УДК 517.43+519 46

МОДУЛЯЦИОННАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ В ИНТЕГРИРУЕМЫХ МОДЕЛЯХ ПОЛЯ, ИЛИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

Н. Н. Ахмедиев, В. М. Елеонский, Н. Е. Кулагин

В последнее время при анализе явления модуляционной неустойчивости [1, 2] широко используются различные вполне интегрируемые уравнения поля или сплошной среды. Например, нелинейное уравнение Шредингера [3] или уравнение синус-Гордона [4] используются при анализе явления модуляционной неустойчивости в оптических волноводах и распределенных переходах Джозефсона. Цель настоящего сообщения — указать на связь между традиционной формулировкой задачи о модуляционной неустойчивости и особыми характеристиками динамической системы, порожденной выделяемым классом решений исходных уравнений поля. Ниже в качестве такого класса выделяется типичный для задач о модуляционной неустойчивости класс решений, периодических по пространственной переменной Такой подход к задаче был осуществлен ранее на примере нелинейного уравнения Шредингера [5, 6]. В качестве нового примера, подтверждающего общность такого подхода, рассмотрим уравнение

$$u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0 \tag{1}$$

и связанную с ним динамическую систему, порожденную разложением Фурье

$$u(x, t) = (1/2)u_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \exp(ik_x nx), \tag{2}$$

где $u_n(t)$ — коэффициенты разложения, $L=2\pi/k_x$ — основной пространственный период. Динамическая система определена в фазовом пространстве $\Gamma(p_0, u_0, . p_n, u_n, \overset{*}{p}_n, \overset{*}{u}_n ...)$ бесконечной системой уравнений гамильтонова типа для амплитуд Фурье $u_n(t)$ и $p_n = du_n/dt$.

Поясним смысл подхода на рассмотренном в [4] примере — модуляционной неустойчивости пространственно однородного и периодического по времени решения уравнения (1)

$$u_{\mathrm{vac}}(t) = 2 \arcsin(k \,\mathrm{sn}(t-t_0, k)) . \tag{3}$$

Традиционный подход к анализу модуляционной неустойчивости решения (3) в линейном приближении хорошо известен и изложен, например, в [4]. Рассмотрим задачу с точки зрения упомянутой выше динамической системы Образом решения (3) в фазовом пространстве Γ является замкнутая траектория — однофазный цикл, принадлежащий инвариантному многообразию, — плоскости (p_0, u_0). С этой точки зрения модуляционная неустойчивость решения (3) связана с тем, что рассматриваемый объект — однофазный цикл обладает в Γ устойчивым и неустойчивым седловыми многообразиями, размерность которых зависит от пространственного периода L — структурного параметра динамической системы Так как объект принадлежит вполне интегрируемой динамической системе, для которой характерно слияние устойчивого и неустойчивого седловых многообразий [7], то прямым следствием этого является существование траекторий в Γ, двоякоасимптотических при $t \to \pm\infty$ к однофазному циклу Действительно, прямым построением (например, методом Дарбу) можно показать существование решений вида

$$u(x, t) = 4 \,\mathrm{arctg}\, \Psi [R_0(x, t), t] \tag{4}$$

со следующими свойствами

$$u(x+L, t) = u(x, t), \qquad \lim_{t\to\pm\infty} [u(x, t) - u_{\mathrm{vac}}(t-t_0-2z_0)]=0 ,$$

где $R_0(x, t) = \Lambda(z_0)x+Z(z_0)t$, $\Lambda(z_0) = ik\,\mathrm{cn}(z_0, k)$ $z_0 \in (0, K)$, Z — дзета-функция Якоби, $K(k)$ — полный эллиптический интеграл, функция $\Psi(R_0, t)$, явный вид которой здесь несуществен, является строго периодической по второму аргументу, $k_x=k\,\mathrm{cn}\, z_0$, а $\omega=\pi/2K$ — основная частота цикла. Асимптотика решения (4) при $t\to\pm\infty$ соответствует решению задачи в линейном приближении, а само решение (4) полностью определяет эволюцию модуляционно-неустойчивого объекта, а также характерное для вполне интегрируемых моделей явление возврата Ферми—Пасты—Улама (в предельном случае бесконечного времени возврата) При этом асимптотическое состояние $t\to-\infty$ и $t\to+\infty$ отличаются сдвигом фаз $\Delta T=2z_0$. Отметим, что при $z_0\to K(k)$ сдвиг фаз стремится к полному периоду и асимптотика решения на фоне цикла является степенной по переменным x и t

Таким образом, эволюция динамической системы, а следовательно, и решений уравнения (1), принадлежащих выделенному классу, полностью определена, если в начальный момент времени изображающая точка в фазовом пространстве Γ принадлежит седловому многообразию какого-либо объекта (например, N-фазного цикла или N-тора) При этом конечное состояние системы определяется особым объектом, входящим в замыкание сепаратрисной траектории при $t\to\pm\infty$ Благодаря существованию бесконечной последовательности законов сохранения для вполне интегрируемых моделей возникают ограничения на тип и характеристики особых объектов, входящих в замыкание сепаратрисных траекторий [8] Если же в начальный момент изображающая точка принадлежит самому объекту (инвариантному N-тору), то эволюция системы отражает лишь движение по самому инвариантному многообразию В этом смысле перечисление возможных путей эволюции модуляционно-неустойчивых состояний сводится к перечислению объектов, обладающих седловыми многообразиями, и классификации самих седловых многообразий. При этом необходимо учитывать возможные бифуркации, возникающие при изменении параметра — пространственного периода L. Такая программа в основном может быть реализована без построения точных решений в явном виде на основе качественной теории вполне интегрируемых динамических систем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Захаров В Е — ЖЭТФ, 1966, 51, с 1107.
2. Беспалов В И, Таланов В И — Письма в ЖЭТФ, 1966, 3, с 471.
3. Chen H H, Lee Y C — Phys Rev. Lett., 1984, 53, p. 218.
4. Ercolani N. M, Forest M. G., McLaughlin D. M. — Lect. Appl Math., 1986, 23, p. 149.
5. Ахмедиев Н Н, Елеонский В М., Кулагин Н Е — ЖЭТФ, 1985, 89, с 1542.
6. Ахмедиев Н. Н, Елеонский В М, Кулагин Н Е — В сб· Методы качественной теории дифференциальных уравнений. — Горький. ИПФ АН СССР, 1985, с. 18.
7. Елеонский В. М, Кулагин Н. Е, Новожилова Н. С. — ТМФ, 1985, 65, с. 391.
8. Лерман Л. М, Уманский Я Л — В сб Методы качественной теории дифференциальных уравнений — Горький, ИПФ АН СССР, 1984, с 126.

Поступила в редакцию
16 января 1987 г.

УДК 538.56·519 25

ОБ ОДНОМ СЛУЧАЕ ПРИМЕНИМОСТИ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ К ОДНОМЕРНОЙ ЗАДАЧЕ РАССЕЯНИЯ

Л. А. Апресян

Как известно, в одномерной статической задаче рассеяния уравнение переноса излучения (УПИ) применимо лишь при условии сильного поглощения $\gamma \gg \sigma$, где γ — энергетический коэффициент поглощения, а σ — коэффициент рассеяния [1], и не может служить для описания сильно выраженных эффектов многократного рассеяния. Физически неприменимость УПИ в отсутствие поглощения обусловливается явлением стохастического резонанса [1], связанного с андерсоновской локализацией всех собственных функций одномерной случайной системы [2], что приводит к сильной корреляции фаз прямой и обратной волн и наличию сильных флуктуаций коэффициента прохождения одномерного рассеивающего слоя (в резонансных реализациях коэффициент прохождения порядка единицы при любой толщине слоя [3]).

Вывод о неприменимости УПИ для описания сильного рассеяния в одномерной задаче был получен в целом ряде работ В [1] указанное выше условие применимости УПИ найдено прямым сравнением результатов УПИ и строгого статистического анализа вторых моментов поля для среды с распределенными случайными рассеивателями При попытках формального получения УПИ из строгой волновой теории выяснилась важная роль так называемых циклических диаграмм [4], которые не учитываются УПИ, но дают значительный вклад в интенсивность обратного рассеяния (см также [5] и цитированную там литературу).

Несмотря на все сказанное, существуют простые ситуации, когда УПИ оказывается применимым и позволяет легко получать правильные нетривиальные результаты и в одномерном случае.

Пусть в одномерной среде с волновым числом k и коэффициентом поглощения $\gamma \ll k$ имеется два детерминированных рассеивателя, расстояние между центрами которых L может флуктуировать, оставаясь больше размеров рассеивателей Если за счет большого значения k флуктуации фазового набега $\psi = kL$ много больше единицы, а флуктуации интегрального ослабления γL остаются пренебрежимо малыми, то значительный интерес представляют средние по быстрым осцилляциям энергетические характеристики излучения Оказывается, что в данном случае, несмотря на одномерность задачи, такие характеристики точно описываются УПИ, хотя уже для трех рассеивателей с флуктуирующими положениями или для двух рассеивателей с флуктуирующими коэффициентами отражение УПИ становится неприменимым, что и отражает необходимость учета фазовых соотношений в одномерной задаче.