

УДК 621.371.162

**ОБ ОДНОМ ВАРИАНТЕ МЕТОДА МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ
В ТЕОРИИ РАССЕЯНИЯ ВОЛН НА СТАТИСТИЧЕСКИ
НЕРОВНОЙ ИМПЕДАНСНОЙ ПОВЕРХНОСТИ**

А. С. Брюховецкий

В работе изложен вариант метода малых возмущений, основанный на решении интегрального уравнения для флуктуаций поля, ядро которого содержит функцию источника над плоскостью с импедансом, равным импедансу среднего поля.

При построении теории рассеяния волн на статистически неровной поверхности $z = \zeta(\mathbf{r})$ с поверхностным импедансом $\eta_0 = \text{const}$ после разделения поля U на среднее значение $\langle U \rangle$ и флуктуации u последние представляют степенным рядом по целым положительным степеням малого параметра $\sim k\sigma$, где $\sigma = \sqrt{\langle \zeta^2 \rangle}$ — дисперсия флуктуаций ζ , k — волновое число [1]. Такое представление эквивалентно ряду Неймана в интегро-дифференциальном уравнении для u с функцией источника, соответствующей гладкой границе $z=0$ с импедансом η_0 . Среднее поле в этом случае соответствует приближению Бурре в решении уравнения Дайсона [1].

В последнее время появился ряд работ по учету многократного рассеяния не только в среднем поле [2, 3], но и в интенсивности флуктуаций поля [4, 5]. Уравнения, учитывающие эти эффекты многократного рассеяния, могут быть получены различными способами (методом диаграмм Фейнмана, методом вариационных производных, различного рода операторными методами), и основная сложность исследования заключается в вопросе о границах применимости получаемых приближений, который для рассеяния на поверхности, как и в общем случае объемного рассеяния, остается открытым.

В настоящей работе предлагается вариант метода малых возмущений, кратко изложенный в тезисах доклада [6], который в теории объемного рассеяния известен как «перенормировка среднего поля» [7-9]. Предлагаемый подход имеет, на наш взгляд, ряд преимуществ:

— во-первых, достаточно просто получается координатное представление рассеянного поля при произвольном η_0 в отличие от спектрального представления интенсивности [4], что позволяет придать формулам наглядный физический смысл и вычислить асимптотики множителей ослабления в общем случае неизотропных неровностей;

— во-вторых, легко усматривается связь получаемого ослабления с ослаблением в приближении Бурре, в достаточной мере исследованном в литературе;

— в-третьих, методика легко обобщается на электродинамический случай, если использовать фурье-разложение поля.

Итак, будем искать решение волнового уравнения

$$(\Delta_R + k^2)U(\mathbf{R}) = 0, \tag{1}$$

удовлетворяющее на статистически неровной границе $z = \zeta(\mathbf{r})$ условию

$$\partial U / \partial N + ik\eta_0 U|_{z=\zeta(\mathbf{r})} = 0, \tag{2}$$

где

$$\partial / \partial N = (\partial / \partial z - \nabla_r \zeta \cdot \nabla_r) / \sqrt{1 + (\nabla_r \zeta)^2},$$

Будем предполагать, что среднее значение $\langle \xi \rangle = 0$, и, как обычно, перенесем граничные условия на среднюю поверхность $z=0$ [1]:

$$(\partial/\partial z + ik\eta_0)U|_{z=0} \approx \hat{L}\xi U|_{z=0}. \quad (3)$$

Здесь $\hat{L}\xi U = \{\nabla_r \xi \cdot \nabla_r - \xi \partial/\partial z (\partial/\partial z + ik\eta_0)\}U$ — линейный оператор. Представляя $U = \langle U \rangle + u$, получаем граничные условия для среднего поля $\langle U \rangle$ и флуктуаций u :

$$(\partial/\partial z + ik\eta_0)\langle U \rangle|_{z=0} = \hat{L}\langle \xi U \rangle|_{z=0}; \quad (4)$$

$$(\partial/\partial z + ik\eta_0)u|_{z=0} = \{\hat{L}\xi \langle U \rangle + \hat{L}(\xi u - \langle \xi u \rangle)\}|_{z=0}. \quad (5)$$

В качестве функции точечного источника $G(\mathbf{R}, \mathbf{R}_0)$ мы возьмем решение уравнения

$$(\Delta_R + k^2)G(\mathbf{R}, \mathbf{R}_0) = -4\pi\delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}_0), \quad (6)$$

удовлетворяющее не граничному условию типа (2) на поверхности $z=0$ с импедансом $\eta_0 = \text{const}$, как это делается обычно, а являющееся суперпозицией падающих и отраженных волн от границы $z=0$, импеданс которой $\eta(\mathbf{x})$ является функцией вектора \mathbf{x} каждой из составляющих плоских волн:

$$G(\mathbf{R}, \mathbf{R}_0) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2 \mathbf{x}}{x_z} \exp[i(\mathbf{x}, \mathbf{r} - \mathbf{r}_0)] \times \quad (7)$$

$$\times [\exp(ix_z|z_0 - z|) + V(\mathbf{x}) \exp(ix_z|z_0 + z|)],$$

где

$$V(\mathbf{x}) = \frac{x_z - k\eta(\mathbf{x})}{x_z + k\eta(\mathbf{x})}, \quad x_z = \sqrt{k^2 - \mathbf{x}^2}, \quad \text{Im } x_z \geq 0.$$

С помощью (7) и (5) приходим к интегро-дифференциальному уравнению

$$u(\mathbf{R}) = -\frac{i}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d^2 \mathbf{x} \int_{-\infty}^{\infty} d^2 \mathbf{r}_1 \frac{\exp\{i[x_z z + (\mathbf{x}, \mathbf{r} - \mathbf{r}_1)]\}}{x_z + k\eta(\mathbf{x})} \times \quad (8)$$

$$\times \{\hat{L}_1 \xi_1 \langle U_1 \rangle + \hat{L}_1(\xi_1 u_1 - \langle \xi_1 u_1 \rangle) + ik[\eta(\mathbf{x}) - \eta_0]u_1\}.$$

Нижний индекс 1 означает, что значения соответствующих выражений берутся в точке рассеяния \mathbf{r}_1 . Заметим, что если в (8) положим $\eta(\mathbf{x}) = \eta_0$, то вернемся к традиционной схеме метода малых возмущений. На данном этапе решения предположим, что $\eta(\mathbf{x}) - \eta_0$ является малой величиной, стремящейся к нулю, если $k\sigma \rightarrow 0$. Это дает возможность для достаточно малых $k\sigma$ решение (8) искать методом итераций. Положив для нулевого приближения $\xi_1 u_1 = 0$ и $[\eta(\mathbf{x}) - \eta_0]u_1 = 0$, получим первую итерацию (первый порядок) для рассеянного поля

$$u(\mathbf{R}) = -\frac{i}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d^2 \mathbf{x} \int_{-\infty}^{\infty} d^2 \mathbf{r}_1 \frac{\exp\{i[x_z z + (\mathbf{x}, \mathbf{r} - \mathbf{r}_1)]\}}{x_z + k\eta(\mathbf{x})} \hat{L}_1 \xi_1 \langle U_1 \rangle. \quad (9)$$

Подстановка (9) в (4) приводит к результату

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + ik\eta_0\right)\langle U(\mathbf{R}) \rangle|_{z=0} = -\frac{i}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d^2 \mathbf{x} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2 \mathbf{r}_1}{x_z + k\eta(\mathbf{x})} \times \quad (10)$$

$$\times \langle \hat{L} \exp \{ i [x_z z + (\mathbf{x}, \mathbf{r} - \mathbf{r}_1)] \} \hat{L}_1 \zeta_1 \langle U_1(\mathbf{R}_1) \rangle \rangle \Big|_{z=0}.$$

В силу разностного по \mathbf{r} и \mathbf{r}_1 ядра в правой части (10) оно является локальным [1] в пространстве проекций волновых векторов \mathbf{k}_\perp на плоскость $z=0$:

$$\langle U(\mathbf{R}) \rangle = \exp(i\mathbf{k}_\perp \mathbf{r}) [\exp(-ik_z z) + V_0(\mathbf{k}_\perp) \exp(ik_z z)], \quad (11)$$

где $k_z = \sqrt{k^2 - k_\perp^2}$, а $V_0(\mathbf{k}_\perp) = \frac{k_z - k\eta_0(\mathbf{k}_\perp)}{k_z + k\eta_0(\mathbf{k}_\perp)}$ — коэффициент отражения среднего поля от плоскости $z=0$, $\eta_0(\mathbf{k}_\perp)$ — эффективный импеданс для среднего поля.

Возьмем в качестве $\eta(\mathbf{x})$ эффективный импеданс среднего поля $\eta(\mathbf{x}) = \eta_0(\mathbf{x})$. Подставив (11) в (10), получим интегральное уравнение, определяющее $\eta_0(\mathbf{x})$:

$$\eta_0(\mathbf{k}_\perp) = \eta_0 + \frac{\sigma^2}{k} \iint_{-\infty}^{\infty} d^2 \mathbf{x} \frac{\tilde{W}(\mathbf{k}_\perp - \mathbf{x})}{x_z + k\eta_0(\mathbf{x})} [k^2 - \mathbf{x}\mathbf{k}_\perp - k^2 \eta_0 \eta_0(\mathbf{k}_\perp)] \times \\ \times [k^2 - \mathbf{x}\mathbf{k}_\perp + k\eta_0 x_z]. \quad (12)$$

$$\text{Здесь } \tilde{W}(\mathbf{q}) = (2\pi\sigma)^{-2} \iint_{-\infty}^{\infty} \langle \zeta(\mathbf{r}) \zeta(\mathbf{r}_1) \rangle \exp[i\mathbf{q}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)] d^2(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)$$

— нормированный на единицу пространственный спектр неровностей.

Для достаточно малых $k\sigma$ решение (12) возможно методом итераций. Подстановка в правую часть нулевого приближения $\eta_0^{(0)}(\mathbf{x}) = \eta_0$ приводит к первому приближению $\eta_0^{(1)}(\mathbf{x})$, которое совпадает с приближением Бурре для $\eta_0(\mathbf{x})$ из [10]. Отличием настоящих результатов от [10] является то, что этим же импедансом описывается и ослабление флуктуаций, а не только среднего поля. В отличие от объемного рассеяния даже для изотропных неровностей наличие выделенного направления $N \simeq \mathbf{i}_z$ нарушает изотропность условий задачи, а наличие полюса $k_z + k\eta_0 = 0$ в $V_0(\mathbf{k}_\perp)$ — равномерность асимптотик даже в приближении Бурре (см. Приложение в [14]). Поэтому трудно указать область достаточности $\eta_0^{(1)}(\mathbf{x})$. Необходимые условия для электродинамического случая [11] могут быть получены из асимптотик [11] при выполнении требования $|\eta_0^{(1)} - \eta_0| \ll |\eta_0|$.

Поскольку в первой итерации соотношение между величиной интеграла и η_0 может быть произвольным при $\eta_0 \rightarrow 0$, то для корректности решения исходной задачи для полного поля последующими итерациями необходимо, вообще говоря, учесть более высоких степеней разложения по ζ в граничных условиях (4) и (5).

Определив $\eta_0(\mathbf{x})$ с достаточной степенью точности, легко вычислить в первом приближении фурье-амплитуду рассеянного поля. Для вычисления координатного представления как среднего поля, так и флуктуаций зависимость $\eta_0(\mathbf{k}_\perp)$ от \mathbf{k}_\perp не дает возможности непосредственно использовать асимптотические решения для поверхности с импедансом $\eta_0(\mathbf{k}_\perp)$, зависящим лишь от модуля k_\perp , т.е. от угла падения. Однако свойство симметрии $\eta_0(-\mathbf{k}_\perp) = \eta_0(\mathbf{k}_\perp) = \eta_0(k_\perp)$, которое можно доказать, если учесть, что для вещественных $\zeta(\mathbf{r})$ спектр $\tilde{W}(\mathbf{q}) = \tilde{W}(-\mathbf{q})$ упрощает задачу. В этом случае вычисления методом перевала, аналогичные [12], § 29, приводят для среднего поля точечного источника к результату

$$\langle G(\mathbf{R}, \mathbf{R}_0) \rangle = \frac{\exp(i\mathbf{k}|\mathbf{R} - \mathbf{R}_0|)}{|\mathbf{R} - \mathbf{R}_0|} + \frac{\exp(i\mathbf{k}|\mathbf{R} - \mathbf{R}_0^*|)}{|\mathbf{R} - \mathbf{R}_0^*|} +$$

$$+ \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{i2m\varphi_1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi I(\theta_0, \varphi) e^{-i2m\varphi}, \quad (13)$$

где

$$I(\theta_0, \varphi) = \sqrt{k/2\pi |r - r_0|} e^{i\pi/4} \int_{-\infty}^{\infty} d\theta \sqrt{\sin \theta} [V_0(\theta, \varphi) - 1] \times \\ \times \exp[ik |R - R_0^*| \cos(\theta - \theta_0)].$$

Здесь R_0^* ($x_0, y_0, -z_0$) — радиус-вектор «зеркального» источника, θ, φ — угол места и азимута вектора (x, y, z) , r_0, φ_1 — векторы $R - R_0^*$.

С учетом симметрии $\eta(x)$ величина $I(\theta_0, \varphi) \equiv I(\theta_0, \varphi \pm \pi)$. При этом сумма в (13) есть фурье-представление $I(\theta_0, \varphi)$ в направлении $\varphi = \varphi_1$, и формула (13) с этим значением $I(\theta_0, \varphi_1)$ обобщает результат Л. М. Бреховских на случай, когда импеданс зависит не только от угла падения θ , но и от азимутального направления x проекции волнового вектора на плоскость раздела. Для источника, расположенного на поверхности ($R_0 = R_0^*, z_0 = 0$),

$$\langle G(r_1, r_0) \rangle = \exp(ik |r_1 - r_0| / (|r_1 - r_0|)) F(r_1 - r_0), \quad (14)$$

где $F(r_1 - r_0)$ — множитель ослабления относительно свободного пространства на трассе $r_1 - r_0$, зависящий через η_0 от ее направления.

Аналогично формула (9) для флуктуаций поля приобретает вид

$$u(r) = -\frac{ik}{4\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} d^2 r_1 \left(\nabla_1 \zeta_1 \cdot \frac{r_1 - r_0}{|r_1 - r_0|} \right) \frac{\exp(ik |r_1 - r_0|)}{|r_1 - r_0|} \times \\ \times F(r_1 - r_0) \frac{\exp(ik |r - r_1|)}{|r - r_1|} F(r - r_1), \quad (15)$$

имеющий простое физическое толкование: поле поверхностных источников, возбуждаемое в точке r_1 средним полем, ослабленным на трассе $r_1 - r_0$, при наблюдении в точке r ослабляется при перерассеянии на трассе $r - r_1$. Ослабление при этом зависит не только от длины трассы, но и от ее направления.

В случае крутых углов падения либо рассеяния соответствующие множители ослабления переходят в отражательные формулы, чем и обеспечивается переход к разложению рассеянного поля в первом порядке теории малых возмущений только по положительным степеням $k\sigma$. Такое же положение возникает в случае малых численных расстояний, когда асимптотики множителей ослабления содержат положительные степени численного расстояния, а также в случае, когда ослабление в основном определяется величиной η_0 , т. е. когда роль рассеяния в ослаблении мала.

Заметим, что уравнение (8) в фурье-представлении выглядит следующим образом:

$$\tilde{u}(x) e^{ix_z^2} = \frac{-ie^{ix_z^2}}{x_z + k\eta(x)} \{ \tilde{L}(x) + \tilde{L}_1(x) + ik[\eta(x) - \eta_0] \tilde{u}(x) \}. \quad (16)$$

Здесь $\tilde{u}(x)$, $\tilde{L}(x)$ и $\tilde{L}_1(x)$ — фурье-амплитуды функций $u(r)$, $\hat{L}\xi\langle U \rangle$ и $\hat{L}(\xi u - \langle \xi u \rangle)$ на плоскости $z=0$ соответственно. Можно убедиться, что это уравнение получается из фурье-представления граничного условия (5) для флуктуаций поля тождественным преобразованием: прибавлением к обеим частям равенства величины $ik[\eta(x) - \eta_0] \tilde{u}(x)$

и умножением на $-ie^{ik_z z}/[k_z + k\eta(\mathbf{x})]$. Данное замечание является конструктивной основой для анализа более сложного случая электродинамической задачи, а также для отыскания более высоких приближений к скалярной.

Для флуктуаций электромагнитного поля e, h граничное условие при $z=0$ вместо (5) имеет вид [11]

$$[i_z, e] - \eta_0 [i_z, h] = \hat{L}(f(\zeta), \mathcal{E}) + \hat{L}_1(f(\zeta), e), \quad (17)$$

где i_z — орт вдоль оси z ; \hat{L} и \hat{L}_1 — линейные дифференциальные операторы, получаемые при разложении поля в ряд Тейлора по случайным отклонениям ζ ; $f(\zeta)$ — означает целые степени ζ в этом разложении.

Переход к фурье-представлению $\tilde{e}(\mathbf{x}), \tilde{f}(\mathbf{x}), \tilde{\mathcal{E}}(\mathbf{x})$ приводит к системе интегральных уравнений вида $\hat{A}_{il}(\hat{\eta}_0(\mathbf{x})) \cdot \tilde{e}_l(\mathbf{x}) = (\dots)$, где \hat{A}_{il} — тензор второго ранга, зависящий от компонент тензора эффективного импеданса $\hat{\eta}_0(\mathbf{x})$, а (\dots) означает интегральные операторы, осуществляющие свертки фурье-образов $\tilde{f}(\mathbf{x} - \mathbf{q})$ с $\tilde{e}(\mathbf{q})$ и $\tilde{\mathcal{E}}(\mathbf{q})$. При этом $\hat{\eta}_0(\mathbf{x})$ можно ввести в фурье-представление граничного условия (17) тождественным преобразованием, аналогичным скалярному случаю. Специфической особенностью электродинамической задачи является тензорный характер эффективного импеданса и связанная с этим деполяризация среднего поля [11].

Решение методом итераций получающейся системы уравнений в первом приближении приводит к значениям $\hat{\eta}_0^{(1)}(\mathbf{x})$, определенным в [11]. При этом, в отличие от [11], $\hat{\eta}_0^{(1)}(\mathbf{x})$ описывает дополнительное ослабление не только среднего поля, но и флуктуационного.

Сравнивая результаты [4] для малых ζ с нашими, отметим, что фурье-представление формулы (121) из [4] отличается от фурье-представления нашей формулы (7) при $\eta = \eta_0(\mathbf{x})$ и $z = z_0 = 0$ (с точностью до обозначений $\tilde{h} = k_z, \tilde{B}_0 + \tilde{M} = -ik\eta_0$) множителем $-\pi$. Он обусловлен различием в нормировках невозмущенного поля ($1/4\pi$), преобразования Фурье ($4\pi^2$) и знаком ($-i$) в экспоненте.

Величина эффективного импеданса $\eta_0 = i(\tilde{B}_0 + \tilde{M})/k$ определяется в [4] фурье-представлением \tilde{M} уравнения (124). Вычисления показывают, что оно получается из нашего интегрального уравнения (12) заменой в числителе подынтегрального выражения $\eta_0(k_{\perp})$ на η_0 , а k_z — на $-k\eta_0$. Это, по-видимому, связано с приближенным характером оператора \hat{b} (формула (11) в [4]), совпадающим, как указывают авторы [4] на стр. 602, с эквивалентными граничными условиями [1] при замене в них $-\partial/\partial z$ на B_0 . Последнее справедливо в эквивалентных граничных условиях лишь при замене среднего поля на его невозмущенное значение, что подтверждается и совпадением первой итерации нашего уравнения (12) с результатом [10]. Для частного случая $\eta_0 = 0$ уравнение (12) переходит в уравнение (37в) из [5], которое, в свою очередь, полностью адекватно $V_0(k_{\perp})$ из [2].

Непосредственное сравнение некогерентной интенсивности $\langle |u|^2 \rangle$, определяемой формулой (15), с [4] невозможно из-за отсутствия там явного выражения для $\langle |u|^2 \rangle$. Однако физический смысл $\langle |u|^2 \rangle$ и некогерентного сечения рассеяния в спектральном виде (182) из [4] сопоставим — обе величины определяются соответствующими множителями ослабления на трассах падения и рассеяния, зависящих от их направлений. Преимущество координатного представления (15) в выражении через обобщение достаточно простых асимптот Л. М. Брехов-

ских на случай зависимости $\eta_0(k_{\perp})$ от направления k_{\perp} . Кроме того, более высокие итерации в решении динамической задачи (8) могут найти применение, например, в расчетах спектров высших порядков при скользящем распространении.

В заключение автор выражает благодарность И. М. Фуксу, В. Д. Фрейлихеру и А. А. Пузенко за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Басс Ф. Г., Фукс И. М. Рассеяние волн на статистически неровной поверхности. — М.: Наука, 1972.—424 с.
2. Фрейлихер В. Д., Фукс И. М. — Изв вузов — Радиофизика, 1970, 13, № 1, с. 73.
3. Жук Н. П., Третьяков О. А. Препринт ИРЭ АН УССР № 174. — Харьков, 1981.
4. Furutsu K., Eng D. — IEE Proc., 1983, F 130, № 7, p. 601.
5. Ito S. — Radio Sci., 1985, 20, № 1, p. 1.
6. Брюховецкий А. С. Тезисы докладов IX Всесоюзного симпозиума по дифракции и распространению волн. — Тбилиси, 1985, 1, с. 203.
7. Алексеев В. Н., Комиссаров В. М. — Труды Акуст. ин-та, 1968, № 4, с. 27.
8. Апресян Л. А. — Изв вузов — Радиофизика, 1974, 17, № 2 с. 165.
9. Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И. Введение в статистическую радиофизику. Ч. 2. Случайные поля. — М.: Наука, 1978. — 464 с.
10. Фрейлихер В. Д., Фукс И. М. — Изв. вузов — Радиофизика, 1976, 19, № 3, с. 401.
11. Брюховецкий А. С., Фукс И. М. — Изв. вузов — Радиофизика, 1985, 28, № 11, с. 1400.
12. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. — М.: Наука, 1973. — 343 с.

Институт радиофизики и электроники
АН УССР

Поступила в редакцию
20 мая 1986 г.

ON A VERSION OF THE PERTURBATION METHOD IN THE THEORY OF WAVE SCATTERING BY A STATISTICALLY ROUGH SURFACE WITH A FINITE IMPEDANCE

A. S. Bryukhovetskiĭ

The paper presents a version of the perturbation method based on the solution of an integral equation for the field fluctuations. The kernel of the equation involves a function representing the point source field over a plane which impedance is equal to the effective one for the average field.
