

УДК 538 56.621 391

## ФЛУКТУАЦИОННО-ДИССИПАЦИОННЫЕ МОДЕЛИ НЕЛИНЕЙНОГО РЕЗИСТОРА И ФОРМУЛЫ ГУПТА

*Р. Л. Стратонович*

При использовании диодной модели нелинейного резистора рассмотрены случаи, когда формулы Гупта справедливы и когда нет. Найдены спектральные плотности напряжения и тока для схемы, содержащей кроме нелинейного резистора конденсатор и линейный резистор. Показано, что формулы Гупта пригодны лишь при специальных значениях параметров и никогда не справедливы для одной и той же схемы, вопреки мнению Гупта.

В последнее время нашли довольно широкое применение формулы Гупта [1, 2], которые иногда удовлетворительно описывают поведение неравновесных спектральных плотностей напряжения и тока в случае  $p-n$ -переходов в диодах Шоттки (см., например, [2, 3]).

Если спектральную плотность определять формулой

$$S_I(\omega) = \int \exp(i\omega t_{12}) \langle I(t_1), I(t_2) \rangle dt_{12}, \quad t_{12} = t_1 - t_2,$$

то указанные формулы Гупта имеют вид

$$S_I = 2kT [dI/dV - I(d^2I/dV^2)(2dI/dV)^{-1}]; \quad (1)$$

$$S_V = 2kT [dV/dI + (1/2)I d^2V/dI^2], \quad (2)$$

где  $V, I$  — напряжение на резисторе и ток через него. Зависимость между  $V$  и  $I$  в правых частях соответствует (нефлуктуационной) вольт-амперной характеристике.

Нужно отметить, что эти формулы были получены в [1, 2] путем необоснованного распространения результата линейной теории на нелинейный случай и их нельзя считать полностью доказанными. В этих работах не указано также адекватных условий применимости этих формул. Поэтому (1), (2) лучше называть формулами Гупта, а не теоремой Гупта.

Коснемся вывода формулы (2) в [1]. Там рассмотрены два сопряженных термодинамических параметра  $\alpha$  и  $\beta$ , причем  $\alpha$  — внутренний параметр, а  $\beta$  — внешний (в равновесии  $\beta=0$ ). Внешний параметр или термодинамическая сила полагается равной сумме  $\beta(t) = \beta_0 + \Delta\beta(t)$ , где  $\beta_0$  — постоянное смещение, задающее неравновесное состояние, а  $\Delta\beta$  — малая добавка, возникающая в некоторый момент времени, например,

$$\Delta\beta(t) = \begin{cases} c \sin \nu t & \text{при } t \geq t_0 \\ 0 & \text{при } t < t_0 \end{cases}.$$

Среднюю мощность диссипации —  $\langle \dot{F} \rangle = \langle \dot{\alpha}(t) \beta(t) \rangle$  автору статьи [1] удалось связать с производной по времени от корреляционной функции  $\langle \alpha(t), \alpha(t+\tau) \rangle$  благодаря использованию формулы, которая связывает линейный отклик  $\delta \langle \alpha(t) \rangle / \delta \Delta\beta(t')$  с  $\langle \alpha(t), \alpha(t') \rangle$ . Именно, для вывода формулы (29) из [1] Гупта использует нелинейное обобщение формулы

(23) из [1], которая справедлива в линейном случае (т. е. в приближении, линейном по отклонению от равновесия). Какого-либо обоснования для обобщения последней формулы на неравновесную область автор [1] не приводит. Между тем известно, что не существует общей формулы, по которой линейный отклик, взятый в неравновесной точке, выражался бы через корреляционную функцию внутреннего параметра. Поэтому неудивительно, что формулы Гупта справедливы не всегда.

В [2] формула (1) была выведена из (2) следующим образом. В случае малости флуктуационного тока  $I_\phi = I - \langle I \rangle$  имеем линейную связь

$$I_\phi = (dI/dV)(V - \langle V \rangle) \equiv (dI/dV)V_\phi \quad (3)$$

между флуктуационными составляющими напряжения и тока. Поэтому

$$S_I = (dI/dV)^2 S_V. \quad (4)$$

Если сюда подставить (2), то получим (1). Из данного вывода видно, что обе формулы (1) и (2) предполагаются относящимися к одной и той же схеме.

Нужно отметить, что этот вывод не выдерживает критики. Дело в том, что зависимость  $I(V)$  в правых частях (1), (3) есть зависимость среднего тока от напряжения, а не полного тока, включающего флуктуационную часть. При рассмотрении флуктуационного тока необходимо учитывать случайные э. д. с., которые не учтены в (3). В дальнейшем для частной модели будет показано, что если (1), (2) иногда и справедливы, то относятся к различным схемам. Чтобы избежать возможности ошибок типа допущенной при выводе (4), лучше в левых частях (1), (2) писать  $S_J$  и  $S_U$ , где  $J$  и  $U$  — полные ток и напряжение, включая флуктуационные части. В правые же части входят  $I = \langle J \rangle$ ,  $V = \langle U \rangle$ .

Формулу (2) можно записать также в виде

$$S_U = 2kTR_{\text{дис}}, \quad (5)$$

где  $R_{\text{дис}} = (1/2)d^2(IV)/dI^2$  — диссипационное сопротивление. В рамках квадратичной (трехиндексной) теории формула (5) была получена в 1970 г. в [4] для безынерционного (марковского) случая, к которому относятся соотношения (1) и (2). Иначе говоря, была выведена формула

$$S_U = 2kT \frac{dV}{dI}(0) + 3kT \frac{d^2V}{dI^2}(0)I. \quad (6)$$

В немарковском случае аналогичный результат можно получить при помощи квадратичной ФДТ [5]. В [4], кроме того, была найдена формула

$$S_J = 2kTI/V, \quad (7)$$

справедливая в рамках квадратичного приближения, т. е.

$$S_J = 2kT \left[ \frac{dI}{dV}(0) + \frac{V}{2} \frac{d^2I}{dV^2}(0) \right]. \quad (8)$$

При этом (6) и (8) относились к различным схемам. Существенно, что (1) и (7) в квадратичном приближении дают одну и ту же формулу (8). Видим, что формулы Гупта можно трактовать как малообоснованную попытку выйти за рамки известных (но, по-видимому, не известных для Гупта) результатов квадратичного приближения.

Для нас представляет интерес вопрос, справедливы ли формулы Гупта во всех порядках нелинейности хотя бы для каких-либо частных случаев. Чтобы ответить на этот вопрос, следует обратиться к нелинейным флуктуационно-диссипационным моделям нелинейного резистора. Простейшей из них является пуассоновская модель, рассмотренная в [6],

а также один частный случай пуассоновской модели — диодная модель [7]. Для пуассоновской модели справедлива формула

$$S_J = eI(V) \operatorname{cth}[eV/(2kT)], \quad (9)$$

полученная в [8-10]. Она является гораздо более общей, чем формула Гупта (1), которая для пуассоновской модели справедлива далеко не всегда. Возьмем, например, туннельный диод, когда вольт-амперная характеристика имеет вид

$$I(V) = Ae^{-aV} + B(e^{bV} - 1) \quad (10)$$

( $A, B, a, b$  — постоянные). Для данного случая можно найти  $S_J$ , подставив (10) в (9), и убедиться, что (1) не выполняется. Те редкие случаи, когда (1), (2) справедливы для диодной модели, будут обсуждаться ниже.

## 1. ПУАССОНОВСКАЯ МОДЕЛЬ. ДИОДНАЯ МОДЕЛЬ

В пуассоновской модели нелинейного резистора предполагается, что трудно проходимым для носителей тока является сравнительно узкий участок нелинейного резистора (контакт,  $p-n$ -переход и т. п.) и что через него в обоих направлениях независимым образом проходят носители тока, так что эти проходы носителей образуют пуассоновский случайный процесс. Если за один акт перехода переносятся заряды  $\pm e$ , где  $e > 0$  — заряд электрона, то

$$S_J = e[I_+(V) + I_-(V)], \quad (11)$$

причем

$$I(V) = I_+(V) - I_-(V), \quad (12)$$

где  $I_+(V)$  — ток, текущий в одном направлении,  $I_-(V)$  — в другом.

В случае диодов Шоттки и  $p-n$ -переходов часто наблюдалось (например, [3]) уменьшение шума, связанное с тем, что при прохождении электрона через потенциальный барьер возникают побочные процессы, в результате которых за один акт перехода оказывается пронесенным меньший заряд, а именно заряд  $\pm \Gamma^2 e \equiv \pm \gamma e$ . Чтобы это учесть, следует в (11) поменять  $e$  на  $\gamma e$ :

$$S_J = \gamma e[I_+(V) + I_-(V)]. \quad (13)$$

В диодной модели, которая была предложена довольно давно [7] и была использована для объяснения парадокса, связанного с детектированием тепловых флуктуаций, детально рассматривается движение одиночного электрона в поле потенциального холма между электродами.

При этом напряжение  $V$  (см. рис. 1) облегчает или затрудняет проход электрона через резистор. Диодная модель позволяет найти явный вид функций  $I_{\pm}(V)$ . В случае острой вершины потенциального холма в указанной работе получены такие функции:

$$I_+(V) = I_0 \exp(\beta \gamma e V p), \quad I_-(V) = I_0 \exp(-\beta \gamma e V q) \quad (14)$$

(произведена замена  $e \rightarrow \gamma e$ ,  $\beta = 1/kT$ ). Здесь  $p+q=1$ ,  $p-q$  является показателем несимметричности нелинейного резистора. Именно, дробь  $p/q$  равна отношению расстояния от точки максимума потенциального горба до одного электрода к расстоянию от этой точки до другого электрода. При зависимостях (14), так же как и при других зависимостях, полученных по методу [7], выполнены все обязательные флуктуационно-диссипационные соотношения марковской неравновесной термодина-

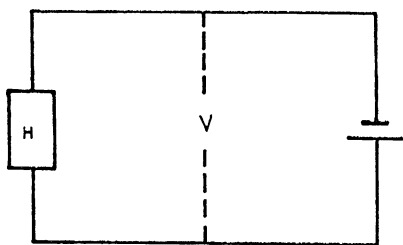


Рис. 1.

мики, в частности, линейное соотношение, эквивалентное формуле Найквиста (для безынерционных систем), и квадратичные соотношения [4].

Если подставить (14) в (12) и (13), получим

$$I(V) = I_0[\exp(\beta\gamma eVp) - \exp(-\beta\gamma eVq)], \quad (15)$$

$$S_J = \gamma e I_0[\exp(\beta\gamma eVp) + \exp(-\beta\gamma eVq)],$$

где  $I_0$  — некоторая постоянная.

Прямой подстановкой (15) в (1) легко проверить справедливость данной формулы Гупта. Выкладки при использовании равенства  $p+q=1$  показывают, что после указанной подстановки получаем  $p(1-p)=0$ . Это говорит о том, что формула Гупта (1) справедлива только в случае крайней асимметрии нелинейного резистора, когда  $p=0, q=1$  или  $p=1, q=0$ .

Исключением напряжения  $V$  из равенств (15) можно получить прямую зависимость между  $S_J$  и  $I$ . Поделив уравнение (15) на  $\gamma e I_0$ , возьмем полусумму и полуразность этих уравнений. Это дает

$$\exp(\beta\gamma eVp) = [S_J/(\gamma e) + I]/(2I_0); \quad (16)$$

$$\exp(-\beta\gamma eVq) = [S_J/(\gamma e) - I]/(2I_0). \quad (17)$$

Возводя обе части уравнения (16) в степень  $q$ , а (17) — в степень  $p$ , получим в правой части взаимно обратные величины. Следовательно, справедливо уравнение

$$[S_J/(\gamma e) + I]^q [S_J/(\gamma e) - I]^p = 2I_0. \quad (18)$$

В частности, если положить  $p=1, q=0$ , будем иметь

$$S_J = \gamma e (I + 2I_0), \quad (19)$$

а если положить  $p=q=1/2$ , то

$$S_J = \gamma e (I^2 + 4I_0^2)^{1/2}. \quad (20)$$

При значениях  $1/2 < p < 1$  формула (18) дает интерполяционную зависимость по отношению к (19), (20). Зависимость (19) хорошо известна как следствие из формулы Гупта (1) и формулы  $I = I_0[\exp(\beta\gamma eV) - 1]$ . Нетрудно убедиться, что при больших  $|I| \gg I_0$  (и при больших  $V$ )  $S_J$  приближенно определяется формулой Шоттки  $S_J = \gamma e |I|$ . При помощи (18) можно также найти уточнения к последней формуле, справедливые в области  $|I| \gg I_0$ . Получим ближайшее уточнение, полагая для определенности  $p \geq 1/2$ , когда  $S_J \approx \gamma e I$ . Из (18) находим

$$S_J/(\gamma e) = I + (2I_0)^{1/p} [S_J/(\gamma e) + I]^{-q/p}.$$

Поменяв в правой части  $S_J$  на  $\gamma e I$ , будем иметь

$$S_J = \gamma e I + 2\gamma e I_0 (I_0/I)^{q/p}, \quad p \geq 1/2.$$

Это и есть уточненная формула.

## 2. СПЕКТРАЛЬНАЯ ПЛОТНОСТЬ НАПРЯЖЕНИЯ. ВТОРАЯ ФОРМУЛА ГУПТА

Как видно из предыдущего, формула Гупта (1) в определенных случаях является справедливой. Рассчитаем флуктуации в схеме, изображенной на рис. 2, чтобы проверить, справедлива ли для нее формула Гупта (2).

Обозначим через  $\mathcal{E}$  э. д. с. источника напряжения с пренебрежимо малым внутренним сопротивлением. Ток  $I_1$  через  $R_1$  равен

$$J_1 = (\mathcal{E} - U + \xi) / R_1, \quad (21)$$

где  $\xi(t)$  — флуктуационная э. д. с., возникающая в  $R_1$  и имеющая спектральную плотность, определяемую по формуле Найквиста  $S_\xi = 2kTR_1$ . Последнее равенство означает, что

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\Delta t)^{-1} \langle \left[ \int_t^{t+\Delta t} \xi(t') dt' \right]^2 \rangle = 2kTR_1$$

и, следовательно,

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\Delta t)^{-1} \langle (\Delta Q_1)^2 \rangle = 2kTR_1, \quad (22)$$

где  $\Delta Q_1 = \int_t^{t+\Delta t} J_1(t') dt'$ .

Пусть  $Q_0$  — заряд на емкости  $C$ . Легко видеть, что его производная равна разности токов:  $\dot{Q}_0 = J_1 - J$ . Поэтому  $\Delta Q_0 = \Delta Q_1 - \Delta Q$ . Изменение заряда  $Q(t)$  описывается уравнением

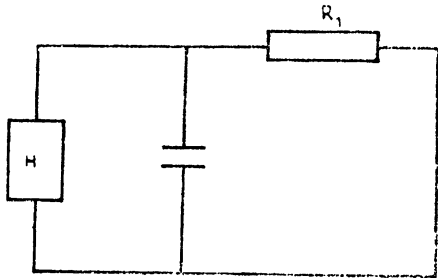


Рис 2

$$\begin{aligned} \dot{w}(Q) = & (\gamma e)^{-1} \{ I_+(U(Q - \gamma e)) \times \\ & \times w(Q - \gamma e) + I_-(U(Q + \gamma e)) \times \\ & \times w(Q + \gamma e) - \\ & - [I_+(U(Q)) + I_-(U(Q))] w(Q) \}, \end{aligned}$$

а заряд  $Q_1(t) = \int_0^t J_1(t') dt'$  представляет собой диффузионный процесс,

характеризуемый коэффициентом диффузии (22) и сносом

$$\langle \Delta Q_1 / \Delta t \rangle = \langle J_1 \rangle = (\mathcal{E} - U) / R_1,$$

получаемым из (21). Следовательно,  $Q_1(t)$  описывается уравнением Фоккера—Планка

$$\dot{w}(Q_1) = R_1^{-1} \left\{ - \frac{\partial}{\partial Q_1} [(\mathcal{E} - U(Q_1)) w(Q_1)] + kT \frac{\partial^2 w}{\partial Q_1^2} \right\}.$$

Для  $Q_0 = Q_1 - Q$  справедливо комбинированное уравнение

$$\begin{aligned} \dot{w}(Q_0) = & (\gamma e)^{-1} \{ I_+(U(Q_0 + \gamma e)) w(Q_0 + \gamma e) + I_-(U(Q_0 - \gamma e)) \times \\ & \times w(Q_0 - \gamma e) - [I_+(U(Q_0)) + I_-(U(Q_0))] w(Q_0) \} + \\ & + R_1^{-1} \frac{\partial}{\partial Q_0} \left[ -(\mathcal{E} - U(Q_0)) w(Q_0) + kT \frac{\partial w}{\partial Q_0} \right]. \end{aligned} \quad (23)$$

Напряжение  $U$  на нелинейном резисторе просто связано с  $Q_0$ :  $U = Q_0 / C$ , поэтому из (23) получаем управляющее уравнение для  $w(U)$ :

$$\begin{aligned} \dot{w}(U) = & (\gamma e)^{-1} \{ I_+(U + \gamma e C^{-1}) w(U + \gamma e C^{-1}) + I_-(U - \gamma e C^{-1}) \times \\ & \times w(U - \gamma e C^{-1}) - [I_+(U) + I_-(U)] w(U) \} + \\ & + (R_1 C_1)^{-1} \frac{\partial}{\partial U} \left[ (U - \mathcal{E}) w(U) + kTC^{-1} \frac{\partial w}{\partial U} \right]. \end{aligned}$$

Преобразуя выражение в фигурных скобках к форме уравнения Крамера — Мойэла при помощи разложения Тейлора по  $\pm \gamma e C^{-1}$ , будем иметь

$$\dot{w}(U) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} (-1)^n (\gamma e)^{n-1} C^{-n} \frac{\partial^n}{\partial U^n} [f_n(U) w] +$$

$$+ (R_1 C)^{-1} \frac{\partial}{\partial U} \left[ (U - \mathcal{E}) w + k T C^{-1} \frac{\partial w}{\partial U} \right], \quad (24)$$

где обозначено

$$f_n(U) = I_-(U) + (-1)^n I_+(U) \equiv (-1)^n S^{(n)} / (\gamma e)^{n-1}. \quad (25)$$

Решать уравнение (24) помогает то обстоятельство, что  $e$  и  $k$  являются весьма малыми с макроскопической точки зрения. В стационарном режиме (постоянное  $\mathcal{E}$ ) происходят малые колебания напряжения около некоторого стабильного значения  $U_0 = V$ . Его можно получить, пренебрегая флуктуациями. При этом  $Q$  и  $V$  поддерживаются постоянными, а ток  $I$  через нелинейный резистор равен току  $I_1$ . Отсюда, учитывая (12) и равенство  $I_1 = (\mathcal{E} - V)/R_1$ , находим  $f_1(V) = (V - \mathcal{E})/R_1$  или

$$I_+(V) - I_-(V) = (\mathcal{E} - V)/R_1. \quad (26)$$

Равенством

$$U - V = \mu y \quad (27)$$

введем теперь переменную  $y$ , которая в измененном масштабе указывает величину флуктуационного отклонения от стабильного значения. Масштабный параметр  $\mu$ , заведомо малый, будет определен ниже. Подставляя (27) в (24) и учитывая, что

$$\partial/\partial U = (\partial y/\partial U) \partial/\partial y = \mu^{-1} \partial/\partial y, \quad w(U) dU = w(y) dy,$$

получим

$$\dot{w}(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} (-1)^n (\gamma e)^{n-1} \mu^{-n} C^{-n} \frac{\partial^n}{\partial y^n} [f_n(V + \mu y) w(y)] +$$

$$+ (R_1 C \mu)^{-1} \frac{\partial}{\partial y} \left[ (V - U + \mu y) w + k T \mu^{-1} C^{-1} \frac{\partial w}{\partial y} \right].$$

Входящие сюда функции  $f_n(V + \mu y)$  можно разложить в ряд Тейлора по  $\mu y$ . При этом член с  $f_1(V)$ , получающийся из  $f_1(V + \mu y)$ , выпадает в силу (26), и мы будем иметь

$$\dot{w}(y) = -C^{-1} \frac{\partial}{\partial y} [y f_1^{(1)} + \frac{1}{2} \mu y^2 f_1^{(2)} + \dots] w + \frac{1}{2} \gamma e \mu^{-2} C^{-2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} [(f_2^{(0)} +$$

$$+ \mu y f_2^{(1)} + \dots) w] - \frac{1}{6} (\gamma e)^2 \mu^{-3} C^{-3} \frac{\partial^3}{\partial y^3} [(f_3^{(0)} + \dots) w] + \dots + \quad (28)$$

$$+ (R_1 C)^{-1} \frac{\partial}{\partial y} \left[ y w(y) + k T \mu^{-2} C^{-1} \frac{\partial w}{\partial y} \right],$$

где  $f_n^{(m)} = (\partial^m f_n / \partial U^m)_{U=V} = \partial^m f_n(V) / dV^m$ . Удобно положить  $\mu = (\gamma e)^{1/2}$  для того, чтобы наглядно было видно, что первый и второй члены в правой части равенства (28) имеют одинаковый порядок величины. При этом третий член будет иметь порядок  $\mu$  и его можно будет отбросить, как и другие члены с  $\mu, \mu^2, \dots$ . После этого получим уравнение Фоккера—Планка

$$\dot{w}(y) = a \partial(yw) / \partial y + (1/2) b \partial^2 w / \partial y^2, \quad (29)$$

где

$$a = C^{-1} (R_1^{-1} - f_1^{(1)}), \quad b = C^{-2} [f_2^{(0)} + 2k T R_1^{-1} (\gamma e)^{-1}],$$

или в силу (25), (12)

$$a = C^{-1}(dl/dV + R_1^{-1}), \quad b = C^{-2}(\gamma e)^{-1}(\tilde{S}_J + 2kTR_1^{-1}). \quad (30)$$

Через  $\tilde{S}_J \equiv \tilde{S}_J^{(2)}$  обозначена спектральная плотность (11). Уравнение (29) хорошо известно и легко решается. Ему соответствует стохастическое уравнение

$$\dot{y} = -ay + \zeta(t), \quad (31)$$

где  $\zeta(t)$  — белый шум с корреляционной функцией

$$\langle \zeta(t_1)\zeta(t_2) \rangle = b\delta(t_{12}). \quad (32)$$

Переходя в (31) к спектрам, получаем  $y(\omega) = \zeta(\omega)/(i\omega + a)$ , откуда следует

$$S_y(\omega) = S_\zeta(\omega)/(\omega^2 + a^2) = b/(\omega^2 + a^2)$$

и поэтому

$$S_U(\omega) = \gamma e S_y(\omega) = \gamma e b/(\omega^2 + a^2).$$

Подставив выражения для  $a$  и  $b$  из (30), получим

$$S_U(\omega) = (\tilde{S}_J + 2kTR_1^{-1})/[\omega^2 C^2 + (dl/dV + R_1^{-1})^2]. \quad (33)$$

Видно, что вместо (4) имеет место гораздо более сложная формула. Чтобы ее упростить, совершим предельный переход  $R_1 \rightarrow \infty$  (при этом, однако, нужно устремить  $\mathcal{E} \rightarrow \infty$ , чтобы стабильный ток  $I_1$  не менялся). Тогда из (33) будем иметь

$$S_U(\omega) = \tilde{S}_J (dV/dI)^2 [1 + \omega^2 C^2 (dV/dI)^2]. \quad (34)$$

Если здесь устремить  $C$  к нулю, то получим формулу типа (4).

Итак, мы получили, что для справедливости формулы Гупта (2) необходимо выполнение двух условий: во-первых, должна быть справедлива формула (1) для спектральной плотности  $\tilde{S}_J$ , относящейся к схеме, изображенной на рис. 1, а во-вторых, в цепь должно быть включено весьма большое дополнительное сопротивление и подано весьма большое напряжение.

Заметим, что при наличии емкости  $C$  флуктуации напряжения, как видно из (34), не являются дельта-коррелированными и вместо (2) в случае справедливости (1) для  $\tilde{S}_J$  имеем

$$S_U(0) = 2kT(dV/dI + (1/2)I d^2V/dI^2), \quad S_U(\omega) \neq S_U(0) \text{ при } \omega \neq 0.$$

Спектральные плотности  $S_U^{(n)}$  более высокой кратности получить при наличии  $R_1$  обоснованным способом гораздо труднее, чем найти  $S_U^{(n)}$  в случае простой схемы 1.

### 3. СПЕКТРАЛЬНАЯ ПЛОТНОСТЬ ТОКА В СЛУЧАЕ СХЕМЫ С $R_1$ И $C$

Согласно (31), (27), (32), (30) флуктуационное напряжение  $u = U - \langle U \rangle$  удовлетворяет уравнению

$$\dot{u} + au = (\gamma e)^{1/2} \zeta(t), \quad (35)$$

где  $\zeta(t)$  — случайная функция с нулевым средним значением и спектральной плотностью

$$S_\zeta = b = C^{-2}(\gamma e)^{-1}(\tilde{S}_J + 2kTR_1^{-1}). \quad (36)$$

Последнее равенство объясняется тем, что имеется два независимых источника шумов: нелинейный резистор (член с  $\tilde{S}_J$ ) и линейный ре-

зистор (член с  $kTR_1^{-1}$ ). Вследствие этого удобно представить  $\xi$  в виде суммы двух независимых шумов:

$$(\gamma e)^{1/2} \xi = C^{-1} (R_1^{-1} \xi + \eta). \quad (37)$$

В силу (36)  $\xi$  и  $\eta$  должны иметь спектральные плотности

$$S_\xi = 2kTR_1, \quad S_\eta = \tilde{S}_J. \quad (38)$$

Учитывая (37) и переходя к заряду  $q_0 \equiv Q_0 - \langle Q_0 \rangle = Cu$ , из (35) имеем

$$\dot{q}_0 + aq_0 = R_1^{-1} \xi + \eta$$

или, если рассматривать спектры,

$$q_0 = (i\omega + a)^{-1} (R_1^{-1} \xi + \eta). \quad (39)$$

Поскольку  $Q_0 = Q_1 - Q$ , для токов и их флуктуационных частей  $i_0 = \dot{Q}_0$ ,  $i_1 = J_1 - \langle J_1 \rangle$ ,  $J_\Phi = J - \langle J \rangle$  справедливо аналогичное равенство

$$i_0 = i_1 - J_\Phi. \quad (40)$$

Поэтому  $q_0 = (i_1 - J_\Phi)/i\omega$ , и из (39) будем иметь

$$i_1 - J_\Phi = i\omega (i\omega + a)^{-1} (R_1^{-1} \xi + \eta). \quad (41)$$

Воспользовавшись соотношением

$$i_1 = (\xi - u)/R_1 = \xi/R_1 - (i\omega R_1 C)^{-1} (i_1 - J_\Phi), \quad (42)$$

вытекающим из (21), равенства  $u = i_0/(i\omega C)$  и (40), находим

$$(i\omega R_1 C + 1)i_1 - J_\Phi = i\omega C \xi. \quad (43)$$

Решая систему уравнений (41) и (43), определяющую  $J_\Phi$  и  $i_1$ , получаем

$$J_\Phi = (i\omega R_1 C + m)^{-1} [(m-1)\xi/R_1 - (i\omega R_1 C + 1)\eta],$$

где  $m = R_1 C a = R_1 dI/dV + 1$  (см. (30)). Используя последнее равенство, при учете (38) и статистической независимости между  $\xi$  и  $\eta$  легко найти соответствующую спектральную плотность

$$S_J(\omega) = (\omega^2 R_1^2 C^2 + m^2)^{-1} [(\omega^2 R_1^2 C^2 + 1) \tilde{S}_J + 2kT(m-1)^2 R_1^{-1}].$$

Исключая из схемы емкость, т. е. полагая  $C=0$ , отсюда будем иметь

$$S_J = (R_1 dI/dV + 1)^{-2} [\tilde{S}_J + 2kTR(dI/dV)^2]. \quad (44)$$

Если в (44) устремить  $R \rightarrow 0$  (при этом схема рис. 2 перейдет в схему рис. 1), то получим  $S_J = \tilde{S}_J$ , т. е. формулу (1) (в случае  $p=1$ ), что вполне естественно. Если же в (44) устремить  $R_1 \rightarrow \infty$ , то получим  $S_J = 0$ . Итак, в случае  $R_1 = 0$  имеем  $S_U = 0$ ,  $S_J = \tilde{S}_J$ , а в случае  $R_1 = \infty$  имеем  $S_U = (dV/dI)^2 \tilde{S}_J$ ,  $S_J = 0$ . В промежуточном случае имеем спектральную плотность (44) и получаемую из (33) плотность

$$S_U(\omega) = (R_1 dI/dV + 1)^{-2} (R_1^2 \tilde{S}_J + 2kTR_1).$$

Видим, что ни в одном из трех описанных случаев спектральные плотности, относящиеся к одной и той же схеме, не связаны между собой равенством (4) (вопреки формуле (3), в которую входят токи и напряжения, возникающие в одной схеме). Равенством типа (4) связаны



лишь члены, содержащие  $kT$  и обаянные флукуационной э. д. с., воз-  
никающей в  $R_i$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Gupta M. S. — Phys. Rev. A, 1978, 28, p. 2725.
2. Гупта М. С — ТИИЭР, 1982, 70, № 8, с. 5
3. Паленский В. П., Матукас И. П. Тезисы докладов IV Всесоюзной кон-  
ференции по флукуационным явлениям в физических системах — Пушкино, 1985.
4. Стратонович Р. Л. — Изв. вузов — Радиофизика, 1970, 13, № 10, с. 1512.
5. Ефремов Г. Ф. — ЖЭТФ, 1968, 55, с. 2322.
6. Бочков Г. Н., Кузовлев Ю. Е. — ЖЭТФ, 1979, 76, с. 1071.
7. Стратонович Р. Л. — Вестник МГУ. Сер. физика, астрономия, 1960, № 4,  
с. 99.
8. Пасел Р. А. — Труды института радиоинженеров, 1961, 49, № 6, с. 1262
9. Ван дер Зил А. Шумы при измерениях — М. Мир, 1979, с. 57
10. Бочков Г. Н. Флукуации в неравновесных радиофизических системах — Горь-  
кий Гос. ун-т, 1981.

Московский государственный  
университет

Поступила в редакцию  
24 марта 1986 г.

#### FLUCTUATION-DISSIPATION MODELS OF NONLINEAR RESISTOR AND GUPTA'S FORMULAS

*R. L. Stratonovich*

The cases of validity and non-validity of the Gupta's formulas are considered by using the diode model of nonlinear resistor. The fluctuational current and voltage spectral densities are found for the circuit containing a nonlinear resistor, linear resistor and capacitor.

It is shown that the Gupta's formulas hold only for particular values of parameters and that both of them are never valid for the same circuit simultaneously, which is in contradiction with the Gupta's opinion.

#### ВНИМАНИЮ АВТОРОВ!

Всесоюзное агентство по авторским правам (ВААП) сообщает, что в 1987 г. агентство производит выплату авторского гонорара за перепечатку за рубежом статей, опубликованных в журнале «Радиофизика» в 1983 и 1984 гг. Гонорар, поступивший за право перепечатки, выплачивается по желанию авторов в рублях или чеках Внешпосылторга.

Для получения гонорара автору необходимо оформить справку-заявление и направить ее на расчет по адресу:

103670 г. Москва, ул. Б. Бронная, 6-а, Валютное управление ВААП.

Справки-заявления на выплату гонорара по журналу 1983 г. издания принимаются до 1 декабря 1987 г., а по журналу 1984 г. — до 1 июля 1988 г. Выплата гонорара по журналу 1984 г. издания будет производиться начиная с июля 1987 г.

По истечении установленных сроков выплаты гонорара неустраиваемые суммы списываются в доход госбюджета и автор теряет право на получение гонорара.