

УДК 537.86:530.182

СПИРАЛЬНЫЕ И КОНЦЕНТРИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ В АКТИВНЫХ СРЕДАХ С МЯГКИМ И ЖЕСТКИМ ВОЗБУЖДЕНИЕМ

Б. А. Маломед, А. Н. Руденко

Предложен приближенный метод описания спиральных волн в рамках обобщенного уравнения Гинзбурга — Ландау, являющегося в слабо-надkritической области универсальной моделью активных сред с мягким возбуждением автоколебаний. Путем сравнения с численными результатами показано, что этот метод, основанный на «прямой» сшивке асимптотических разложений, справедливых при больших и малых значениях радиальной переменной, дает удовлетворительные значения асимптотического радиального волнового числа спиральной волны для не слишком малых значений коэффициентов дисперсии. Развито также описание спиральных волн в простейшей модели активной среды с жестким возбуждением. В случае малых коэффициентов дисперсии описание основано на строгом методе сращивания асимптотических разложений, а в общем случае — на методе «прямой сшивки». С помощью обоих методов показано, что для концентрических волн, в отличие от спиральных, асимптотическое волновое число является произвольным параметром и групповая скорость направлена от периферии к центру.

1. ВВЕДЕНИЕ

Двумерные нелинейные волновые режимы в виде вращающихся архимедовых спиралей экспериментально обнаружены в активных средах различной природы. Наиболее известным их примером является химическая автоколебательная система Белоусова — Жаботинского [1]. В простейшем случае спиральная волна (СВ) порождается колебательной неустойчивостью однородного состояния системы к длинноволновым возмущениям [2]. Построение адекватной модели, описывающей конкретную химическую или биологическую систему, в которой наблюдаются СВ, часто является весьма трудной задачей [3]. Однако доказано [2, 4], что любая система, в которой возникает упомянутая выше неустойчивость, описывается в окрестности соответствующей бифуркации универсальным обобщенным уравнением Гинзбурга — Ландау (УГЛ) для комплексной функции (параметра порядка [5]) u :

$$u_t = u - |u|^2 u + \Delta u + i\alpha|u|^2 u + i\beta\Delta u. \quad (1)$$

Здесь Δ обозначает лапласиан, а вещественные параметры α и β обычно называются коэффициентами нелинейной и пространственной дисперсии. Как показано в [6], необходимым условием существования СВ в системе общего вида является наличие ненулевого эффективного коэффициента дисперсии. Для УГЛ (1) этот коэффициент равен [2] $\alpha_{eff} = (\alpha + \beta)/(1 - \alpha\beta)$. В работе [2] показано, что, если интересоваться квазистационарными решениями уравнений (1) ($u_t = i\omega u$, $\omega = \text{const}$), коэффициент β можно исключить. Поэтому в дальнейшем мы будем полагать в (1) $\beta = 0$.

Решение, описывающее СВ, ищется в виде [7]

$$u(r, \theta, t) = a(r) \exp[i(\omega t + N\theta + \Phi(r))]. \quad (2)$$

где r и θ — полярные координаты, a и Φ — вещественные функции (амплитуда и фаза), а целое число N — топологический заряд [8] (число «рук» спирали). На больших расстояниях от центра СВ может быть локально представлена как плоская волна (ПВ), бегущая вдоль радиуса:

$$u = \sqrt{1 - k^2} \exp[i(\omega t + kr)]; \quad (3)$$

$$\omega = \alpha(1 - k^2), \quad (4)$$

где асимптотическое радиальное волновое число $k = \lim_{r \rightarrow \infty} (d\Phi/dr)$. Фундаментальное свойство СВ состоит в том, что, в отличие от истинной ПВ, величина k (и, следовательно, частота ω) является не произвольным параметром, а однозначно определенным собственным значением нелинейной задачи, зависящим только от α и N : $k = k_N(\alpha)$ [2, 6].

Поскольку, как упоминалось выше, необходимым условием существования СВ является наличие отличного от нуля коэффициента α , естественный подход к вычислению k состоит в том, чтобы, предполагая $|\alpha| \ll 1$, строить решение (2) методом сращиваемых асимптотических разложений (САР). При этом значение k определяется из условия гладкого сращивания разложений, справедливых в различных областях радиальной переменной r . Эта программа была предложена и осуществлена в весьма важной работе Хагана [2]. В этой работе было получено явное выражение для $k_N(\alpha)$:

$$k_N(\alpha) = 2\alpha^{-1} \exp(-\pi/(2N|\alpha|) - C_N - \gamma), \quad (5)$$

где C_N — некоторые численные константы, зависящие только от N ($C_1 \approx 0,098$, $C_2 \approx 0,998$), γ — постоянная Эйлера.

Для случая $|\alpha| \gg 1$ аналитическое асимптотическое решение также было построено в [2], однако в этом случае СВ заведомо неустойчива [2]. В то же время в случае $\alpha \sim 1$, который представляет основной интерес с физической точки зрения, отсутствуют последовательные приближенные методы построения решения. Имеется, однако, относительно грубый метод, позволяющий получить оценку для $k_N(\alpha)$, справедливую как раз при $\alpha \sim 1$. Этот метод был предложен в [6] для исследования квазигармонических СВ в системе Фитц—Хью—Нагумо, являющейся стандартной моделью биологической возбудимой среды. Метод основан на «прямой» сшивке асимптотических разложений, справедливых на малых и больших r , в некоторой промежуточной точке r_0 и определяет k вместе с самим значением r_0 .

Во втором разделе мы применяем этот метод к СВ, описываемым УГЛ (1). Сравнение полученных результатов с зависимостью $k_N(\alpha)$, найденной численными методами для всех значений α также в [2], позволяет оценить справедливость и точность процедуры «прямой» сшивки. Она оказывается неправильной в области $|\alpha| \ll 1$, где она дает $k \sim \alpha$ вместо экспоненциально малой величины (6), но в областях

$|\alpha| \sim 1$ и $|\alpha| \gg 1$ согласие с численной зависимостью $k_N(\alpha)$ является удовлетворительным.

В третьем разделе мы исследуем решения УГЛ (1), описывающие двух- и трехмерные концентрические волны (КВ), т.е. решения вида (3) с $N=0$. Применение как строгого метода САР, так и «прямого» метода приводит к выводу о том, что для КВ, в противоположность СВ, величина асимптотического волнового числа $|k|$ является произвольным параметром, в то время как знак k фиксирован так, что групповая скорость КВ направлена внутрь, т.е. центральная область КВ является «поглотителем» волн (групповая скорость СВ направлена наружу, т.е. центральная область СВ является, напротив, «излучателем»).

Помимо активных сред с мягким возбуждением, описываемых в слабонадkritическом случае УГЛ (1), в различных (в частности, биофизических [6]) задачах часто встречаются примеры жестко возбуждаемых сред, т.е. сред, у которых однородное стационарное состояние ($u=0$) является не локально неустойчивым, а метастабильным. В четвертом разделе мы исследуем спиральные и концентрические волны в простейшей модели жестко возбуждаемой активной среды.

$$u_t = -u + |u|^2 u - v|u|^4 u + \Delta u + i\alpha|u|^2 u + i\beta\Delta u, \quad (6)$$

предложенной в [9]*. Другое важное обобщение теории СВ и КВ связано с исследованием этих волн в системе с мягким возбуждением, где, однако, колебательная неустойчивость возникает не на нулевом, как в случае обычного УГЛ, а на конечном волновом числе возмущения [14, 15]. Результаты исследования такого обобщения, анонсированные вместе с результатами данной статьи в [16] и [17], подробно изложены в работе [18].

2. СПИРАЛЬНЫЕ ВОЛНЫ

Согласно сказанному во Введении, квазистационарный вариант уравнения (1) сводится к следующему виду:

$$i\omega u = u - |u|^2 u + \Delta u + i\alpha|u|^2 u. \quad (7)$$

Подстановка (2) в (7) приводит к уравнениям

$$a - a^3 + a''_{rr} + r^{-1} a'_r - a(\Phi'_r)^2 - N^2 r^{-2} a = 0; \quad (8)$$

$$\Phi''_{rr} + r^{-1} \Phi'_r + 2a^{-1} a'_r \Phi'_r + \alpha a^2 = \omega. \quad (9)$$

Используя (4), легко найти асимптотическую форму решения системы (8), (9) при $r \rightarrow \infty$:

$$a(r) = \sqrt{1 - k^2} - (2\alpha)^{-1} (k/\sqrt{1 - k^2}) r^{-1} + O(r^{-2}); \quad (10)$$

$$\Phi'_r = k + (2\alpha)^{-1} r^{-1} + O(r^{-2}). \quad (11)$$

Разложение для малых r также может быть легко построено:

$$a(r) = a_0 r^N - (a_0/4)(N+1)^{-1} r^{N+2} + O(r^{N+4}); \quad (12)$$

$$\Phi'_r = (\alpha/2)(1 - k^2)(N+1)^{-1} r + (\alpha/4)(1 - k^2)(N+1)^{-2}(N+2)^{-1} \times \\ \times r^3 + O(r^5). \quad (13)$$

Разложения (12), (13) справедливы, если $N > 1$. При $N = 1$

$$a(r) = a_0 r - (a_0/8)r^3 + O(r^5); \quad (14)$$

$$\Phi'_r = (\alpha/4)(1 - k^2)r + (\alpha/6)[-a_0^2 + (1/8)(1 - k^2)]r^3. \quad (15)$$

Параметры k и a_0 являются произвольными с точки зрения разложений (10)–(15). Однако оба параметра однозначно определяются тем условием, что (10), (11) и (12)–(15) являются асимптотическими формами одного и того же непрерывного решения. Поскольку (8) является уравнением второго порядка для амплитуды $a(r)$, а (9) – уравнением первого порядка для локального радиального волнового числа Φ'_r , мы требуем, чтобы значения величин $a(r)$, a'_r и Φ'_r , определяемые при больших и малых r соответственно формулами (10), (11) и (12)–(15), совпадали между собой в некоторой промежуточной точке $r = r_0$. Это условие обеспечивает три уравнения, которым должны удовлетворять параметры k , a_0 , r_0 **. Отметим, что параметр r_0 представляет самостоятельный интерес: он дает оценку размера минимальной области, в которой может существовать СВ [6, 10].

Эти уравнения, вообще говоря, могут быть решены лишь численно. Однако они сильно упрощаются, если в выражениях (10), (11) оста-

* Точнее говоря, в [9] рассматривался частный случай уравнения (6) с $\beta = 0$.

** В работе [6] использовался другой вариант процедуры «прямой» сшивки асимптотик, более удобный для рассмотренной там модели Фитц–Хью–Нагумо: сшивались производные фазы Φ'_r и Φ''_{rr} , а условие непрерывности амплитуды не рассматривалось.

вить только первые члены. Тогда уравнения сшивки принимают вид ($N > 1$)

$$\sqrt{1 - k^2} = a_0 r_0^N - (a_0/4) r_0^{N+2}/(N+1); \quad (16)$$

$$O = N a_0 r_0^{N-1} - (a_0/4) (N+2) r_0^{N+1}/(N+1); \quad (17)$$

$$k = (a/2) (1 - k^2) r_0/(N+1) + (\alpha/4) (1 - k^2) r_0^3/[(N+1)^2(N+2)]. \quad (18)$$

Из (17) следует

$$r_0^2 = 4N(N+1)/(N+2). \quad (19)$$

Используя (19), мы получаем из (16) и (18)

$$k_N(\alpha) = [\sqrt{1 + 4\alpha^2 b^2(N)} - 1]/[2\alpha b(N)], \quad (20)$$

$$b(N) \equiv \sqrt{N(N+1)^{-1}(N+2)^{-1}(N^2+6N+4)(N+2)^{-2}}.$$

В случае $N=1$ выражения (12), (13) должны быть заменены на (14), (15). Тогда простое исследование показывает, что уравнения сшивки, написанные в приближении, аналогичном (16) — (18), не имеют решений. Поэтому при $N=1$ необходимо обратиться к более точному приближению, учитывающему вторые члены в разложениях (10), (11). Соответствующая система уравнений сшивки решалась численно. Результат сравнения полученной таким образом зависимости $k_1(\alpha)$

(для $N=1$) с зависимостью $\tilde{k}_1(\alpha)$, найденной в [2] прямым численным решением исходной системы дифференциальных уравнений (8), (9), вместе с результатом сравнения зависимости (20) $k_2(\alpha)$ (для $N=2$) с численной зависимостью $\tilde{k}_2(\alpha)$, также найденной в [2], представлен на рис. 1, где отношения $k_{1,2}(\alpha)/\tilde{k}_{1,2}(\alpha)$ изображены как функции α .

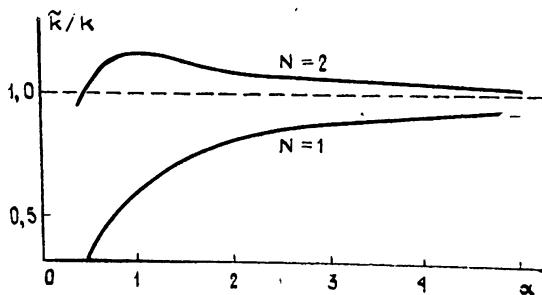


Рис. 1. Сравнение асимптотического волнового числа $k_N(\alpha)$, вычисленного методом «прямой» сшивки, с волновым числом $\tilde{k}_N(\alpha)$, найденным численно в [2].

Как видно из этого рисунка, «прямой» метод непригоден при $\alpha \rightarrow 0$, где, однако, хорошие результаты дает строгий метод Хагана [2]. В то же время «прямой» метод дает удовлетворительные результаты в области $\alpha \sim 1$, особенно для $N=2$ (для $N > 2$ численные результаты, с которыми можно было бы сравнить (20), отсутствуют).

Что касается области $\alpha \gg 1$, в ней, как уже упоминалось выше, СВ заведомо неустойчива. Тем не менее представляет интерес сравнить в этой области зависимость (20)

$$k_N(\alpha) \approx 1 - (2b(N)\alpha)^{-1} \quad (21)$$

с зависимостью $\tilde{k}_N(\alpha)$, также найденной в [2] с помощью строгих асимптотических методов (использующих α^{-1} как малый параметр): $\tilde{k}_N(\alpha) = 1 - \text{const} \cdot \alpha^{-1}$. Например, для $N=2$ $\text{const} \simeq 0,678$ [2]; соответствующее значение из (21) $(2b(2))^{-1} \simeq 0,980$,

Зависимости $k_N(\alpha)$ для различных N , полученные «прямым» методом, изображены на рис. 2. Что касается параметра r_0 , из (19) видно, что в рассмотренном приближении он зависит только от N , монотонно увеличиваясь с ростом N . В следующем приближении, учитывающем вторые члены в разложениях (10), (11), уравнения сшивки для всех N должны решаться численно. В этом приближении r_0 зависит от α . Однако согласие полученной в этом приближении зависимости $k_2(\alpha)$ с

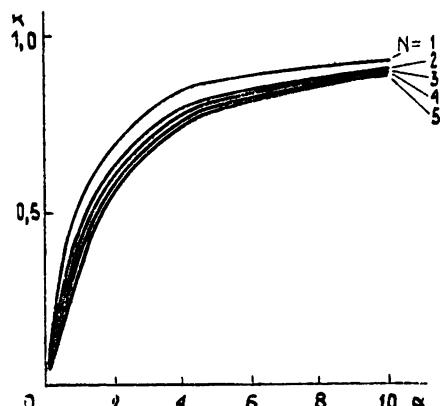


Рис. 2. Волновое число $k_N(\alpha)$ при различных N .

В заключение этого раздела мы кратко рассмотрим естественное трехмерное обобщение решения (2):

$$u(t, r, \theta, z) = \tilde{a}(r) \exp[i(\tilde{\omega}t + N\theta + qz + \tilde{\Phi}(r))], \quad (22)$$

где z — третья координата. Подставляя (22) в (1) (с $\beta=0$), легко убедиться, что решение (22) следующим образом связано с (2):

$$\tilde{a} = \sqrt{1 - q^2} a(r\sqrt{1 - q^2}), \quad \tilde{\Phi} = \Phi(r\sqrt{1 - q^2}), \quad \tilde{\omega} = (1 - q^2)\omega. \quad (23)$$

Согласно (23) осевое волновое число q можно выбирать произвольно из интервала $q^2 < 1$ и соответствующее радиальное волновое число $\tilde{k} = k\sqrt{1 - q^2}$. Решение (22), (23) описывает «скрученную» СВ с геликоидальной поверхностью равных фаз (аналогичное решение линейного варианта УГЛ рассматривалось в [11]).

3. КОНЦЕНТРИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ

Метод САР, развитый в [2] для описания СВ, может быть легко обобщен применительно к КВ. Действительно, в [2] асимптотическое разложение функции Φ' было построено в трех областях переменной r : внутренней, промежуточной и внешней. В данной задаче промежуточная область отсутствует, поскольку $N=0$. Разложение во внутренней области $r \leq (\alpha k)^{-1}$ определяется уравнением, следующим из (8), (9) и аналогичным уравнению (2.3) работы [2]:

$$(\Phi'_r)_r + r^{-1}\Phi'_r = a(1 - a^2(r) - k^2). \quad (24)$$

В нулевом порядке по α во внутренней области $a(r) \equiv 1$ (вместо $a(r) \equiv P_N(r)$ при $N \neq 0$, где $P_N(r)$ — функции, исследованные в [7] и [13]). С учетом этого обстоятельства решение уравнения (24) очевидно:

$$\Phi'_r = -(1/2)\alpha k^2 r. \quad (25)$$

Решение во внешней области $r \geq (\alpha k)^{-1}$ такое же, как в [2]:

$$\Phi'_r = -k \frac{\xi K'_0(\alpha kr) + I'_0(\alpha kr)}{\xi K_0(\alpha kr) + I_0(\alpha kr)}, \quad (26)$$

где I_0 и K_0 — модифицированные функции Бесселя и Ганкеля, а ξ — произвольная постоянная. Очевидно, решения (26) могут быть гладко

сшиты с (25) только при $\xi=0$; при этом значение $|k|$ остаётся произвольным, а знак k определяется условием $ak<0$ (в противном случае, как видно из (26), $\lim_{r \rightarrow \infty} \Phi'_r = -k$). Согласно (4) групповая радиальная скорость КВ

$$V = -(\partial\omega/\partial k) = 2ak. \quad (27)$$

Таким образом, условие $ak<0$ означает $V<0$, т. е. КВ бегут от периферии к центральной области, которую можно рассматривать как «поглотитель» волн. Напротив, для СВ, как следует из (5) и (20), $ak>0$, так что скорость (27) для них положительна и центральную область СВ можно рассматривать как «излучатель».

Покажем теперь, как можно исследовать КВ в рамках «прямого» метода при $a \geq 1$. Асимптотический вид решения для больших и малых r может быть найден из уравнений (8) и (9), где нужно положить $N=0$. В частности, при $r \rightarrow \infty$ остаются справедливыми формулы (10) и (11), так как зависимость от N возникает только в членах порядка r^{-2} . Разложения для $r \rightarrow 0$ имеют следующий вид вместо (12)–(15):

$$a(r) = a_0 - (a_0/4)(1 - a_0^2)r^2 + O(r^4); \quad (28)$$

$$\Phi'_r = (\alpha/2)(1 - k^2 - a_0^2)r + (\alpha/8)(1 - a_0^2)(1 - k^2)r^3 + O(r^5). \quad (29)$$

Так как $a(r) \neq 0$ при $r=0$, в самом грубом приближении амплитуду $a(r)$ можно считать постоянной: $a(r) = \sqrt{1 - k^2}$. Тогда остается одно уравнение сшивки для Φ'_r . В рассматриваемом приближении мы можем положить $\Phi'_r = 0$ для малых r , после чего условие сшивки принимает вид $\Phi'_r(r_0) = 0$, где Φ'_r определено в (11). Таким образом, мы получаем

$$r_0 = -(2ak)^{-1} \quad (30)$$

(r_0 можно рассматривать как оценку размера центральной области, где локализован «поглотитель» волн). Из (30) следует, что $|k|$ может быть произвольным, в то время как знак k фиксирован условием $r_0 > 0$, т. е. $ak < 0$. Выше мы пришли к тем же результатам в случае $a \ll 1$, применяя строгий метод САР.

Двумерные КВ допускают очевидное трехмерное обобщение, аналогичное (22). Соответствующее решение описывает волны с коническими поверхностями равных фаз.

Естественно также рассмотреть трехмерные КВ, которые имеют вид (2) с $N=0$, где r теперь понимается как радиальная координата в трехмерном пространстве. Оба метода (САР и «прямая сшивка») показывают, что трехмерные КВ обладают теми же свойствами, что и двумерные.

В заключение этого раздела обсудим условия возникновения спиральных и концентрических волн. СВ естественно возникают из разрывов плоского волнового фронта [12]. Условия же возникновения КВ выглядят довольно искусственными, так как в силу «поглощающего» характера этой волновой структуры для ее создания необходимо симметрично расположить достаточное число локальных источников, генерирующих сходящуюся волну. Однако КВ должны естественно возникать в двумерных активных средах, расположенных на сферической поверхности (примером может быть клеточная мембрана): локальный источник генерирует КВ, сходящуюся в противоположной точке сферы.

4. СИСТЕМА С ЖЕСТКИМ ВОЗБУЖДЕНИЕМ

4.1. Плоские волны. В жестко возбуждаемой системе (6) решения, описывающие СВ, следует искать в том же виде (2), что и в случае системы (1). Ясно, однако, что исследование СВ имеет смысл, лишь если асимптотическая плоская волна (ПВ), бегущая вдоль радиуса,

в которую локально переходит СВ при $r \rightarrow \infty$, устойчива. В отличие от хорошо изученной модели (1), в модели (6) устойчивость ПВ до сих пор, по-видимому, систематически не исследовалась. Поэтому данный раздел мы начнем с такого исследования.

Общее решение уравнения (6) удобно искать в виде

$$u = a(t, r) \exp(i\psi(t, r)). \quad (31)$$

Подстановка (31) в (6) приводит к уравнениям

$$a_t = -a + a^3 - \nu a^5 + \Delta a - a(\nabla \psi)^2 - 2\beta \nabla a \nabla \psi - \beta a \Delta \psi; \quad (32)$$

$$\alpha \psi_t = a \Delta \psi - 2\nabla a \nabla \psi + \alpha a^3 + \beta \Delta a - \beta a (\nabla \psi)^2. \quad (33)$$

Система (32), (33) имеет очевидное семейство решений, описывающих ПВ и зависящих от одного параметра — волнового числа k (ср. (3), (4)):

$$a^2 = A_0^2 = [1 \pm \sqrt{1 - 4\nu(1+k^2)}]/(2\nu); \quad (34)$$

$$\psi = \psi_0 = \omega t + kx, \quad \omega = aA_0^2 - \beta k^2. \quad (35)$$

Как видно из (34), k можно выбирать из интервала

$$0 < k^2 < (1 - 4\nu)/(4\nu), \quad (36)$$

который существует при условии $\nu < 1/4$. При этом каждому k^2 из (36) отвечают два разных решения, соответствующих двум знакам в (34).

Для исследования устойчивости ПВ (34), (35) рассмотрим возмущенное решение

$$a = a_0 + a_1 \exp(\Gamma t + i\mathbf{p}x), \quad \psi = \psi_0 + \psi_1 \exp(\Gamma t + i\mathbf{p}x), \quad (37)$$

где Γ — фикримент неустойчивости, \mathbf{p} — волновой вектор и a_1 , ψ_1 — малые амплитуды возмущения. Подстановка (37) в (32) и (33) и линеаризация по a_1 , ψ_1 дают дисперсионное уравнение, связывающее Γ и \mathbf{p} :

$$\begin{aligned} \gamma^2 + 2\gamma[(2\nu A_0^2 - 1)A_0^2 + p^2] + 2A_0^2 p^2(2\nu A_0^2 - 1 - \alpha\beta) + \\ + (1 + \beta^2)p^4 - 4(\mathbf{p} \cdot \mathbf{k})^2 + 4i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{p})(\alpha A_0^2 - \beta p^2) = 0, \end{aligned} \quad (38)$$

где $\gamma = \Gamma - 2i\beta(\mathbf{k} \cdot \mathbf{p})$, $\mathbf{k} = (k, 0)$. Как видно из (38), устойчивость к возмущениям с $\mathbf{p} = 0$ обеспечивается условием

$$2\nu A_0^2 \geq 1, \quad (39)$$

которое сразу же исключает решения, отвечающие нижнему знаку в (34). Что касается возмущений с $\mathbf{p} \neq 0$, из (38) следует, что из их числа наиболее опасными являются одномерные, т. е. возмущения с $\mathbf{p} = (p, 0)$.

Если необходимое условие (39) выполнено, то остающееся условие устойчивости принимает следующий вид: неравенство

$$\begin{aligned} [A_0^2(2\nu A_0^2 - 1) + p^2]^2[2A_0^2(2\nu A_0^2 - 1 - \alpha\beta) - 4k^2 + (1 + \beta^2)p^2] > \\ \geq 4k^2(\alpha A_0^2 - \beta p^2)^2 \end{aligned} \quad (40)$$

должно выполняться для всех p^2 ($0 < p^2 < \infty$). Для решения с максимальной амплитудой, т. е. согласно (34) с $k = 0$, неравенство (40) упрощается до условия

$$\sqrt{1 - 4\nu} > \alpha\beta. \quad (41)$$

Для решений с $k \neq 0$ неравенство (40) нельзя явно разрешить; однако из него легко получить явное условие, обеспечивающее устойчивость к возмущениям с $p^2 \ll 1$:

$$\begin{aligned} [1 + \sqrt{1 - 4v(1+k^2)}] [\sqrt{1 - 4v(1+k^2)} - \alpha\beta] &\geq \\ &\geq 4vk^2 [1 + \alpha^2/(1 - 4v(1+k^2))]. \end{aligned} \quad (42)$$

Отметим, что (41) следует из (42), т. е. все ПВ неустойчивы, если неустойчива волна максимальной амплитуды. Наконец, в бездисперсионном случае $\alpha = \beta = 0$ полное условие (40) может быть сведено к явлому неравенству на k^2 :

$$0 \ll k^2 \ll (3 - 16v + \sqrt{9 - 32v}) / (32v) \quad (43)$$

(выражение в правой части (43) вещественно и положительно в силу $v < 1/4$).

4.2. Спиральные волны. Подстановка (2) в (6) дает уравнения, аналогичные (8) и (9) (см. также (32) и (33)):

$$\begin{aligned} -a + a^3 - va^5 + a''_{rr} + r^{-1} a'_r - a (\Phi'_r)^2 - \\ -N^2 r^{-2} a - \beta a \Phi''_{rr} - \beta r^{-1} a \Phi'_r - 2\beta a'_r \Phi'_r = 0; \end{aligned} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} \Phi''_{rr} + r^{-1} \Phi'_r + 2a^{-1} a'_r \Phi'_r + \alpha a^2 + \beta a^{-1} a''_{rr} + \\ + \beta r^{-1} a^{-1} a'_r - \beta N^2 r^{-2} - \beta (\Phi'_r)^2 = \omega. \end{aligned} \quad (45)$$

В случае малых коэффициентов α и β метод САР, развитый в [2] для исследования системы (8), (9), может быть легко перенесен на систему (44), (45). Например, следующее из (44), (45) при $r \gg 1$ (т. е. в промежуточной и внешней областях в терминах [2]) уравнение для Φ'_r имеет вид

$$(\Phi'_r)' + r^{-1} \Phi'_r = (\beta + \alpha (2vA_0^2 - 1)^{-1}) [(\Phi'_r)^2 - k^2 - N^2 r^{-2}]. \quad (46)$$

Сравнение (46) с аналогичным уравнением (3.17) из [2] показывает, что все отличие сводится к замене фигурирующего в [2] коэффициента α на

$$\alpha_{\text{eff}} \equiv |\beta + \alpha (2vA_0^2 - 1)^{-1}|. \quad (47)$$

Нетрудно убедиться, что и во внутренней области асимптотические уравнения совпадают с соответствующими уравнениями из [2] после замены (47). При этом существенно, что асимптотическое волновое число $k = \lim_{r \rightarrow \infty} \Phi'_r$ мало в силу малости (47). Поэтому согласно (34) в

(47) можно подставить $2vA_0^2 = 1 + \sqrt{1 - 4v}$:

$$\alpha_{\text{eff}} = |\beta + \alpha/\sqrt{1 - 4v}|. \quad (48)$$

Теперь, подставляя (48) в заимствованную из [3] формулу (5), получим окончательный результат:

$$k = 2\alpha_{\text{eff}}^{-1} \exp(-(\pi/2N\alpha_{\text{eff}}) - \gamma - C_N(v)). \quad (49)$$

Здесь γ — постоянная Эйлера, а $C_N(v)$ — числовые константы, зависящие не только от N , как в [2], но и от параметра v . Эти константы можно найти численно, но мы здесь не будем этим заниматься.

Перейдем теперь к описанию СВ с помощью «прямого» метода в параметрической области $\alpha, \beta \geq 1$. При $r \rightarrow \infty$ решение системы (44), (45) имеет следующий асимптотический вид (ср. (10), (11)):

$$a(r) = A_0 - k(1+\beta^2)[2A_0(\alpha + \beta(2vA_0^2 - 1))]^{-1}r^{-1} + O(r^{-2}); \quad (50)$$

$$\Phi'_r = k + (1/2\beta)[1 - \alpha(1+\beta^2)/(1+\beta(2vA_0^2 - 1))]r^{-1} + O(r^{-2}). \quad (51)$$

При $r \rightarrow 0$ (ср. (12), (13))

$$a(r) = a_0 r^N + \{(1+\beta\omega)a_0/[4(N+1)(1+\beta^2)]\}r^{N+2} + O(r^{N+4}); \quad (52)$$

$$\Phi'_r = \{(\omega - \beta)/[2(N+1)(1+\beta^2)]\}r + (1/8)[\beta(N+1)(1+\beta\omega^2) - (\omega - \beta)(\beta\omega^2 + \beta^2 + 2)][(N+2)(N+1)^2(1+\beta^2)^2]^{-1}r^3 + O(r^5), \quad (53)$$

где ω определено в (35). Формулы (52), (53) справедливы, если $N > 1$. При $N=1$ (ср. (14), (15)) они заменяются на

$$a = a_0 r + (a_0/8)(1+\beta\omega)(1+\beta^2)^{-1}r^3 + O(r^5); \quad (54)$$

$$\Phi'_r = (1/4)(\omega - \beta)(1+\beta^2)^{-1}r + (1/6)\{[16(1+\beta^2)]^{-1} \times \\ \times [2(1+\beta\omega)(\beta^2\omega - \omega + 2\beta) + \beta(\omega - \beta)^2] - \alpha a_0^2\}r^3 + O(r^5). \quad (55)$$

«Прямой» метод будет применен здесь в том же приближении, что и в разд. 2, т. е. мы учтем только первые члены в разложениях (50), (51) и оба члена в (52) — (55). В отличие от ситуации, рассмотренной во втором разделе, в данном случае уравнения сшивки могут быть решены только численно. Ниже изложены полученные таким образом результаты.

Для $N=1$ уравнения сшивки имеют решения в параметрической области

$$0,3 < \beta < 9,4. \quad (56)$$

Эти решения для $\beta=2,0$ и различных значений $v < 1/4$ изображены на рис. 3. Отметим, что зависимость $k(\alpha)$ является, как и на рис. 2, выпуклой. Однако, в отличие от случая мягко возбуждаемой системы (рис. 2), кривые $k(\alpha)$ обрываются при конечных значениях α , когда k^2 достигает максимально возможного значения

$$k_{\max}^2 = (1 - 4v)/(4v) \quad (57)$$

(см. (36)). Зависимости $k(\beta)$ и $k(v)$ для $N=1$ и фиксированного α изображены на рис. 4 и рис. 5.

Для $N \geq 2$ зависимости $k(\alpha)$ при различных v представлены на рис. 6, причем для всех значений $2 < N < 5$ графики практически совпадают между собой. Однако для каждого N имеется собственный интервал $\beta_{\min}^{(N)} < \beta < \beta_{\max}^{(N)}$, в котором уравнения сшивки имеют решения (например, (56) для $N=1$). Значение $\beta_{\min}^{(N)}$ для всех N такое же, как для $N=1$. Значения $\beta_{\max}^{(N)}$ следующие: $\beta_{\max}^{(2)} = 7,9$; $\beta_{\max}^{(3)} = 6,7$; $\beta_{\max}^{(4)} = 6,3$; $\beta_{\max}^{(5)} = 6,1$.

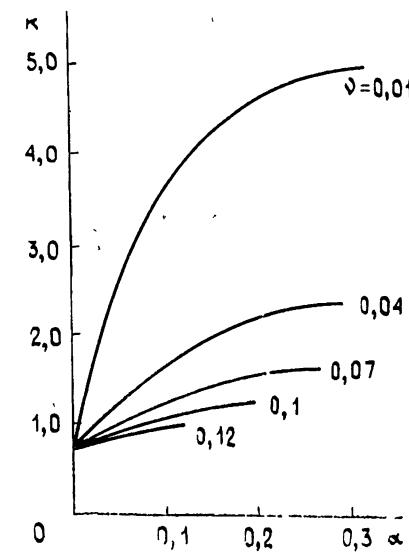


Рис. 3. Зависимость $k(\alpha)$ для $\beta=2$, $N=1$.

Интересно отметить, что для достаточно больших β и $N > 4$ уравнения сшивки имеют два корня. Дополнительный корень $\kappa(\alpha)$ для $\beta=6$, $N=4$ и $N=5$ представлен на рис. 7. Наконец, зависимости $k(\beta)$ и $k(v)$ для $N \geq 2$ и фиксированного α изображены на рис. 8 и 9.

Отсутствие решений с $\beta > \beta_{\max}^{(N)}$ является проявлением того обстоятельства, о котором мы уже упомянули выше: с ростом дисперсионных параметров k^2 достигает значения (57), и далее решений нет. В то же время отсутствие решений при $\beta < \beta_{\min}$ является недостатком «прямого» метода: выше было показано, что при малых α и β решение существует и определяется формулами (48), (49). В этой связи следует отметить, что, как мы убедились в разд. 2, «прямой» метод теряет применимость как раз при малых значениях коэффициента дисперсии.

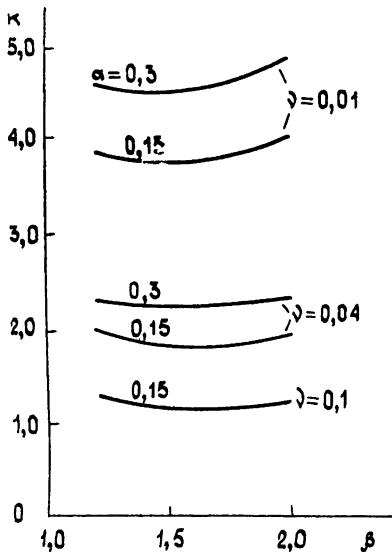


Рис. 4.

Рис. 4 Зависимость $k(\beta)$ для $N=1$. Рис. 5. Зависимость $k(v)$ для $N=1$.

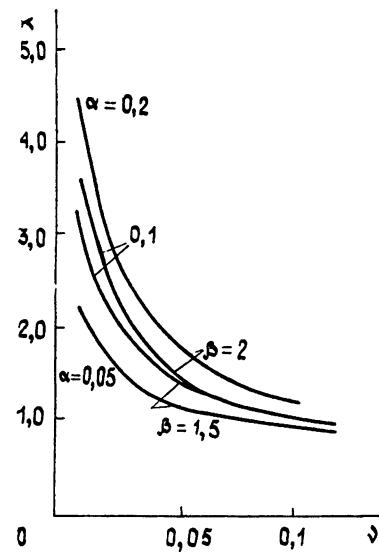


Рис. 5.

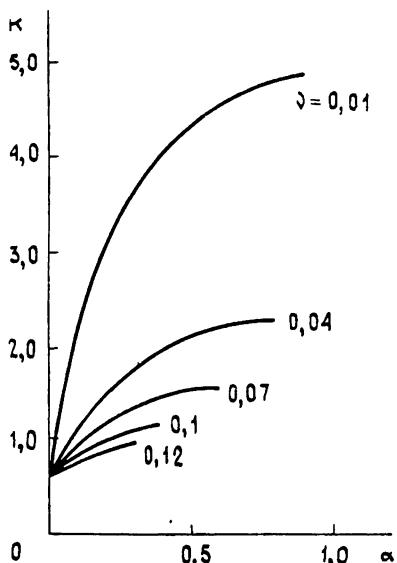


Рис. 6.

Рис. 6. Зависимость $k(\alpha)$ для $\beta=2$, $N>2$.
Рис. 7. Дополнительный корень $\kappa(\alpha)$ для $\beta=6$, $N=4$ и 5.

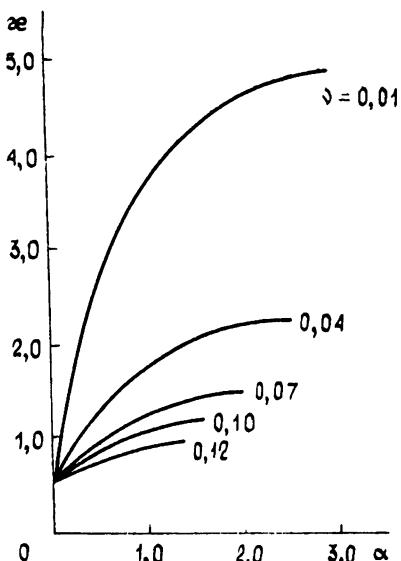


Рис. 7.

Остановимся кратко на трехмерном обобщении решения (2), аналогичном (22). Подстановка (22) в (6) приводит к следующим соотношениям:

$$\tilde{a}(r; v) = \sqrt{1+q^2} a(r \sqrt{1+q^2}; (1+q^2)v), \quad (58)$$

$$\tilde{\Phi}(r; v) = \Phi(r \sqrt{1+q^2}; (1+q^2)v), \quad \tilde{\omega} = (1+q^2)\omega - \beta q^2.$$

Интересно отметить, что (58), в отличие от (23), не налагает ограничений на q^2 .

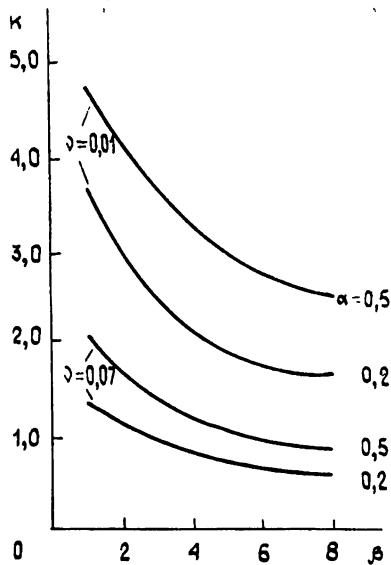


Рис. 8.

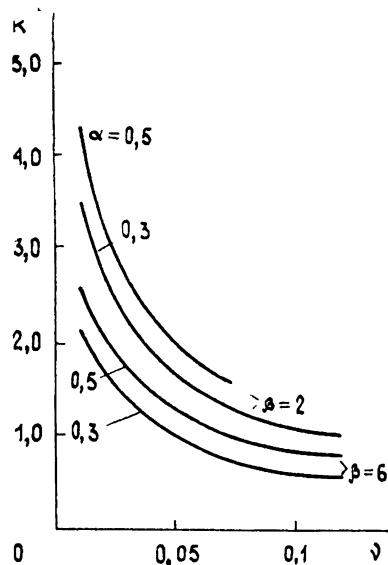


Рис. 9.

Рис. 8. Зависимость $k(\beta)$ для $N \geq 2$. Рис. 9. Зависимость $k(v)$ для $N \geq 2$.

Что касается двух- и трехмерных КВ в жестко возбуждаемой системе (6), их исследование обоими методами (САР и «прямой сшивки») показывает, что $|k|$ может быть произвольным, а знак k определяется условием $k(\beta + \alpha/\sqrt{1-4v}) < 0$. Это условие означает, по крайней мере при малых α и β , что, как и в случае «мягкой» системы (1), КВ распространяются внутрь (а СВ, как следует из изложенного выше, — наружу).

В связи с обсуждением жестко возбуждаемых систем уместно сделать замечание об устойчивости СВ. Как отмечалось в [2], СВ с $N > 1$ в «мягкой» системе должны быть неустойчивы при малом α , поскольку при $\alpha \rightarrow 0$ они переходят в заведомо неустойчивые. В данной задаче ситуация иная: как показано в [6], решения, в которые при $\alpha = \beta = 0$ переходят СВ в «жесткой» системе, устойчивы при всех N . Поэтому можно ожидать, что в этой системе СВ устойчивы не только при $N = 1$, но и при $N > 1$, что и подтверждается экспериментом с реакцией Белоусова—Жаботинского [12] (которая в условиях этого эксперимента действительно является жестко возбуждаемой).

Отметим, наконец, что, согласно [9], в системе с жестким возбуждением могут существовать (наряду с рассмотренными выше СВ обычного вида) локализованные СВ с амплитудой $a(r)$, убывающей при $r \rightarrow \infty$. Однако рассмотрение этого вопроса выходит за рамки настоящей статьи.

Авторы признательны В. И. Кринскому за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Жаботинский А. М. Концентрационные автоколебания. — М.: Наука, 1974.
2. Hagan P. S. — SIAM J. Appl. Math., 1982, 42, № 4, p. 762.
3. Winfree A. T. — Physica D, 1984, 12, № 1—3, p. 321.
4. Duffy M. R., Britton N. F., Muggay J. D. — SIAM J. Appl. Math., 1980, 39, № 1, p. 8.

5. Жакен Г. Синергетика. — М.: Мир, 1980.
6. Krinsky V. I., Malomed B. A. — Physica D, 1983, 9, № 1—2, p. 81.
7. Greenberg J. M. — SIAM J. Appl. Math., 1980, 39, № 2, p. 301.
8. Зельдович Я. Б., Маломед Б. А. — ДАН СССР, 1980, 254, № 1, с. 92; —Изв. вузов — Радиофизика, 1982, 25, № 6, с. 591.
9. Петвиашвили В. И., Сергеев А. М. — ДАН СССР, 1984, 276, № 6, с. 1380.
10. Mikhailov A. S., Krinsky V. I. — Physica D, 1983, 9, № 3, p. 346.
11. Gomatam J. — J. Phys. A, 1982, 15, № 5, p. 1463.
12. Krinsky V. I., Agladze K. I. — Physica D, 1983, 8, № 1—3, p. 50.
13. Алдушин А. П., Зельдович Я. Б., Маломед Б. А. В кн.: Горение гетерогенных и конденсированных систем. — Черноголовка: ИХФ АН СССР, 1980, с. 104.
14. Malomed B. A. — Zs. Phys. B, 1984, 55, № 3, p. 241; 249.
15. Маломед Б. А. — ЖТФ, 1984, 54, № 2, с. 233
16. Маломед Б. А., Руденко А. Н. В кн.: Математические и вычислительные методы в биологии. — Пущино: БНИЦ АН СССР, 1985, с. 68.
17. Маломед Б. А. В кн.: Синергетика-86 (Всесоюзное Совещание по самоорганизации в физических, химических и биологических системах). — Кишинев: Штиинца, 1986, с. 15.
18. Маломед Б. А. — ДАН СССР, 1986, 291, № 2, с. 327.

Институт биологической физики
АН СССР

Поступила в редакцию
11 апреля 1986 г.,
после объединения
6 августа 1986 г.

SPIRAL AND CONCENTRIC WAVES IN ACTIVE MEDIA WITH SOFT AND HARD EXCITATION

B. A. Malomed, A. N. Rudenko

An approximate method is proposed to describe spiral waves within the framework of the Ginzburg—Landau equation, which, in the small overcriticality range, is a universal model of an active medium with soft excitation of self-oscillations. By the comparison with numerical results it is shown that the method, based on the «direct» matching of asymptotic expansions valid at small and large values of the radial variable, gives satisfactory approximation for the spiral waves asymptotic wave number, for not very small values of the dispersion coefficients. Description of spiral waves in a simple model of active medium with hard excitation is also developed. In the case of small dispersion coefficients, the description is based on the rigorous method of matched asymptotic expansions, and in a general case it is based on the «direct» matching method. By means of the both methods, it is demonstrated that for concentric waves, contrarily to spiral ones, the asymptotic wave number is an arbitrary parameter, and the group velocity is directed from the periphery to the centre.