

УДК 550.388

МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ НИЗКОЧАСТОТНЫХ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИХ ВОЛН В F-ОБЛАСТИ ВЫСОКОШИРОТНОЙ ИОНОСФЕРЫ

М. Г. Гельберг, В. П. Федоров

Аналитически и численно рассмотрены процессы нелинейного взаимодействия трех и более низкочастотных электростатических волн в F-области ионосферы. Показано, что эти процессы нельзя описать без учета инерции ионов. С учетом инерции ионов рост возмущений ограничивается на уровне нескольких процентов. Спектр флуктуаций концентрации плазмы устанавливается примерно степенным и не зависит от первоначального вида возмущений.

В настоящее время определились два основных подхода к решению задач моделирования нелинейной стадии эволюции неоднородностей в ионосферной плазме. В первом подходе аналитически или численно решается система уравнений в частных производных, полученных из уравнений непрерывности и движения [1-5]. Этот подход применим как при слабой, так и при сильной нелинейности и позволяет одновременно учитывать влияние нелинейных и квазилинейных эффектов на эволюцию неоднородностей. Его недостаток — сложность физической интерпретации полученных результатов.

При другом подходе начальные возмущения концентрации плазмы n_1 , и электрического поля E_1 , разлагают в спектр по волновым векторам k и далее рассматривают эволюцию во времени амплитуд спектральных компонент [6] и нелинейное взаимодействие между волнами [7-10]. Этот подход применим, когда относительные возмущения параметров плазмы малы:

$$|n_1/n_0| \ll 0,1. \quad (1)$$

При выполнении (1) справедлива теория слабой турбулентности [11], и ее приложение к физике неоднородностей ионосферы [12] привело к определенным успехам в построении нелинейной теории неустойчивости ионосферной плазмы.

Известны трудности обратной свертки спектров возмущений концентрации и поля [4, 6]. Кроме того, в спектральном подходе можно учесть квазилинейные изменения средних параметров плазмы, и ими, как правило, пренебрегают. Однако спектральный подход делает задачу нелинейной эволюции неоднородностей более прозрачной для физического анализа и является удобным инструментом исследования физики нелинейных процессов при слабой турбулентности.

В настоящей работе изложена схема вычислений при спектральном методе анализа нелинейной стадии градиентно-дрейфовой неустойчивости, показана необходимость учета инерционных слагаемых в уравнении движения ионов, приведены результаты численного моделирования взаимодействия многих волн и процесса формирования спектра неоднородностей.

Уравнения для связанных волн. При анализе нелинейного взаимодействия волн геомагнитное поле B_0 полагалось вертикальным и ось z системы координат была направлена по вектору B_0 . Внешнее электрическое поле E_0 было ориентировано ортогонально B_0 и совпадало

с осью x . Плазма считалась однородной по осям x и z , слабо неоднородной по оси y . Параметры плазмы (частоты столкновений ν_α , плазменные частоты $\omega_{p\alpha}$, температуры T_α , гирочастоты $\omega_{H\alpha}$ заряженных частиц сорта α , $\alpha=e, i$, e — индекс электронов, i — ионов) выбирались соответствующими значениям этих параметров для высот порядка 300 км. Для принятой модели

$$\theta_e = \omega_{He}/\nu_e \gg \theta_i = \omega_{Hi}/\nu_i \gg 1. \quad (2)$$

Известно [13], что в неоднородной плазме, находящейся в скрещенных электрическом и магнитном полях, развивается градиентно-дрейфовая неустойчивость. Для волн, распространяющихся ортогонально к B_0 , дисперсионное соотношение можно представить в виде [14]

$$\omega_k = (kV_0^i \theta_e + kV_0^e \theta_i) (\theta_i + \theta_e), \quad (3)$$

а инкремент γ_k неустойчивости равен

$$\gamma_k = \frac{\kappa V_0 k_x^2}{k^2} - \frac{D_0 k^2}{\theta_i \theta_e}, \quad (4)$$

где $\kappa = |\nabla \ln N_0|$, V_0^i, V_0^e — невозмущенные скорости движения ионов и электронов, $V_0 = E_0/B_0$, $D_0 = (T_i + T_e)/m_i \nu_i$.

Представив возмущения концентрации n_1 и электрического поля E_1 в виде суммы плоских волн:

$$\frac{n_1}{N_0} = \sum_k n_k \exp [i(k \cdot r - \omega_k t)], \quad (5)$$

$$E_1 = \sum_k E_k \exp [i(k \cdot r - \omega_k t)],$$

из уравнений непрерывности и движения получили систему уравнений для амплитуд связанных волн

$$\frac{\partial n_k}{\partial t} - \gamma_k n_k = \sum_{k'} V_{kk'} n_{k'} n_{k''}, \quad (6)$$

где каждая тройка векторов k, k', k'' удовлетворяет условию синхронизма:

$$k = k' + k''. \quad (7)$$

Из дисперсионного соотношения (3) видно, что второе условие синхронизма $\omega_k = \omega_{k'} + \omega_{k''}$ выполняется автоматически.

В [15] показано, что с учетом инерции ионов коэффициенты нелинейного взаимодействия $V_{kk'}$ имеют вид

$$V_{kk'} = -i [k \times k'] \left[\frac{k' V_0}{k'^2} \left(1 - i \frac{\omega_{k'}^i}{\nu_i} \right) - \frac{k'' V_0}{k''^2} \times \right. \\ \left. \times \left(1 - i \frac{\omega_{k''}^i}{\nu_i} \right) \right] - \frac{i}{\theta_i} \left[\frac{(k \cdot k') (k' V_0)}{k'^2} + \frac{(k \cdot k'') (k'' V_0)}{k''^2} \right], \quad (8)$$

где $\omega_k = \omega_k - kV_0^i$. Для низкочастотных волн $|\omega_k^i|/\nu_i \ll 1$, поэтому действительные слагаемые в коэффициентах $V_{kk'}$ обычно не учитывались [9, 10, 12]. Вследствие условия (2) также пренебрегали последним слагаемым в выражении (8), и коэффициенты $V_{kk'}$ представляли в виде

$$V_{kk'} = -i [k \times k']_z \left[\frac{k' V_0}{k'^2} - \frac{k'' V_0}{k''^2} \right]. \quad (9)$$

Представив коэффициенты $V_{kk'}$ в форме

$$V_{kk'} = \rho_k \exp(i\beta_k) \quad (10)$$

и

$$n_k = \tilde{n}_k \exp(i\psi_k),$$

систему уравнений (6) для трех связанных волн можно записать [16] в виде

$$\begin{aligned} \partial \tilde{n}_k / \partial t - \gamma_k \tilde{n}_k &= \rho_k \tilde{n}_k' \tilde{n}_k'' \cos(\Phi + \beta_k), \\ \partial \tilde{n}_k' / \partial t - \gamma_k' \tilde{n}_k' &= \rho_k' \tilde{n}_k \tilde{n}_k'' \cos(\Phi + \beta_k'), \\ \partial \tilde{n}_k'' / \partial t - \gamma_k'' \tilde{n}_k'' &= \rho_k'' \tilde{n}_k \tilde{n}_k' \cos(\Phi + \beta_k''), \end{aligned} \quad (11)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = - \left[\rho_k \frac{\tilde{n}_k' \tilde{n}_k''}{\tilde{n}_k} \sin(\Phi + \beta_k) + \rho_k' \frac{\tilde{n}_k \tilde{n}_k''}{\tilde{n}_k'} \times \right.$$

$$\left. \times \sin(\Phi + \beta_k') + \rho_k'' \frac{\tilde{n}_k \tilde{n}_k'}{\tilde{n}_k''} \sin(\Phi + \beta_k'') \right],$$

где $\Phi = \psi_k - \psi_{k'} - \psi_{k''}$ — динамическая фаза системы взаимодействующих волн [16], ψ_k — фазы комплексных амплитуд n_k , определяемые соотношением (10). Угол Φ появляется в системе (11) при переходе от уравнений для комплексных амплитуд n_k к уравнениям для модулей этих амплитуд \tilde{n}_k .

Положим, для определенности, что $k = (k_x, 0, 0)$, $k_x > 0$, $k' = (k'_x, k'_y, 0)$; $k'_x > k_x$, $k'_y > 0$. Тогда волна с вектором k имеет максимальный инкремент γ_k и при чисто мнимых коэффициентах $V_{kk'}$

$$\beta_k = \pi/2, \quad \beta_{k'} = -\pi/2, \quad \beta_{k''} = \pi/2. \quad (12)$$

В этом случае система (11) имеет интеграл движения

$$\tilde{n}_k \tilde{n}_k' \tilde{n}_k'' \cos \Phi = C \exp[(\gamma_k + \gamma_k' + \gamma_k'') t], \quad (13)$$

где C определяется начальными условиями. Если в начальный момент динамическая фаза $\Phi_{t=0} = \pm\pi/2$, то $\cos \Phi = 0$ во все последующие моменты времени.

Умножим второе и третье уравнения системы (11) на $2\rho_k \tilde{n}_k'$ и $2\rho_k' \tilde{n}_k''$ соответственно. Сложив правые и левые части этих уравнений, с учетом условия (12) получим

$$A \exp(2\gamma_1 t) \leq \rho_k \tilde{n}_k^2 + \rho_k' \tilde{n}_k'^2 \leq A \exp(2\gamma_2 t), \quad (14)$$

где $A = [\rho_k \tilde{n}_k^2 + \rho_k' \tilde{n}_k'^2]_{t=0}$, $\gamma_1 = \min(\gamma_k, \gamma_k')$, $\gamma_2 = \max(\gamma_k, \gamma_k')$. Для случая, когда $\gamma_k > 0$, $\gamma_k', \gamma_k'' < 0$, неравенство (14) означает, что при $t \rightarrow \infty$ модули амплитуд $\tilde{n}_k, \tilde{n}_k''$ стремятся к нулю, а \tilde{n}_k' растет экспоненциально с линейным инкрементом

$$n_k \sim \exp(\gamma_k t),$$

т. е. система волн не достигает квазиравновесного уровня.

На рис. 1а, б приведены результаты численного решения системы уравнений для трех связанных волн при чисто мнимых коэффициентах нелинейного взаимодействия для случаев $\gamma_k, \gamma_k', \gamma_k'' > 0$ (рис. 1а) и

$\gamma_k > 0$, $\gamma_{k'}, \gamma_{k''} < 0$ (рис. 16). Видно, что волна k , имеющая максимальный инкремент, нарастает экспоненциально.

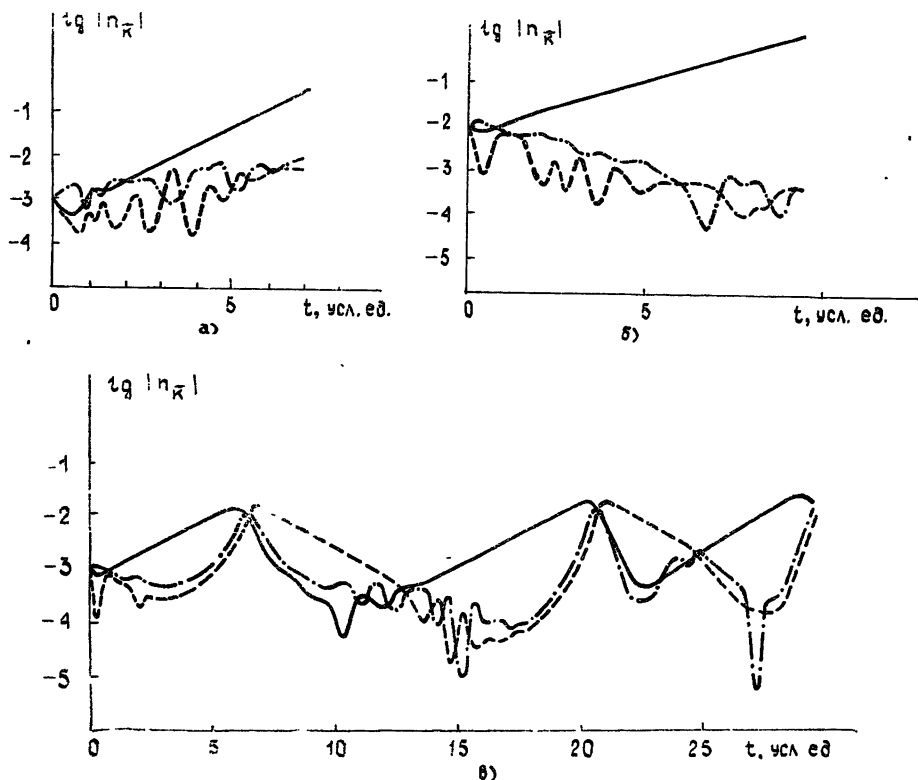


Рис. 1. Эволюция модулей амплитуд трех волн с $k = (3, 0)$, $k' = (4, 3)$, $k'' = (-1, -3)$; $V_0 = 10^3$ м/с, $\kappa = 10^{-5}$ м $^{-1}$, $\theta_i = 300$, $\nu_i = 1$ с $^{-1}$, $k_0 = 10^{-2}$ м $^{-1}$:
 а) $\gamma_k, \gamma_{k'}, \gamma_{k''} > 0$, $D' = 5 \cdot 10^{-3}$; б) $\gamma_k > 0$, $\gamma_{k'}, \gamma_{k''} < 0$, $D' = 5 \cdot 10^{-2}$; в) $\gamma_k > 0$, $\gamma_{k'}, \gamma_{k''} < 0$, $D' = 5 \cdot 10^{-2}$;
 ———— мода (3, 0); - - - - - мода (4, 3); - · - · - · - мода (-1, -3).

При учете действительных слагаемых в коэффициентах нелинейного взаимодействия все фазовые углы $\beta_k \neq \pm \pi/2$.

Из (8), (10) следует

$$\sum_k \rho_k \exp(i\beta_k) = 0 \quad (15)$$

или

$$\begin{aligned} \rho_k \cos \beta_k + \rho_{k'} \cos \beta_{k'} + \rho_{k''} \cos \beta_{k''} &= 0, \\ \rho_k \sin \beta_k + \rho_{k'} \sin \beta_{k'} + \rho_{k''} \sin \beta_{k''} &= 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Система (16) имеет решение только в том случае, если все β_k лежат в разных квадрантах. Последнее является признаком, что нелинейное взаимодействие волн с $\gamma_k > 0$ и $\gamma_{k'}, \gamma_{k''} < 0$ устойчиво [16], т. е. амплитуды всех волн колеблются около некоторого квазиравновесного уровня. На рис. 1в приведены графики временного изменения \tilde{n}_k для тех же волн и при тех же значениях γ_k , что и на рис. 16, но коэффициенты $V_{kk'}$ взяты в виде (8). Как видно из сравнения этих зависимостей, учет инерции ионов приводит к стабилизации максимально растущей волны. Таким образом, учет инерционных слагаемых в уравнении движения ионов является обязательным условием нелинейного ограничения возмущений.

Следует заметить, что при решении системы уравнений в частных производных [1-3] были использованы алгебраические уравнения для

скоростей частиц. Неограниченный рост малых возмущений в области F-ионосферы в этих численных моделях мог быть следствием неточного описания задачи.

Численное моделирование нелинейного взаимодействия многих волн. Для анализа физического процесса нелинейной стабилизации неустойчивости и формирования спектра флуктуаций концентрации плазмы и зависимости его от параметров модели необходимо рассмотреть эволюцию амплитуд большого числа связанных волн. Для этой цели численно решалась система из шестидесяти двух уравнений (6) с коэффициентами нелинейного взаимодействия вида (8). Система (6) была приведена к безразмерным переменным. В качестве единицы времени была принята величина $t_0 = (\kappa V_0)^{-1}$.

Моделировалось формирование двумерного спектра ($k_z = 0$) возмущений концентрации слабонеоднородной плазмы. Волновые векторы мод задавались парами чисел $\mathbf{k} = (jk_0, lk_0)$, k_0 — минимальное волновое число, $j, l = 0, \pm 1, \dots$ Для построения спектров возмущений концентрации была принята прямоугольная сетка, узлы которой соответствовали волновым векторам. В описанных ниже вариантах j менялось от -12 до $+12$, l — от -2 до $+2$, k_0 полагалось равным 10^{-2} м^{-1} . Во всех вариантах было принято $\nu_i = 1 \text{ с}^{-1}$, $\theta_i = 300$. Безразмерный коэффициент диффузии

$$D' = D_0 k_0^2 / (\theta_i \theta_e \kappa V_0)$$

меняли от $5 \cdot 10^{-2}$ до 10^{-1} .

Система обыкновенных дифференциальных уравнений решалась методом Рунге — Кутты — Фельберга четвертого-пятого порядка [17] с абсолютной и относительной погрешностью 10^{-7} и $2 \cdot 10^{-4}$ соответственно.

В качестве начальных условий в одних вариантах задавались ненулевыми амплитуды и фазы трех крупномасштабных мод. В процессе нелинейного взаимодействия происходила перекачка энергии волн по спектру в коротковолновую область. В результате система взаимодействующих волн достигала квазиравновесного уровня. Эволюция спектра волн при следующих начальных условиях $|n_{1,0}| = |n_{-1,0}| = |n_{0,-1}| = 0,0014$, $\psi_{1,0} = \psi_{0,-1} = -\psi_{-1,0} = \pi/4$ представлена на рис. 2а. По оси t отложено время в единицах t_0 , по оси k — волновое число k_x в единицах k_0 , по вертикальной оси — $\lg |n_k|^2$.

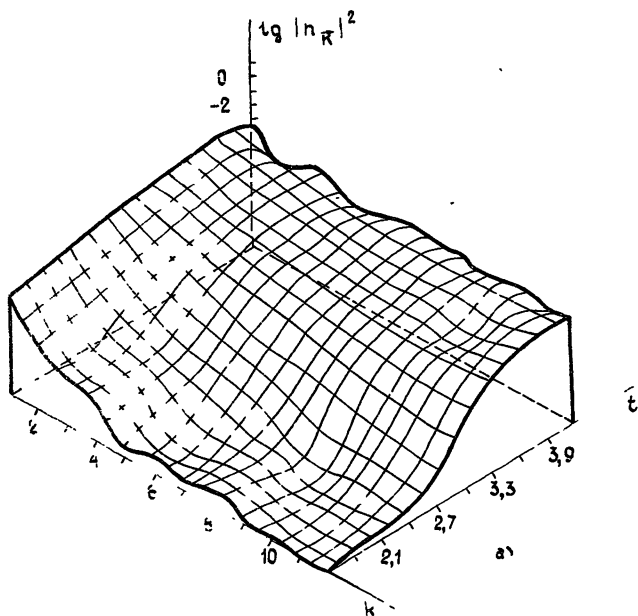


Рис. 2.

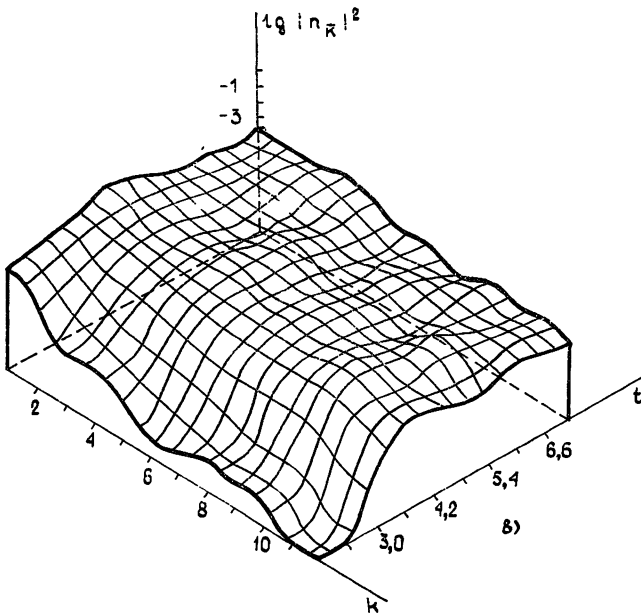
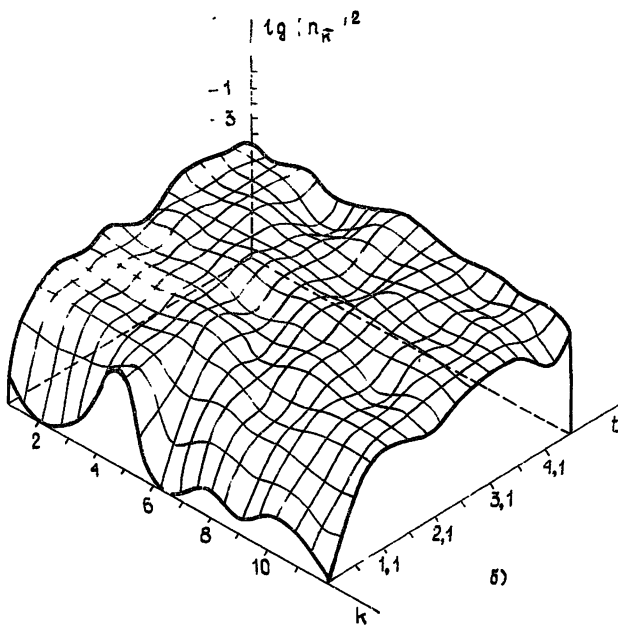


Рис. 2. Формирование спектра турбулентности: $V_0=10^3$ м/с, $\kappa=10^{-5}$ м $^{-1}$, $k_0=10^{-2}$ м $^{-1}$, $\nu_i=1$ с $^{-1}$, $D'=0,05$;
 а) начальные возмущения — крупномасштабные, б) начальные возмущения — среднего масштаба, в) начальные условия такие же, как на рис. 2а, но с добавочной диссипацией в модах с $|j| > 10$.

В других вариантах с ненулевыми амплитудами задавались моды с волновыми векторами $k_{\min} < k < k_{\max}$. Перекачка энергии волн происходила как в длинноволновую, так и коротковолновую области спектра.

На рис. 2б показано формирование спектра волн при начальных условиях $|n_{-5,0}| = |n_{1,-2}| = |n_{-7,-1}| = |n_{4,0}| = 0,0014$, $\psi_{-5,0} = \psi_{1,-2} = \psi_{-7,-1} = -\psi_{4,0} = \pi/4$.

Из рис. 2а, б видно, что время достижения квазиравновесного уровня турбулентности зависит от начальных условий.

При численном моделировании мы вынуждены ограничивать спектр волн в области больших k , что приводит к увеличению амплитуды возмущений вблизи принятой в расчетах границы спектра. Для устранения этого эффекта введена искусственная дополнительная диссипация возмущений в моды с $|j| > 10$. На рис. 2в показано формирование спектра волн, когда в коротковолновой области ($|j| > 10$) усилено затухание волн (коэффициент диффузии D' увеличен в семь раз).

Моделирование нелинейного взаимодействия низкочастотных электростатических волн в ионосферной плазме показало, что без учета инерции ионов система взаимодействующих волн не выходит на квазистационарное состояние. При учете инерционных слагаемых в уравнении движения ионов уровень установившейся плазменной турбулентности составляет несколько процентов, а спектр турбулентности имеет степенной вид $|n_k|^2 \sim k^{-s}$ с показателем $s \approx 2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lloyd K. H., Haerendel G. — J. Geophys. Res., 1973, 78, p. 7389.
2. Perkins F. W., Zabysky N. J., Doles J. H. — J. Geophys. Res., 1973, 78, p. 697.
3. Keskinen M. J., Ossakow S. L. — J. Geophys. Res., 1982, 87, p. 144.
4. Жилинский А. П., Цендин Л. Д. — УФН, 1980, 131, с. 343.
5. Рожанский В. А., Цендин Л. Д. — Геомагнетизм и аэронавигация, 1984, 24, с. 414, 598.
6. Гуревич А. В., Цедилина Е. Е. — УФН, 1967, 91, с. 609.
7. Sudan R. N., Akinrimisi J., Farley D. T. — J. Geophys. Res., 1973, 78, p. 240.
8. Rognlien T. D., Weinstock J. — J. Geophys. Res., 1973, 78, p. 6898.
9. Sato T., Ogawa T. — J. Geophys. Res., 1976, 81, p. 3248.
10. Волосевич А. В., Липеровский В. А., Лившиц М. А. В кн.: Исследования высокоширотной ионосферы и магнитосферы Земли — Л.: Наука, 1982, с. 80.
11. Кадомцев Б. Б. В кн.: Вопросы теории плазмы. — М.: Атомиздат, 1964, вып. 4, с. 188.
12. Sudan R. N., Keskinen M. J. — Phys. Fluids, 1979, 22, p. 2305.
13. Simon A. — Phys. Fluids, 1963, 6, p. 382.
14. Гершман Б. Н. и др. Явление F -рассеяния в ионосфере. — М.: Наука, 1984. — 140 с.
15. Гельберг М. Г. Неоднородности высокоширотной ионосферы. — Новосибирск: Наука, 1986. — 200 с.
16. Вильгельмсон Х., Вейланд Я. Когерентное нелинейное взаимодействие волн в плазме. — М.: Энергоиздат, 1981. — 224 с.
17. Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений. — М.: Мир, 1980. — 280 с.

Институт космических исследований и аэронавигации
Якутского филиала СО АН СССР

Поступила в редакцию
16 мая 1986 г.

NONLINEAR INTERACTION SIMULATION OF LOW FREQUENCY ELECTROSTATIC WAVES IN F -REGION OF HIGH LATITUDE IONOSPHERE

Gelberg M., G., Fedorov V. P.

Nonlinear interaction processes of three and more low frequency electrostatic waves in F -region of the ionosphere are numerically and analytically considered. It is shown that these processes cannot be described without taking into account ions' inertia. Taking into account the ions' inertia the increase of disturbances is limited at the level of a few per cent. The fluctuation spectrum of the plasma concentration becomes almost power and is not dependent on the initial type of the disturbances.