токов на металлических полосках $j_{z,x}(\alpha, \beta)$ равенствами

$$\begin{aligned} V(\alpha, \beta) &= -i\alpha j_z + i\beta j_x, \\ U(\alpha, \beta) &= -i\beta j_z - i\alpha j_x. \end{aligned} \tag{4}$$

Рассмотрим решение системы (1) — (3). Используя решение уравнения Лапласа в полярных координатах ($x = r \cos \varphi$, $z = r \sin \varphi$), представим функцию f в виде

$$f = i\omega\mu_0 \sum_{t=0}^{\infty} f_t r^{2t+\mu} \cos(2t + \mu)\varphi, \quad (5)$$

где f_t — неизвестные коэффициенты,

$$\mu = \begin{cases} 0 & \text{— плоскость } x=0 \text{ — электрическая стенка} \\ 1 & \text{— } x=0 \text{ — магнитная стенка} \end{cases}$$

Предполагается, что плоскость $z=0$ — электрическая стенка. Для магнитной стенки в (5) $\cos(2t+\mu)$ нужно заменить на $\sin(2t+|1-\mu|)$.

Систему (1), (2) решаем методом Галеркина в спектральной области

$$V(\alpha, \beta) = \sum_{j,m=0}^{\infty} X_{jm} V_{jm}(\alpha, \beta), \quad U(\alpha, \beta) = \sum_{j,m=0}^{\infty} Z_{jm} U_{jm}(\alpha, \beta),$$

где X_{jm} и Z_{jm} — неизвестные координаты. Учитывая (4) и аппроксимацию Фурье-образов токов $j_{z,x}(\alpha, \beta)$, введенную в [6, 7], представим U_{jm} и V_{jm} в виде

$$U_{jm}(\alpha, \beta) = J_{2j+\nu}(\alpha l) J_{2m+\tau}(\beta l'),$$

$$V_{jm}(\alpha, \beta) = U_{jm}(\alpha, \beta) [\delta_{m+\tau}(\alpha/\beta) + \delta_{j+\nu}(\beta/\alpha)] = U_{jm} \chi_{jm}(\alpha, \beta),$$

где

$$\nu = |1-\mu|, \quad m+j+\tau+\nu \neq 0,$$

$$\tau = \begin{cases} 0 & \text{— плоскость } z=0 \text{ — магнитная стенка} \\ 1 & \text{— } z=0 \text{ — электрическая стенка} \end{cases}$$

$$\delta_i = \begin{cases} 0 & i=0 \\ 1 & i \neq 0 \end{cases},$$

J_j — функция Бесселя.

В результате получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j,m=0}^{\infty} X_{jm} \iint_{-\infty}^{\infty} V_{jm}(\alpha, \beta) V_{pq}(\alpha, \beta) \frac{d\alpha d\beta}{R^2 \varphi_e} = \sum_{t=0}^{\infty} f_t^1 B_{tpq}, \quad (6)$$

$$\sum_{j,m=0}^{\infty} Z_{jm} \iint_{-\infty}^{\infty} U_{jm}(\alpha, \beta) U_{pq}(\alpha, \beta) \frac{d\alpha d\beta}{R^2 \varphi_M} = k^2 \sum_{t=0}^{\infty} f_t^1 D_{tpq},$$

$$p, q = 0, 1, \dots,$$

где (см. Приложение 1)

$$D_{tpq} = \begin{cases} C_{2t+|\nu-\tau|}^{2p+\nu} l^{2p+\nu} (l')^{2q+\tau} (-1)^q, & t = q+p + \frac{\nu+\tau-|\nu-\tau|}{2} \\ 0, & t \neq q+p + \frac{\nu+\tau-|\nu-\tau|}{2} \end{cases},$$

$$B_{tpq} = D_{tpq} (\delta_{q+\tau} - \delta_{p+\nu}),$$

f_t^1 отличается от f_t множителем, зависящим только от индекса t .

Количество уравнений в системе (6) меньше числа неизвестных. Дополнительные уравнения получим из условия равенства нулю токов вне металлических полосок:

$$\bar{j}_z(x, z) = i \iint_{-\infty}^{\infty} [\beta U(\alpha, \beta) + \alpha V(\alpha, \beta)] \frac{\exp(-iT)}{R^2} d\alpha d\beta = 0, \quad (7)$$

$$\bar{j}_x(x, z) = i \iint_{-\infty}^{\infty} [\alpha U(\alpha, \beta) - \beta V(\alpha, \beta)] \frac{\exp(-iT)}{R^2} d\alpha d\beta = 0.$$

В Приложении 2 показано, что из (7) следует

$$\sum_{jm=0}^{\infty} [X_{jm}B_{tjm} - Z_{jm}D_{tjm}] = 0, \quad t=0, 1, \dots \quad (8)$$

Равенство нулю определителя системы (6), (8) является уравнением для нахождения резонансной частоты.

Преимущество систем (6), (8) перед системой уравнений, получаемой при решении поверхностных интегральных уравнений относительно токов на полосках [6, 7], — большая разреженность матрицы, а значит, меньшее количество двойных интегралов, которые необходимо находить численно.

При расчетах экранированных структур необходимо заменить интегралы на ряды:

$$\int F(\alpha) d\alpha \rightarrow \frac{\pi}{L} \sum_{n=0}^{\infty} F\left(\frac{n+x}{L}\pi\right), \text{ если металлические экраны расположены в плоскостях } |x|=L,$$

где x — координата экрана.

$$\int F(\beta) d\beta \rightarrow \frac{\pi}{d} \sum_{n=0}^{\infty} F\left(\frac{n+\gamma}{d}\pi\right), \text{ если металлические экраны расположены в плоскостях } |z|=d. \text{ Величины } \kappa \text{ и } \gamma \text{ принимают значения } 0 \text{ или } 1/2 \text{ и определяются граничными условиями соответственно при } x=0 \text{ и } z=0.$$

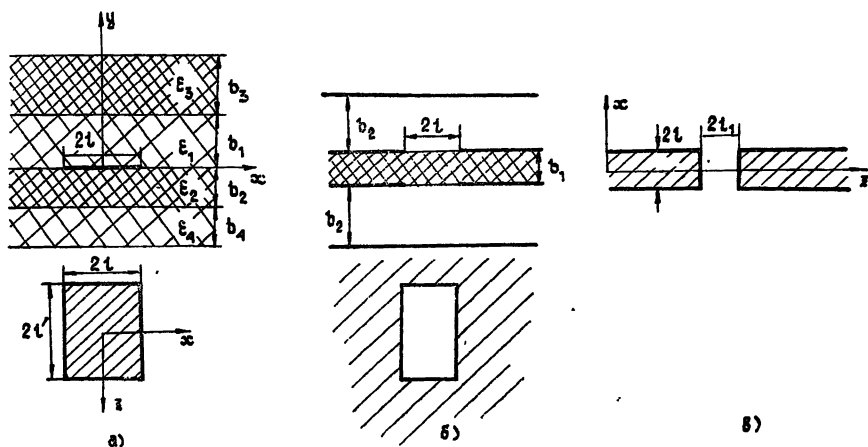


Рис. 1.

Полученное решение может быть использовано при расчете щелевых структур (рис. 1б), если заменить

$$\varphi_e \leftrightarrow 1/\varphi_M, \quad J_z \rightarrow E_x, \quad J_x \rightarrow -E_z,$$

где $E_{x,z}$ — компоненты электрического поля на щелях.

Определитель бесконечной системы уравнений (6), (8) находится методом редукции непосредственно, либо после преобразования исходной системы к новой меньшего порядка. Для этого запишем (6) и (8) в матричной форме:

$$\hat{A}_e \hat{X} = \hat{B} \hat{f}, \quad \hat{A}_M \hat{Z} = \hat{D} \hat{f}, \quad \hat{B}^T \hat{X} - \hat{D}^T \hat{Z} = 0.$$

Отсюда получим

$$(\hat{B}^T \hat{A}_e^{-1} \hat{B} - \hat{D}^T \hat{A}_M^{-1} \hat{D}) \hat{f} = 0.$$

Для расчетов собственной частоты резонаторов с погрешностью по внутренней сходимости не более одного процента достаточно в (6)

учесть один-два члена в рядах по j и два-три члена в рядах по m . В интегралах (6) удобно перейти к системе координат $\alpha=R \cos \theta$, $\beta=R \sin \theta$. Тогда, например, интеграл во втором уравнении системы (6) будет равен

$$4 \int_0^{\infty} \frac{dR}{R \varphi_M(R, k)} \int_0^{\pi/2} U_{jm}(R \cos \theta, R \sin \theta) U_{pq}(R \cos \theta, R \sin \theta) d\theta. \quad (9)$$

Поскольку в подложках исследуемых микрополосковых структур может распространяться по крайней мере одна LM -волна, то подынтегральное выражение имеет полюса на действительной оси $\varphi_M(R, k) = 0$. Вычисление интегралов (9) описано в Приложении 3. С увеличением частоты на действительной оси появляются полюса $\varphi_e(R, k) = 0$. Таким образом, матричные элементы системы (6), а значит и резонансные частоты будут комплексными, т. е. в исследуемых структурах всегда существуют потери на излучение.

В приближении малых потерь процедуру нахождения комплексных корней определителя

$$|A'(k' + ik'') + iA''(k' + ik'')| = 0$$

можно заменить нахождением действительных корней действительных определителей

$$|A'(k' + k'') + A''(k' + k'')| = 0, \quad |A'(k')| = 0.$$

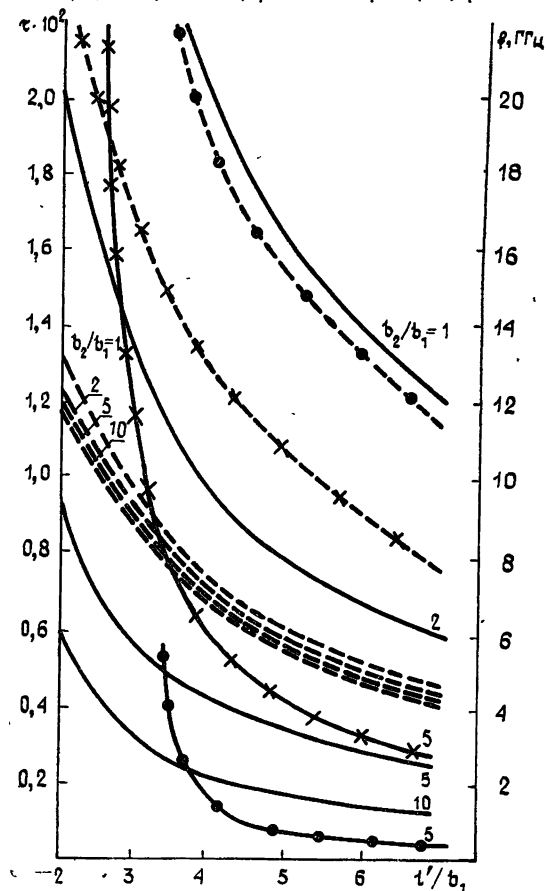


Рис. 2.

— τ ; --- f ; \bullet — 3 резонанс; \ast — \ast , \times — 2 резонанс.

На рис. 2. представлены результаты расчетов $\tau = k''/k'$ и собственных частот прямоугольного микрополоскового резонатора на под-

ложке $b_1=1$ мм, $\epsilon_1=9,8$, $\epsilon_2=1$, $l/b_1=0,5$, $b_3=b_4=0$. Приближение верхнего экрана к подложке сравнительно слабо сказывается на величине собственной частоты резонатора, но сильно увеличивает потери. Потери на излучение при уменьшении b_2/b_1 увеличиваются не только у резонаторов, но и на любой неоднородности в МПЛ. Это объясняется тем, что уменьшение b_2/b_1 уменьшает постоянную распространения регулярной линии ([11], с. 115) и увеличивает постоянную распространения низшей LM -волны подложки, дисперсионная кривая которой, как известно, является границей между непрерывным и дискретным спектрами данной МПЛ [12]. С увеличением частоты постоянные распространения регулярной МПЛ и LM -волны подложки увеличиваются, но разница между ними уменьшается. Потери на излучение поэтому увеличиваются с частотой.

Таблица 1

l'/b_1	f_1 (ГГц)	τ_1	f_2	τ_2	f_3	τ_3
1	27,93	0,0079	—	—	—	—
2	16,37	0,0172	30,50	0,0016	44,74	0,0002
3	11,96	0,026	21,79	0,0028	31,45	0,0011
4	9,60	0,035	17,13	0,0041	24,69	0,0017

В табл. 1 приведены результаты расчетов щелевого резонатора (рис. 16) при $b_1=1$ мм, $l/b_1=0,5$, $\epsilon_2=1$, $b_2/b_1=3$, $\epsilon_1=9,8$. В отличие от микрополоскового резонатора потери щелевого резонатора с увеличением частоты уменьшаются. При уменьшении b_2/b_1 потери на излучение щелевого резонатора увеличиваются (табл. 2, $l/b_1=0,5$, $l'/b_1=3$).

Таблица 2

b_2/b_1	0,5	1	2	3	5
f (ГГц)	17,17	13,79	12,30	11,96	11,62
τ	0,151	0,078	0,039	0,026	0,015

Приведенные результаты расчетов могут быть использованы для нахождения комплексной фазы отражения $\varphi=\varphi'+j\varphi''$ от открытого конца МПЛ или короткозамкнутого конца щелевой линии:

$$\varphi' \approx f \text{ (ГГц)} \frac{n\pi l' \text{ (мм)}}{75} - m\pi, \quad \varphi'' \approx \frac{n\pi l'}{75} \tau f, \quad (10)$$

m — номер резонанса, n — коэффициент замедления регулярной линии (МПЛ или щелевой). Так как эти формулы получены в предположении отсутствия взаимодействия между краями резонатора по высшим типам волн соответствующей регулярной линии, то их точность уменьшается при уменьшении l' .

Из (10) следует, что при заданной частоте резонатора потери на излучение пропорциональны $1/l'$. При этом длина резонатора тем больше, чем больше m , и добротность высших колебаний резонатора больше, чем добротность основного.

С помощью разработанного алгоритма были исследованы также ряд других неоднородностей и резонаторов. Приведем результаты исследования частотной зависимости волнового сопротивления МПЛ. Как известно, для МПЛ возможны различные способы определения волнового сопротивления, например

$$Z_{Bn}(f) = Z(0) \frac{n(0)}{n(f)}, \quad Z_{B1} = \frac{2P}{I^2}, \quad \dots$$

где P — передаваемая мощность, I — продольный ток. Результаты расчетов по всем формулам совпадают при $f \rightarrow 0$, но существенно расходятся с увеличением f . Так, с ростом частоты Z_{Bn} убывает для всех типов МПЛ, Z_{B1} растет для обычной МПЛ, но уменьшается, причем быстрее, чем Z_{Bn} , для МПЛ на подвешенной подложке и МПЛ с лицевой связью (синфазный режим) [11]. Выбор формулы для расчета волнового сопротивления определяется видом неоднородностей в МПЛ и должен проверяться экспериментально или на основе строгого электродинамического расчета. В настоящей работе частотная зависимость волнового сопротивления определялась с помощью расчета нормированного сопротивления узких зазоров в МПЛ (рис. 1в). Если $l_1 \ll \lambda$ и $l_2 \ll \lambda$, то зазор можно описать емкостью. Его нормированное сопротивление равно $Z = 1/2\pi f C Z_B$, поэтому

$$Z_{B,1}/Z_{B,2} = f_2 Z_2 / f_1 Z_1. \quad (11)$$

Таблица 3

f_2 (ГГц)	I	II	III
40	1,02	1,003	1,016
50	1,046	1,007	1,037
60	1,068	1,012	1,062
70	1,083	1,017	1,09
80	1,100	1,024	1,117
90	1,107	1,031	1,144

В табл. 3 приведены результаты расчетов отношения волновых сопротивлений, рассчитанных по формуле (11) (столбец I) $Z_{Bn,1}/Z_{Bn,2}$ (столбец II) и $Z_{B1,1}/Z_{B1,2}$ (столбец III) для МПЛ с лицевой связью на подвешенной подложке ($\epsilon=3,78$, толщина 0,2 мм) в H -плоскости волновода $2,4 \times 1,2$ мм ($l=0,1$, $l_1=0,01$ мм, $f_1=30$ ГГц). Видно, что частотные зависимости волнового сопротивления, определенного на основе электродинамического расчета неоднородности и Z_{B1} , близки. Этот вывод подтверждают также проведенные расчеты для обычной МПЛ, МПЛ на подвешенной подложке. Формула (11) была также проверена при расчете зазоров в полосковой линии с однородным диэлектрическим наполнением. Таким образом, при расчете зазоров в различных типах МПЛ можно использовать квазистатический расчет неоднородностей и волновое сопротивление Z_{B1} .

В заключение отметим, что рассмотренный способ решения ПИУ применен и для расчета резонаторов и неоднородностей произвольной формы.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

$$B_{tpq} = \int_S r^{2t+\mu} \cos(2t+\mu) \varphi \bar{V}_{pq}(x, z) dx dz, \quad (П.1)$$

$$D_{tpq} = \int_S r^{2t+\mu} \sin(2t+\mu) \varphi \bar{U}_{pq}(x, z) dx dz,$$

$\bar{V}_{pq}(x, z)$, $\bar{U}_{pq}(x, z)$ — обратные преобразования Фурье функций $V_{pq}(\alpha, \beta)$ и $U_{pq}(\alpha, \beta)$.

Используем формулы

$$r^{2t+\mu} = 2^{2t+\mu} (2t+\mu)! \lim_{R \rightarrow 0} \frac{J_{2t+\mu}(rR)}{R^{2t+\mu}}; \quad (П.2)$$

$$J_{2t+\mu}(rR) \frac{\cos(2t+\mu)\varphi}{\sin(2t+\mu)\varphi} = \frac{i^\mu (-1)^{t+\mu}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(2t+\mu)\theta \exp(-iT) d\theta. \quad (П.3)$$

Подставляем (П.2), (П.3), например, в (П.1):

$$B_{t p q} = \frac{i(-1)^{t+\mu}}{2\pi} 2^{2t+\mu} (2t+\mu)! \int_0^{2\pi} \cos(2t+\mu)\theta \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{V_{pq}(\alpha, \beta)}{R^{2t+\mu}} d\theta.$$

Дальнейшие выкладки элементарны.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Ток $\bar{j}_z(x, z)$, определяемый выражением (7), разложим в ряд Фурье:

$$\bar{j}_z(x, z) = \sum_{t=0}^{\infty} j_z^t \cos(2t+\mu)\varphi = 0. \quad (\text{П.4})$$

Из (7) и (П.4) следует, что вне металлической полоски

$$j_z^t \sim \sum_{j, m=0}^{\infty} \int_0^{\pi/2} \cos(2t+\mu)\theta [Z_{jm} \sin \theta + \kappa_{jm} X_{jm} \cos \theta] d\theta \times \\ \times \int_0^{\infty} J_{2t+\mu}(Rr) J_{2j+\nu}(Rl \cos \theta) J_{2m+\tau}(Rl' \sin \theta) dR = 0, \\ t = 0, 1, \dots$$

Интеграл по R найдем методом вычетов. Для этого запишем его в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_{2t+\mu}^{(1)}(Rr) J_{2j+\nu}(Rl \cos \theta) J_{2m+\tau}(Rl' \sin \theta) dR,$$

где контур интегрирования проходит выше разреза функции Ханкеля. Дальнейшие преобразования достаточно просты и здесь не приводятся. Нетрудно показать, что из условия $\bar{j}_x = 0$ также следует (8).

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Получим квадратурную формулу для вычисления интеграла

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha) d\alpha,$$

где $f(\alpha)$ — четная функция, имеющая на действительной оси полюса $\alpha = \pm a$:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \left[f(\alpha) - \frac{2a}{\alpha^2 - a^2} \operatorname{res} f(a) \right] d\alpha + \operatorname{res} f(a) 2a \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\alpha}{\alpha^2 - a^2}.$$

Второй интеграл вычисляем методом вычетов. Первый можно вычислять по любой квадратурной формуле, так как он не имеет особенностей на действительной оси, например, по формуле прямоугольников:

$$I \approx \frac{\pi}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[f(x_n) - \frac{2a \operatorname{res} f(a)}{x_n^2 - a^2} \right] + 2\pi i \operatorname{res} f(a) = \\ = \frac{\pi}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x_n) + 2\pi i \operatorname{res} f(a) (1 - i \operatorname{ctg} La), \quad (\text{П.5})$$

$$x_n = n\pi/L.$$

Если в (П.5) $x_n = (2n+1)\pi/2L$, то в (П.5) $\operatorname{ctg} La$ нужно заменить на $-\operatorname{tg} La$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Никольский В. В., Пугачева Т. В. — Изв. вузов — Радиофизика, 1979, 22, № 8, с. 1028.
2. Автоматизированное проектирование устройств СВЧ / Под ред. В. В. Никольского — М.: Радио и связь, 1982. — 272 с.
3. Коваленко А. П. В кн.: Машинное проектирование систем и устройств СВЧ / Под ред. В. В. Никольского. — М.: МИРЭА, 1984, с. 34.
4. Веснин С. Г. В кн.: Машинное проектирование систем и устройств СВЧ / Под ред. В. В. Никольского. — М.: МИРЭА, 1984, с. 25.
5. Ильинский А. С., Ивахненко В. И. В кн.: Волны и дифракция — 85. — Тбилиси: Гос. ун-т, 1985, т. 2, с. 297.
6. Лерер А. М. В кн.: Электродинамика и радиофизическое приборостроение. — Днепропетровск: Гос. ун-т, 1985, с. 130.
7. Лерер А. М. — Радиотехника и электроника, 1986, 31, № 11, с. 2129.
8. Лерер А. М. — Изв. вузов — Радиофизика, 1985, 28, № 4, с. 507.
9. Лерер А. М. — Радиотехника и электроника, 1987, 32, № 7, с. 1418.
10. Лерер А. М., Михалевский В. С. — Радиотехника и электроника, 1981, 26, № 3, с. 470.
11. Заргано Г. Ф., Лерер А. М., Ляпин В. П., Синявский Г. П. Линии передачи сложных сечений. — Ростов-на-Дону: Гос. ун-т, 1983. — 320 с.
12. Самохин Г. С., Гипсман А. И., Силин Р. А. — Электронная техника. Сер. Электроника СВЧ, 1977, № 2, с. 3.

Ростовский государственный
университет

Поступила в редакцию
18 апреля 1986 г.

ON SOLUTION OF SURFACE INTEGRAL EQUATIONS FOR MICROWAVE PLANAR STRUCTURES

A. M. Lerer

A solution of surface integral equations for rectangular domain is obtained. A resonant frequency and radiation losses in microstrip resonator are calculated.

Аннотации депонированных статей

УДК 535.853.22:534 29

ВЛИЯНИЕ РАСХОДИМОСТИ ЗВУКОВОГО ПУЧКА НА РАБОТУ КОЛЛИНЕАРНОГО ФИЛЬТРА

М. А. Воронова, В. Г. Захаров, Ю. В. Макарова, В. Н. Парыгин

Исследуется влияние дифракционной расходимости звукового пучка от плоского круглого преобразователя с гауссовой апертурной функцией на коллинеарную акусто-оптическую фильтрацию. Рассчитаны распределения интенсивности дифрагированного света для различных длин взаимодействия на оси акустического пучка и при отходе от оси в его поперечном сечении. Приведены характеристики пропускания фильтра для различных областей акустической дифракции и исследованы их особенности. Показано, что в ближней зоне излучателя максимум интенсивности дифрагированного света сдвинут в сторону положительных расстроек. При переходе в дальнюю зону происходит искажение характеристики пропускания в виде появления несимметричных «крыльев».

*Статья депонирована в ВИНТИ,
рег. № 2287—В 88. Деп. от 23 марта 1988 г.*