ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXXI, № 4 РАДИОФИЗИКА 1988

УДК 534

СПАДАНИЕ ИНТЕНСИВНОСТИ ИЗЛУЧЕНИЯ В МНОГОМОДОВОМ ВОЛНОВОДЕ СО СЛУЧАЙНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ И ПОГЛОЩАЮЩЕЙ ГРАНИЦЕЙ

Б. Г. Кацнельсон, А. В. Сиденко

В работе рассмотрены уравнения диффузии излучения по модам в волноводе со случайными неоднородностями и поглощающей границей. Для случая постоянного среднего показателя преломления для функции распределения интенсивности по модам и средней плотности энергии получены аналитические результаты как в регулярном, так и в нерегулярном волноводах. Найден характерный пространственный параметр r_0, определяющий роль случайных неоднородностей в волноводе. В отсутствие случайных неоднородностей ($r_0 \to \infty$) формулы работы переходят в известные для средней интенсивности поля.

При распространении излучения в волноводах различной природы важную роль играет рассеяние на случайных неоднородностях, приводящее к изменению распределения энергии по волноводным модам и, вследствие этого, к изменению пространственного распределения поля и энергетики канала. Учет различных видов случайных неоднородностей проводится, например, в работах [1–4]. Заметим, что наличие в волноводе эффектов диссипации, сравнимых по своему воздействию с неоднородностями, приводящее к тому, что затухание отдельных мод будет зависеть от их номера, должно заметно усложнять картину. Теория распространения излучения в таких волноводах должна совместно учитывать как поглощение, так и рассеяние.

В данной работе рассматривается влияние случайных неоднородностей на распространение волн в многомодовых волноводах, излучение в которых удерживается вследствие отражения от границ, предполагающихся поглощающими. Примерами таких волноводов могут служить в ряде случаев оптоволоконные световоды [1], гидроакустические волноводы [2], металлические волноводы — для передачи информации или больших мощностей [3]. Указанная задача решается в рамках аппарата некогерентного сложения интенсивности мод — кинетических уравнений, которые в высокочастотном пределе переходят в уравнение диффузии по модам. Условием применимости такого подхода является наличие большого числа распространяющихся мод. Условие это достаточно часто выполняется. Например, в гидроакустических волноводах довольно типичной является ситуация, когда распространяется $\gtrsim 10^2$ мод (при глубине моря ~ 100 м на частоте $f \sim 300$ Гц скорость звука ~ 1500 м/с) и плотность спектра собственных значений в окрестности моды с номером l в волноводе $(\Delta\xi_l/\Delta l)^{-1} \sim 10^3 l$, ξ — постоянная распространения. В электромагнитных волноводах с шириной $H \sim 1$ м, $\lambda \sim 10^{-2} \div 10^{-3}$ м параметры многомодовости и плотности спектра близки к вышеуказанным. Потери энергии в этих волноводах обусловлены в основном поглощающими стенками (дном океана в океанских волноводах).

1. Общие соотношения. Пусть распространение излучения происходит в направлении r в двумерном волноводе, ограниченном по оси z, $0 \leqslant z \leqslant H$, со случайно-неоднородным показателем преломления:

$$n_R^2(r, z) = n^2(z) + \mu(r, z), \quad |\mu| \ll \langle n_R^2 \rangle = n^2, \quad \langle \mu \rangle = 0.$$

Известный подход к решению такой задачи состоит в получении уравнения переноса для средних по ансамблю заселенностей мод $W_l(r) = \langle |c_l(r)|^2 \rangle$, имеющих смысл интенсивности, переносимой модой с номером l вдоль волновода. Здесь $c_l(r)$ — комплексная амплитуда разложения поля $\psi(r, z)$ по волноводным модам $\varphi_l(z)$ в отсутствие случайных неоднородностей. $\varphi_l(z)$ и собственные значения ξ_l из-за поглощения будут комплексными: $\xi_l = \beta_l + i\gamma_l/2$. Если затухание определяется поглощением энергии на границе (например, при $z = H$), то величина γ_l зависит от импеданса g этой границы (конкретные примеры см. ниже).

Итак, система уравнений для W_l имеет вид

$$dW_l/dr = -\gamma_l W_l + \sum_n (a_{ln} W_n - a_{ln} W_l) , \qquad (1)$$

где

$$a_{ln}(r) = \frac{k^4}{4\beta_l \beta_n} \int_0^\infty dr' \int_0^H dz \int_0^H dz' \varphi_l(z) \varphi_l(z') K(r, z; r', z') \varphi_n(z) \times$$

$$\times \varphi_n(z') \cos \omega_{ln}(r - r') ,$$

$$K(r, z; r', z') = \langle \mu(r, z) \mu(r', z') \rangle .$$

В дальнейшем нас будет интересовать плотность энергии излучения $\overline{|\psi|^2}$, где черта обозначает усреднение по пространственному интервалу, большему, чем масштаб интерференционной структуры [6]. Для величины $\overline{|\psi|^2}$ в рамках детерминированных моделей имеется ряд аналитических соотношений [6, 10, 11].

Величина $|\psi|^2$ выражается через W_l и характеристики собственных мод. В частности, в приближении ВКБ для точечного источника при $r=0$, $z=z_1$

$$\overline{|\psi|^2} = \sum_l W_l \alpha_l^{-1}(z) D_l^{-1}, \quad W_l(0) = 4\pi \alpha_l^{-1}(z_1) D_l,$$

$$\alpha_l(z) = \sqrt{k^2 n^2(z) - \beta_l^2}, \quad D_l = 2\beta_l \int \alpha_l^{-1}(z) dz . \qquad (2)$$

Подход к решению системы (1) состоит в том [2], что при достаточно большом числе распространяющихся мод можно от дискретной переменной (номера моды l) перейти к непрерывной (обозначим ее p): $0 \leqslant p \leqslant p_{\max} \sim kH/\pi$. Сумма в правой части уравнения (1) заменится в этом случае на интеграл и уравнение станет уравнением переноса излучения [7]. В малоугловом приближении из этого уравнения можно получить уравнение диффузионного типа. Это оправдано для анизотропных неоднородностей, когда поперечный масштаб корреляций велик по сравнению с характерными масштабами изменения функций $\varphi_l(z)$. Обозначив величину $a_p = \frac{1}{2} \sum_l (p-l)^2 a_{lp}$, получим уравнение диффузионного типа

$$\frac{\partial W_p(r)}{\partial r} = -\gamma_p W_p(r) + \frac{\partial}{\partial p}\left(a_p \frac{\partial W_p(r)}{\partial p}\right) . \qquad (3)$$

Непрерывной величине p можно сопоставить угол χ с осью r (угол скольжения) соответствующего луча. Если использовать лучевой подход с самого начала, то уравнение, аналогичное (3), можно получить, рассматривая распространение излучения в волноводе как диффузию интенсивности по углу скольжения лучей, подобно тому, как это делается в свободном пространстве [8]. Уравнения для распределения интенсивности по углу скольжения рассматриваются в [9].

Рассмотрим конкретные примеры решения уравнения (3).

2. Волновод постоянной ширины. Рассмотрим случай волновода, имеющего постоянную ширину вдоль r ($H=\mathrm{const}$) и постоянный средний показатель преломления ($n=1$). Границу $z=0$ будем считать абсолютно мягкой, а $z=H$ — поглощающей. Это описывается с помощью комплексного импеданса $g_{\text{компл}}=g-is/2k$. Поле «невозмущенного» волновода может быть получено в аналитическом виде (т. е. найдены значения α_p, γ_p, D_p, φ_p, β_p). В частности, для γ_p имеем

$$\gamma_p = s\pi^2p^2/k^2H^3. \tag{4}$$

Эта зависимость определяет известный эффект «вымирания» высших мод по мере распространения излучения в волноводе.

Коэффициент диффузии a_p можно вычислить, подставив в выражения для a_{lp} функции $\varphi_l(z)$ и выбранную на основании конкретной модели неоднородностей корреляционную функцию $K(r,z;r',z')$. Можно показать аналогично [2], что зависимость от p для коэффициента диффузии входит в виде поправки $\sim p\pi/kH$, и принимая во внимание, что из-за поглощения нас интересует область значений $p\ll kH/\pi$, и при условии малости продольного масштаба корреляции случайных неоднородностей L по сравнению с циклом луча D этой зависимостью можно пренебречь. Будем, таким образом, в дальнейшем считать a не зависящим от p параметром теории.

Итак,

$$\frac{\partial W_p}{\partial r} = -\frac{s\pi^2}{k^2H^3}\,p^2W_p + a\,\frac{\partial^2 W_p}{\partial p^2}, \quad W_p(0) = W_0(p). \tag{5}$$

Поскольку из-за роста коэффициента поглощения γ_p с номером p функция распределения быстро убывает как функция p при $p\to\infty$, можно считать, что область изменения переменной p от нуля до ∞. Кроме того, из-за четности γ_p в (5) W_p можно четным образом продолжить от нуля до $-\infty$*.

Уравнение (5) имеет вид уравнения Шредингера для гармонического осциллятора. Можно выписать его решение для произвольных начальных условий $W_0(p)$. Если источник является точечным ненаправленным, то $W_0(p)=2\pi/H$ и

$$W_p(r) = \frac{2\pi}{H\sqrt{\operatorname{ch} r/r_0}}\exp\left\{-\frac{p^2}{4ar_0}\operatorname{th}\frac{r}{r_0}\right\}, \tag{6}$$

где $r_0=(kH/2\pi)\sqrt{H/as}$.

Видно, что $W_p(r)$ представляет собой произведение амплитудного множителя $\operatorname{ch}^{-1/2}(r/r_0)$ на гауссово (по модам) распределение, ширина которого уменьшается при увеличении r, не делаясь, однако, меньше некоторого значения — предельной ширины, равной $2\sqrt{ar_0}$. Характерным пространственным масштабом этих изменений является величина r_0 — параметр, учитывающий роль случайных неоднородностей в волноводе.

Рассмотрим предельные случаи. Если $r\ll r_0$, то $W_p(r)\sim$ $\sim\exp(-\pi^2sp^2r/k^2H^3)$, что соответствует затуханию отдельной моды в волноводе с поглощающей границей [5]. Множитель перед r в показателе экспоненты представляет собой в лучевом приближении мнимую часть продольного волнового числа (4). В этом пределе из формулы исчезает коэффициент диффузии a, что означает, что на расстояниях, меньших r_0, случайные неоднородности еще не проявляются. Если $r\gg r_0$, то $W_p(r)$ принимает вид $(r^{3/2}\pi/H)\exp(-r/2r_0-p^2/4ar_0)$. Интенсивность, переносимая вдоль волновода, спадает экспоненциально,

---

* Строго говоря, уравнение (5) необходимо дополнить двумя граничными условиями [2]: $adW/dp=0$ при $p=0$ и $\gamma_pW_p+adW_p/dp=0$ при $p=p_{\max}$. Видно, что при расширении области $-\infty<p<\infty$ эти условия выполняются для четной функции W_p, которая стремится к нулю при $p\to\infty$.

с модальным коэффициентом затухания $(2r_0)^{-1}$, не зависящим от p, а ширина распределения интенсивности по модам (которое остается гауссовым) устанавливается постоянной.

Так как ширина распределения определяет число мод, распространяющихся в волноводе, видно, что бесконечное их количество при $r=0$ уменьшается из-за затухания мод с большими номерами, но не до одной, как в [6], вследствие трансформации мод на случайных неоднородностях. Понятна зависимость ширины распределения от параметров волновода — рост ее с увеличением H и a и уменьшение с возрастанием s.

Воспользовавшись (6), вычислим среднюю плотность энергии:

$$\overline{|\psi|^2} = 2\int dp\, \frac{W_p(r)}{\alpha_p(z)D_p} = \frac{2\pi}{kH^2}\sqrt{\frac{r_0 a}{\operatorname{sh} r/r_0}}\,. \tag{7}$$

Это соотношение дает закон спадания плотности энергии вдоль волновода, аналогичный хорошо известным усредненным законам спадания в гидроакустике [6]. Характерным параметром является параметр r_0. Если $r \ll r_0$, то из формулы (7) получается хорошо известный закон $r^{-3/2}$ (с учетом фактора r^{-1} для цилиндрически симметричной задачи), определяющий спадание интенсивности звука в подводном звуковом канале без случайных неоднородностей.

3. Нерегулярный волновод. Рассмотрим теперь волновод с постоянным показателем преломления ($n=1$) и шириной, являющейся функцией координат: $H=H(r)$. Эту зависимость будем предполагать достаточно плавной. Анализ такой задачи проводится на основе разложения амплитуды поля $\psi(r,z)$ по поперечным модам сравнения $\varphi_l(r,z)$, зависящим от r как от параметра. Вследствие этого зависимость от r появится и у величин α_p, β_p, φ_p, D_p, что формально получается, если вместо H подставить $H(r)$. Такой подход соответствует адиабатическому приближению в теории нерегулярных волноводов [5] и широко используется вследствие обычно выполняющихся условий его применимости — плавности изменения параметров волновода. Достаточно типичные значения продольных градиентов параметров волновода (в нашем случае H') $\sim 10^{-3}$, и параметр $\nu = kHH'$, определяющий неадиабатические поправки, достаточно мал и в случае многомодового волновода.

Зависимость от r в параметрах задачи приводит к тому, что в соответствующем диффузионном уравнении для модальной интенсивности $W_p(r)$ коэффициенты поглощения и диффузии будут зависеть от r. Для γ_p такая зависимость получается из (4), относительно a предположим отсутствие такой зависимости. Это предположение соответствует, например, наличию постоянного по ширине рассеивающего слоя в волноводе или тому, что трансформация волн обусловлена шероховатостями границы. С другой стороны, даже при наличии зависимости a от r простой заменой переменных можно перевести ее в коэффициент перед первым членом в правой части.

Итак,

$$\begin{gathered}\frac{\partial W_p}{\partial r} = -\frac{s\pi^2}{k^2H^3(r)}\,p^2 W_p(r) + a\,\frac{\partial^2 W_p(r)}{\partial p^2}\,,\\ W_p(0) = W_0(p)\,.\end{gathered} \tag{8}$$

Уравнение (8) интерпретируется как уравнение диффузии по адиабатическим инвариантам. Аналогичный подход использовался в [4].

Решение уравнения (8) для точечного ненаправленного источника имеет вид

$$W_p(r) = \frac{2\pi}{H_0}\exp\left\{-2a\int_0^r u(r')\,dr' - u(r)p^2\right\}, \tag{9}$$

где $H_0=H(0)$, u — функция, удовлетворяющая уравнению Риккати:

$$du/dx+\beta u^2=1/\beta f^3(x),\quad u(0)=0,$$
$$x=r/r_0,\quad r_0=kH_0/2\pi(aH_0/s)^{1/2},\quad f(x)=H(r)/H_0,\quad \beta=4ar_0. \tag{10}$$

Видно, что распределение интенсивности по модам $W_p(r)$ остается гауссовым с шириной $u^{-1/2}$ (при $r\to 0$ ширина стремится к бесконечности, что соответствует всем возбуждаемым модам). Отметим частные случаи. Если $H=\text{const}$, то решением (10) является функция $u=(4ar_0)^{-1}\,\text{th}\,r/r_0$ в соответствии с разд. 2. При $a=0$ $u=$ $=s\pi^2/k^2\int\limits_0^r H^{-3}(r')dr'$ и показатель экспоненты соответствует коэффициенту затухания адиабатической моды, полученному в квазиклассическом приближении.

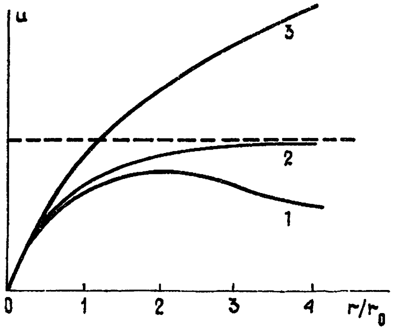

Рис. 1.

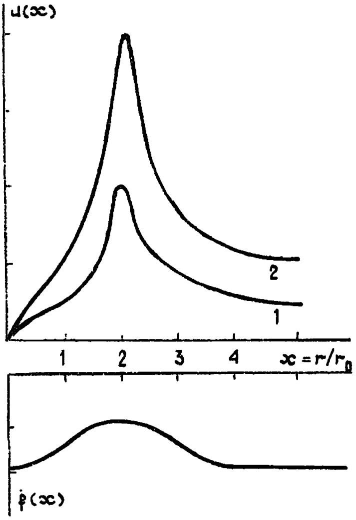

Рис. 2.

Рис. 1. Зависимость $u(x)$ для волновода с линейно изменяющейся шириной $H(r)=$ $=H_0(1+\varepsilon r/r_0)$. Кривая *1* соответствует расширяющемуся волноводу ($\varepsilon=0{,}1$), кривая *3* — сужающемуся ($\varepsilon=-0{,}1$), *2* соответствует регулярному ($\varepsilon=0$). Пунктиром обозначено значение $u=4ar_0$, соответствующее асимптотическому значению u при $H=H_0$.
Рис. 2. Зависимость $u(x)$ для нерегулярного волновода $H(r)=H_0 f(r/r_0)$, профиль которого показан в нижней части рисунка. Кривая *1* соответствует значению $4ar_0=1$, кривая *2* — $4ar_0=0{,}5$.

Уравнение (10) нетрудно решить численно. Положим для определенности, что ширина канала меняется линейно: $f(x)=1+\varepsilon x$, где ε — безразмерный параметр, причем $\varepsilon>0$ соответствует расширяющемуся каналу, $\varepsilon<0$ — сужающемуся. Результаты численных расчетов для уравнения (10) показаны на рис. 1. Рассмотрим сначала расширяющийся канал ($\varepsilon>0$). Видно, что кривая *1* ведет себя немонотонно — сначала растет, достигая при некотором, зависящем от β значении x максимума, а затем спадает. Если вспомнить, что $u^{-1/2}$ является шириной распределения W_p, то поведение $u(x)$ интерпретируется следующим образом. В точке $x=0$, $u=0$, т. е. ширина распределения бесконечная, это соответствует тому, что присутствуют все моды (лучи). По мере распространения, за счет поглощения на границе, моды с большими номерами (крутые лучи) сильно поглощаются и при $r<r_0$, пока случайные неоднородности еще не проявляются, пакет сужается. При $r>r_0$ начинает работать механизм диффузии и за счет этого механизма проявляются моды с большими номерами. В канале постоянной ширины рождение мод и их затухание взаимно уравновешиваются, и на больших расстояниях функция $u(x)$ асимптотически приближается к константе. В расширяющемся канале после достижения некоторого максимального значения $u(x)$ уменьшается при $x\to\infty$, т. е. распределение уширяется, появляются новые моды. Это происходит потому, что угол скольжения луча с границей в расширяющемся канале $\chi(r) = (H_0/H(r))\chi(0)$ уменьшается и, следовательно, уменьшается поглощение его на границе, таким образом, появление новых лучей за счет рассеяния на случайных неоднородностях не компенсируется поглощением. В случае сужающего канала угол $\chi(r)$ растет с увеличением r и поглощение на границе преобладает. Здесь функция резко возрастает при увеличении r, т. е. распределение сужается.

Отметим, что в расширяющемся канале имеется расстояние x_m, на котором число мод максимально. В этой точке $\beta u^2_{\max} = 1/\beta f^3(x_m)$, $u_{\max} = (1/\beta) f^{-3/2}(x_m)$. Если волновод имеет сложный профиль (рис. 2), то разбив его на участки, где он только сужается или расширяется, можно качественно понять поведение функции $u(x)$.

Средняя плотность энергии $\overline{|\psi|^2}$ имеет вид

$$\overline{|\psi(r)|^2} = \frac{1}{rH(r)} \sqrt{\frac{\pi}{u(r)}} \exp\left(-2a \int_0^r u(r')dr'\right). \quad (11)$$

В предельном случае $a=0$ из (11) следует формула

$$\overline{|\psi(r)|^2} = \frac{1}{rH(r)} \left\{\pi \left[sH_0^2 \int_0^r H^{-3}(r')dr'\right]^{-1}\right\}^{1/2}, \quad (12)$$

полученная ранее в [10, 11]. При $H=H_0$ (11) переходит в (7), а из (12) следует закон $r^{-3/2}$.

Из (11) видно, что поведение средней плотности энергии определяется также функцией $u(x)$. Видно, что наличие случайных неоднородностей приводит к более быстрому, экспоненциальному спаданию, причем даже если u убывает с расстоянием (в расширяющемся канале), интеграл, стоящий в показателе экспоненты, растет.

В заключение авторы выражают благодарность Ю. А. Кравцову за интерес к работе и полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Унгер Х.-Г. Планарные и волоконные оптические волноводы. — М.: Мир, 1980.— 656 с.
2. Колер В., Папаниколау Дж. К. В кн.: Распространение волн и подводная акустика / Под ред. Дж. Б. Келлера, Дж. С. Пападакиса. — М.: Мир, 1980, с. 126.
3. Ваганов Р. В., Матвеев Р. Ф., Мериакри В. В. Многоволновые волноводы со случайными нерегулярностями / Под ред. Б. З. Каценеленбаума. — М.: Сов. радио, 1972. — 232 с.
4. Гуревич А. В., Цедилина Е. Е. Сверхдальнее распространение коротких радиоволн. — М.: Наука, 1979.
5. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. — М.: Наука, 1973. — 273 с.
6. Бреховских Л. М. В кн.: Акустика океана / Под ред. Л. М. Бреховских. — М.: Наука, 1974, с. 79.
7. Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И. Введение в статистическую радиофизику. Ч. 2. Случайные поля. — М.: Наука, 1976.
8. Чернов П. А. Волны в случайно-неоднородных средах. — М.: Наука, 1975.
9. Кацнельсон Б. Г., Сиденко А. В. — Труды IX Всесоюзного симпозиума по дифракции и распространению волн. — Тбилиси, 1985, с. 384.
10 Weston D. E. — J. Sound Vibr., 1976, 47 (4), p. 473.
11. Кацнельсон Б. Г., Кулапин Л. Г. — Акуст. журн., 1984, 30, (5), с. 643.

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 2 июня 1986 г., после доработки 29 сентября 1986 г.

RADIATION INTENSITY DECREASE IN MULTIMODE BOUNDARY LOSSES WAVEGUIDE WITH RANDOM INHOMOGENEITIES

B. G. Katsnel'son, A. V. Sidenko

The mode diffusion equations of the radiation in the random inhomogeneous waveguide with the boundary losses are considered in this paper. The analytical solutions are received for the model of the constant of the mean refractive index in both cases: such as regular and irregular waveguides. The parameter r_0 determining the influence of the irregularities is obtained. If the random irregularities are absent ($r_0 \to \infty$) all solutions are transformed into the wellknown spacial cases.