

УДК 523.164:519.11/.14:511.218

ОБ ОПТИМИЗАЦИИ РАЗМЕЩЕНИЯ ПРИЕМНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В СИСТЕМАХ АПЕРТУРНОГО СИНТЕЗА

Л. Е. Копилович

Изучается вопрос об оптимальном размещении приемных элементов на апертуре, обеспечивающем регистрацию всех пространственных частот в заданной прямоугольной области u, v -плоскости. Предлагаемый метод размещения основан на использовании двумерных разностных множеств.

1. Вопрос об оптимизации размещения приемных элементов в системах апертурного синтеза рассматривался в [1]. Было введено понятие базиса для целочисленной решетки D на апертуре как совокупности приемных элементов, обеспечивающих покрытие области D_f всех различных интервалов (векторных расстояний) между узлами решетки (т. е. регистрацию всех пространственных частот в этой области u, v -плоскости), причем часть этих элементов может размещаться на апертуре вне D . Любой базис для прямоугольной решетки D является избыточным, в том смысле, что среди интервалов между его элементами есть повторяющиеся или не входящие в D_f . В качестве характеристики избыточности заполнения апертуры была принята безразмерная величина $\alpha = K/\sqrt{S}$, где K — число элементов базиса, S — площадь, занимаемая решеткой. Таким образом, задача состоит в построении оптимального базиса для решетки D , характеризующегося минимальным значением величины α .

Построенный в [1] базис основан на ином принципе, чем T -системы, где применяется линейное расположение равноотстоящих элементов: он состоит из нескольких групп элементов, образуемых с помощью циклических разностных множеств. Для систем апертурного синтеза с большим количеством приемных элементов такой базис является для квадратных решеток более эффективным, чем T -система, для которой $\alpha \approx 3$.

Следует, однако, отметить два обстоятельства. Во-первых, предложенное в [1] построение возможно лишь для числа элементов, не меньшего, чем $K=256$, а значения $\alpha < 2,80$ достигаются лишь при $K > 1100$. Результаты, близкие к оптимальным для этого метода ($\alpha \leq 8/3$), получаются при $K > 10^4$ (в этом случае выигрыш в числе элементов, по сравнению с T -системами, достигает 11—12%).

Во-вторых, базис для прямоугольной решетки получен в [1] как произведение одномерных базисов для ее сторон; иными словами, мы имеем здесь вырожденный случай двумерного базиса, и можно ожидать, что «нераспадающийся» двумерный базис окажется более выгодным.

В настоящей работе построен базис именно такого типа. В качестве основы мы используем двумерные разностные множества (ДРМ), введенные в [2, 3]. ДРМ — это множество $D_2 = \{(a_i, b_i)\}$ из k элементов на прямоугольной целочисленной решетке с длинами сторон m_1-1 и m_2-1 , такое, что пары чисел v_1, v_2 — координат любого ненулевого узла решетки — имеют точно λ представлений в виде

$$v_1 \equiv a_i - a_j \pmod{m_1}, \quad v_2 \equiv b_i - b_j \pmod{m_2},$$

где λ постоянно. Задается ДРМ своими параметрами m_1, m_2, k, λ , причем $k(k-1) = \lambda(m_1 m_2 - 1)$. Можно показать, что если m_1 и m_2 — взаим-

но простые числа, то ДРМ можно получить из обычного циклического разностного множества (ЦРМ) $D_1 = \{d_i\}$ с параметрами $v = m_1 m_2, k, \lambda$, если положить

$$a_i \equiv d_i \pmod{m_1}, \quad b_i \equiv d_i \pmod{m_2}. \quad (1)$$

Получаемый базис является обобщением на двумерный случай конструкции, предложенной в [4, 5]. Именно, если имеется базис $\{(\gamma_j, \delta_j)\}$, $j = 1, \dots, k_0$ для решетки $n_1 \times n_2$ при небольших n_1, n_2 (назовем его исходным базисом) и ДРМ $D_2 = \{(a_i, b_i)\}$ с параметрами $m_1, m_2, k; \lambda = 1$, то совокупность $K = k k_0$ элементов

$$\{(\gamma_j m_1 + a_i, \delta_j m_2 + b_i)\}, \quad i = 1, \dots, k; \quad j = 1, \dots, k_0, \quad (2)$$

образует базис для решетки $(m_1 n_1) \times (m_2 n_2)$ (и даже для решетки несколько большего размера).

2. Доказательство того, что множество (2) представляет собой базис, проводится в значительной степени аналогично [5]. Рассмотрим пары целых чисел u, v , где $0 \leq u \leq m_1 n_1 - 1, 0 \leq v \leq m_2 n_2 - 1$ ($u_2 + v_2 > 0$). Положим $u = \beta_1 m_1 + v_1, v = \beta_2 m_2 + v_2$, где $0 \leq \beta_i \leq n_i - 1, 0 \leq v_i \leq m_i - 1$ ($i = 1, 2$). Из определения ДРМ вытекает, что при $\lambda = 1$ возможны четыре случая.

а) Если $v_1 = a_s - a_t, v_2 = b_s - b_t$, то выберем в (2) такие (γ_j, δ_j) и (γ_l, δ_l) , что $\beta_1 = \gamma_j - \gamma_l, \beta_2 = \delta_j - \delta_l$. При этом

$$u = (\gamma_j m_1 + a_s) - (\gamma_l m_1 + a_t), \quad v = (\delta_j m_2 + b_s) - (\delta_l m_2 + b_t), \quad (3)$$

т. е. u и v — это проекции некоторого интервала между элементами множества (2) на оси координат (назовем его интервалом (u, v)).

б) Если $v_1 = a_s - a_t, v_2 - m_2 = b_s - b_t$, то для представления u, v в виде (3) достаточно взять $\gamma_j - \gamma_l = \beta_1, \delta_j - \delta_l = \beta_2 + 1$.

Аналогично рассматриваются случаи

в) $v_1 - m_1 = a_s - a_t, v_2 = b_s - b_t$;

г) $v_1 - m_1 = a_s - a_t, v_2 - m_2 = b_s - b_t$.

Если $\gamma_j - \gamma_l = n_1$, то $m_1 n_1 = (\gamma_j m_1 + a_s) - (\gamma_l m_1 + a_s)$, а при $\delta_j - \delta_l = n_2 - m_2 n_2 = (\delta_j m_2 + b_s) - (\delta_l m_2 + b_t)$.

Итак, пары чисел u, v при $0 \leq u \leq m_1 n_1, 0 \leq v \leq m_2 n_2$ представляются в виде (3). Покажем, что это верно и для координат узлов решетки большего размера. Прежде всего заметим, что множество D_2 остается разностным, с теми же параметрами, при любом циклическом сдвиге вдоль сторон решетки $(m_1 - 1) \times (m_2 - 1)$. Поэтому можно считать, что $a_1 = b_1 = 0$. Обозначим

$$A_0 = \max_{1 < i < k} (a_{i+1} - a_i), \quad B_0 = \max_{1 < i < k} (b_{i+1} - b_i) \quad (4)$$

(считаем $a_{k+1} = m_1, b_{k+1} = m_2$). Произведем сдвиг $D_2 \rightarrow D'_2$ так, чтобы $A_0 = m_1 - a'_k, B_0 = m_2 - b'_k$. Пары целых чисел v_1, v_2 , где $a'_k < v_1 < m_1, b'_k < v_2 < m_2$, могут быть представлены лишь в виде $v_1 = a'_t - a'_s + m_1, v_2 = b'_t - b'_s + m_2$. Поэтому пары чисел μ_1, μ_2 , где $\mu_1 = m_1 - v_1 = 1, \dots, A_0 - 1; \mu_2 = m_2 - v_2 = 1, \dots, B_0 - 1$, представляются в виде $\mu_1 = a'_s - a'_t, \mu_2 = b'_s - b'_t$. Взяв $\gamma_j - \gamma_l = n_1, \delta_j - \delta_l = n_2$, записываем величины $u = m_1 n_1 + \mu_1, v = m_2 n_2 + \mu_2$ в виде (3), т. е. в таком виде представляются координаты всех узлов решетки $D = R_1 \times R_2$, где

$$R_1 = m_1 n_1 + A_0 - 1, \quad R_2 = m_2 n_2 + B_0 - 1. \quad (5)$$

Итак, с помощью элементов множества (2) покрывается прямоугольный участок области D_f , который содержит интервалы, имеющие неотрицательные проекции на оси координат. Покажем, что одновременно покрывается и участок, симметричный первому относительно оси абсцисс. Отметим, что если полностью покрыт столбец из D_f с фиксированным $u \geq 0$ и $0 \leq v \leq m_2 n_2$, то одновременно покрыт и столбец с тем же u с v , таким, что $-m_2 n_2 \leq v \leq 0$. Далее, если покрыт участок

$m_1 n_1 < u \leq R_1$, $m_2 n_2 < v \leq R_2$, то среди интервалов, образуемых ДРМ D'_2 , содержатся все интервалы (u, v) , для которых $0 < u \leq A_0 - 1$, $0 < v \leq B_0 - 1$. Но из того, что ДРМ с $\lambda = 1$ содержит эти интервалы, вытекает, что оно не содержит соответствующих интервалов $(u, m_2 - v)$, покрытие которых обеспечивается элементами двух одинаковых ДРМ из (2), смещенных друг относительно друга на величину m_2 по оси ординат. Отсюда получаем, что в ДРМ D'_2 содержатся все интервалы вида $(u, -v)$, где $0 < u \leq A_0 - 1$, $0 < v \leq B_0 - 1$. Следовательно, с помощью базиса (2) покрыт весь участок D_f с $0 \leq u \leq R_1$, $|v| \leq R_2$, а значит, и вся область $D_f = \{|u| \leq R_1, |v| \leq R_2\}$.

Выражение для α можно записать в виде

$$\alpha = k k_0 / \sqrt{R_1 R_2}. \quad (6)$$

Полученный базис можно оптимизировать. Заметим, что, умножая совокупность абсцисс $\{a_i\}$ элементов ДРМ D_2 на число t_1 , взаимно простое с m_1 , а совокупность ординат $\{b_i\}$ — на t_2 , взаимно простое с m_2 , снова получим ДРМ с теми же параметрами. Подбирая t_1 и t_2 , максимизирующие A_0 и B_0 , получим ДРМ, при котором базис (2) является наилучшим, т. е. величина α для него минимальна при заданных параметрах ДРМ и исходном базисе.

3. Рассмотрим основные конструкции, образующие базис (2), — ДРМ с $\lambda = 1$ и исходный базис.

ДРМ $(m_1, m_2; k; 1)$ можно получить из ЦРМ с параметрами $v = m_1 m_2; k; \lambda = 1$, если $(m_1, m_2) = 1$. Все такие ЦРМ с $k \leq 100$ содержатся в таблицах в [6, 7]; мы отобрали те из них, для которых $1 < m_1/m_2 \leq 6$. В интервале значений $100 < k \leq 122$ ЦРМ, удовлетворяющие этому условию, имеются только при $k = 108$ и 122 ; они вычислены в [3]. Преобразуя эти ЦРМ в ДРМ с помощью формул (1) и умножая $\{a_i\}$ и $\{b_i\}$ соответственно на различные числа t_1, t_2 , где $(t_j, m_j) = 1; j = 1, 2$, находим t_1 и t_2 , максимизирующие A_0 и B_0 (для ЦРМ им соответствует значение t , для которого $t \bmod m_j \equiv t_j$). В табл. 1 приведены значения параметров этих ДРМ и максимальные значения A_0 и B_0 .

Таблица 1

k	(m_1, m_2)	A_0	B_0	k	(m_1, m_2)	A_0	B_0
5	(7,3)	3	1	62	(97,39)	9	3
8	(19,3)	8	1	65	(73,57)	8	1
10	(13,7)	5	1	68	(93,49)	9	5
12	(19,7)	6	2	68	(147,31)	14	3
17	(21,13)	6	1	80	(129,49)	10	4
17	(39,7)	7	1	80	(147,43)	11	3
26	(31,21)	6	1	82	(91,73)	12	1
30	(67,13)	13	3	108	(127,91)	8	6
38	(67,21)	11	2	122	(133,111)	9	1
48	(61,37)	6	4	122	(259,57)	15	1
50	(57,43)	7	1				

Серьезную проблему представляет выбор исходного базиса. Мы ограничимся изучением частного случая, когда исходный базис образуется как произведение одномерных базисов для сторон решетки $n_1 \times n_2$ — базиса $\{\gamma_j\}$ ($j = 1, \dots, r_1$) для линейной решетки длины n_1 и базиса $\{\delta_l\}$ ($l = 1, \dots, r_2$) — для линейной решетки длины n_2 . Такой исходный базис имеет вид

$$\{(\gamma_j, \delta_l)\}, \quad j = 1, \dots, r_1; \quad l = 1, \dots, r_2. \quad (7)$$

В [5] построены одномерные базисы из r элементов ($r \leq 11$) для линейных решеток максимальной длины n . Значения n и примеры таких базисов приведены в табл. 2.

Таблица 2

r	n	Одномерный базис
4	6	0, 1, 4, 6
5	9	0, 1, 4, 7, 9
6	13	0, 1, 2, 6, 10, 13
7	18	0, 6, 9, 10, 17, 22, 24
8	24	0, 8, 18, 19, 22, 24, 31, 39
9	29	0, 1, 2, 14, 18, 21, 24, 27, 29
10	37	0, 7, 22, 27, 28, 31, 39, 41, 57, 64
11	45	0, 18, 19, 22, 31, 42, 48, 56, 58, 63, 91

Наименьшее значение величина $\alpha_0 = r_1 r_2 / \sqrt{n_1 n_2}$ принимает для исходных базисов с $n_1 = 6$ или 24; $n_2 = 6$ или 24. Но из формул (5), (6) следует, что с увеличением n_i вклад добавок A_0 и B_0 в R_i уменьшается и, следовательно, величина α увеличивается; поэтому наилучший исходный базис вида (7) получается при $n_1 = n_2 = 6$ (см. рис. 1). В этом случае $k_0 = r_1 r_2 = 16$; $\alpha_0 = 8/3$ и формулы (5), (6) принимают вид

$$R_1 = 6m_1 + A_0 - 1, \quad R_2 = 6m_2 + B_0 - 1; \quad (5')$$

$$\alpha = 16k / \sqrt{R_1 R_2}. \quad (6')$$

В качестве примера на рис. 2 приведен базис вида (2) для решетки D (обведена жирной линией), образованный с помощью исходного базиса, изображенного на рис. 1, и ДРМ

(7,3; 5; 1). Часть элементов базиса расположена на апертуре за пределами решетки D (выделена пунктиром).

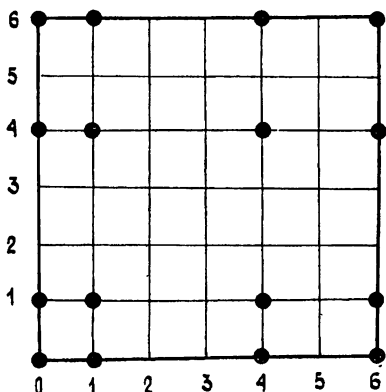


Рис. 1.

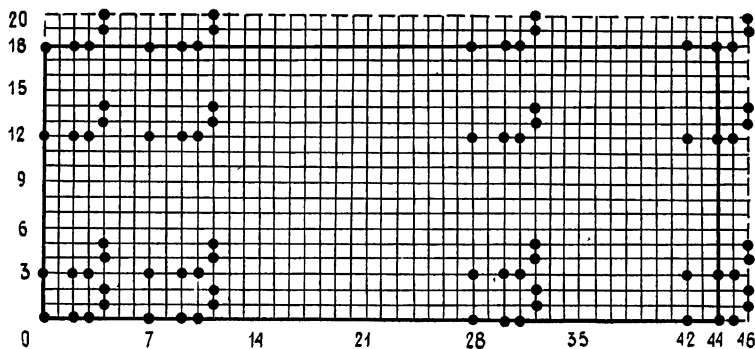


Рис. 2.

4. Перейдем к изучению основных характеристик базисов вида (2) с различным числом элементов. В табл. 3 приведены значения α , R_1 , R_2 , рассчитанные по формулам (5'), (6') для различных ДРМ ($m_1, m_2; k; 1$) с $1 < m_1/m_2 < 3$. При этом число элементов в базисе (2) $K = 16k$,

Таблица 3

K	α	(m_1, m_2)	$R_1 \times R_2$	α_T	$\frac{\alpha_T - \alpha}{\alpha_T} (\%)$
80	2,848	(7,3)	44×18	2,870	0,8
160	2,726	(13,7)	82×42	2,846	4,2
192	2,684	(19,7)	119×43	2,880	6,8
272	2,691	(21,13)	131×78	2,849	5,5
416	2,682	(31,21)	191×126	2,862	6,3
768	2,658	(61,37)	371×225	2,845	6,6
800	2,670	(57,43)	348×258	2,866	6,8
992	2,658	(97,39)	590×236	2,849	6,7
1040	2,666	(73,57)	445×342	2,896	7,9
1088	2,649	(93,49)	566×298	2,832	6,5
1280	2,654	(129,49)	783×297	2,858	7,1
1312	2,656	(91,73)	557×438	2,903	8,5
1728	2,655	(127,91)	769×551	2,876	7,7
1952	2,664	(133,111)	806×666	2,919	8,7

Из табл. 3 видно, что α стабильно принимает значения, меньшие $8/3$, начиная с $K \geq 10^3$, т. е. при величинах K , значительно меньших, чем в случае «распадающегося» базиса, рассмотренного в [1].

С помощью табл. 3 можно произвести сравнение эффективности базиса (2) и T -системы. В T -системе, обеспечивающей покрытие области D_f , соответствующей решетке $D=R_1 \times R_2$, величина $\alpha = \alpha_T$ является функцией от $c=R_1/R_2$:

$$\alpha_T = \frac{c+2}{\sqrt{c}} + \frac{1}{R_2} \frac{1}{\sqrt{c}} \approx \frac{c+2}{\sqrt{c}} \quad (8)$$

при больших R_2 . Функция $\varphi(c) = (c+2)/\sqrt{c}$ равна трем при $c=1,4$, меньше трех в интервале $1 < c < 4$ ($c_{\min} = 2$, $\varphi_{\min} = 2\sqrt{2}$) и больше трех — при остальных значениях c . Поскольку мы ограничиваемся диапазоном $1 < c < 3$, то у нас $2,828 < \alpha_T < 3$. В последних столбцах табл. 3 приведены значения α_T и $(\alpha_T - \alpha)/\alpha_T$ (%). Из них видно, что для покрытия областей D_f , соответствующих решеткам $D=R_1 \times R_2$ из табл. 3, при нашем способе требуется меньшее количество приемных элементов, чем в T -системах, покрывающих те же области.

Таблица 4

K	α	(m_1, m_2)	n_1	n_2	$R_1 \times R_2$	c'
240	2,778	(13,7)	6	13	82×91	1,11
320	2,761	(19,3)	6	37	121×111	1,09
336	2,733	(19,7)	6	18	119×127	1,07
340	2,723	(21,13)	6	9	131×119	1,10
480	2,763	(19,7)	9	24	176×169	1,04
520	2,737	(31,21)	6	9	191×189	1,01
680	2,727	(39,7)	6	37	240×259	1,08
780	2,801	(31,21)	9	13	284×273	1,04
880	2,769	(13,7)	24	45	316×315	1,00
924	2,790	(19,7)	18	45	347×316	1,10
960	2,719	(61,37)	6	9	371×336	1,10
1052	2,679	(31,21)	13	18	408×378	1,08
1064	2,693	(67,21)	6	18	412×379	1,09
1080	2,723	(67,13)	6	29	414×379	1,09

Для построения базисов вида (2) для решеток, близких к квадратным, можно использовать пары одномерных базисов для линейных решеток с длинами n_1, n_2 из табл. 2. При этом надо так подбирать n_1 и n_2 , чтобы компенсировать различие параметров ДРМ m_1 и m_2 . Значения параметров m_1, m_2 и n_1, n_2 , при которых можно построить базисы с числом элементов $K < 1100$ для решеток с отношением сторон $c' \simeq 1$, приведены в табл. 4. Из таблицы видно, что базисы для таких решеток более эффективны, чем соответствующие T -системы.

Дополнительным преимуществом базисов (2) перед T -системами может оказаться то, что избыточность, создаваемая элементами базиса, рассредоточена по апертуре.

В заключение заметим, что создание более эффективного базиса вида (2) (с меньшими значениями величины α) оказалось бы возможным, если бы удалось построить исходный базис $\{(\gamma_j, \delta_j)\}$ с $\alpha_0 < 8/3$. Вопрос о возможности такого построения в настоящее время остается открытым.

ЛИТЕРАТУРА

1. Копилов Л. Е. — Изв. вузов — Радиофизика, 1986, 29, № 1, с. 93.
2. Копилов Л. Е., Содин Л. Г. — ДАН УССР, сер. А, 1986, № 9, с. 45.
3. Копилов Л. Е., Содин Л. Г. Препринт ИРЭ АН УССР. — Харьков, 1986.
4. Редери Л., Реньи А. — Матем. сборник, 1949, 24, № 3, с. 385.
5. Leech J. — J. London Math. Soc., 1956, pt. 2, № 122, p. 160.
6. Baumert L. D. Cyclic Difference Sets. Lecture Notes in Math. 182. — Berlin e. a. Springer-Verlag, 1971.
7. Свердлик М. Б. Оптимальные дискретные сигналы. — М.: Сов. радио, 1975.

Институт радиофизики и электроники
АН УССР

Поступила в редакцию
8 апреля 1986 г.

ON OPTIMIZING THE ARRANGEMENT OF RECEIVING ELEMENTS IN APERTURE SYNTHESIS SYSTEMS

L. E. Kopilovich

The problem of optimal arrangement of receiving elements on the aperture is investigated which ensures the registration of all spatial frequencies of the given rectangular domain in the u, v -plane. The suggested method is based on the use of the two-dimensional difference sets.
