

УДК 621.385 6+617 958

## ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ К РАСЧЕТУ ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПЕРИОДИЧЕСКИ ГОФРИРОВАННЫХ ВОЛНОВОДОВ

*В. Е. Белов, Л. В. Родыгин, С. Е. Фильченков, А. Д. Юнаковский*

Описывается метод расчета электродинамических характеристик периодически гофрированных волноводных систем, основанный на представлении поля как решения векторного уравнения Гельмгольца в виде потенциала простого слоя, преобразованного с использованием условий Флоке. Получены системы смешанных интегральных уравнений на весовую вектор-функцию потенциала простого слоя для волноводов с азимутально-симметричной и винтовой гофрировками. Проведена численная реализация метода Фурье для поиска дисперсионного соотношения азимутально-симметричных волн круглого гофрированного волновода.

Плавно гофрированные полые волноводы обладают высокой электропрочностью и позволяют обеспечить эффективное взаимодействие электронного пучка с одной из мод волновода. Благодаря этим качествам они широко применяются в мощных приборах релятивистской высокочастотной электроники [1]. Для расчета электродинамических характеристик таких волноводов используются различные методы. Методы, основанные на разложении по малому параметру [3, 4], пригодны лишь при малой глубине гофрировки. Среди методов, пригодных для больших глубин [2, 5-7, 16], ни один не занимает доминирующего положения, и многие из них сохраняют перспективы дальнейшего развития. В частности, метод интегральных уравнений [17] в задаче дифракции на плоской периодической решетке показал сходимость при весьма глубокой гофрировке.

В настоящей работе развивается вариант метода интегральных уравнений, применимый для расчетов широкого класса периодически гофрированных волноводов.

**Постановка задачи.** Рассмотрим круглый периодический гофрированный волновод, граничная поверхность  $S$  которого в цилиндрических координатах описывается уравнением

$$r = |R(z, \varphi), \quad -\infty < z < \infty, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad (1)$$

где функция  $R(z, \varphi)$  непрерывная, непрерывно дифференцируемая по обеим координатам и периодическая по  $z$ :

$$R(z + L, \varphi) = R(z, \varphi).$$

Здесь  $L$  — период гофрировки.

Электромагнитное поле внутри волновода может быть описано с помощью магнитного вектора Герца  $\Pi(r, \varphi, z)$ , удовлетворяющего уравнению Гельмгольца,

$$\Delta \Pi + k^2 \Pi = 0, \quad (2)$$

где  $k = \omega/c$  — волновое число,  $\omega$  — частота,  $c$  — скорость света в вакууме. Кроме того, магнитный вектор Герца удовлетворяет граничным условиям, соответствующим равенству нулю касательной составляющей напряженности электрического поля на поверхности волновода,

$$E_z|_S = 0, \quad (3)$$

и, в силу периодичности границы в направлении оси  $z$ , соотношению Флоке

$$\Pi(r, \varphi, z + L) = \exp(ih_0 L) \Pi(r, \varphi, z). \quad (4)$$

Так как в данном случае электромагнитное поле полностью описывается азимутальной и радиальной компонентами вектора Герца, то задача (2)–(4) примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \Delta \Pi_r + k^2 \Pi_r - \frac{1}{r^2} \Pi_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \Pi_\varphi}{\partial \varphi} &= 0, \\ \Delta \Pi_\varphi + k^2 \Pi_\varphi - \frac{1}{r^2} \Pi_\varphi + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \Pi_r}{\partial \varphi} &= 0, \\ -\frac{\partial \Pi_r}{\partial z} - \frac{R'_\varphi}{r} \frac{\partial \Pi_\varphi}{\partial z} \Big|_{r=R(z, \varphi)} &= 0, \\ -\frac{1}{r} \frac{\partial \Pi_r}{\partial \varphi} + \left[ \frac{1}{r} + \frac{\partial}{\partial r} - R'_z \frac{\partial}{\partial z} \right] \Pi_\varphi \Big|_{r=R(z, \varphi)} &= 0, \\ \Pi_r(r, \varphi, z + L) &= \exp(ih_0 L) \Pi_r(r, \varphi, z), \\ \Pi_\varphi(r, \varphi, z + L) &= \exp(ih_0 L) \Pi_\varphi(r, \varphi, z). \end{aligned} \quad (5)$$

Решение задачи (2)–(4) ищем в виде векторного потенциала простого слоя уравнения Гельмгольца [14]

$$\Pi(r, \varphi, z) = \iint_S \mu^0(z_0, \varphi_0) \exp(ikR^0) / R^0 ds_0 \quad (6)$$

или покомпонентно (для задачи (5)):

$$\Pi_r(r, \varphi, z) = \iint_S [\mu_r^0 \cos(\varphi - \varphi_0) + \mu_\varphi^0 \sin(\varphi - \varphi_0)] \exp(ikR^0) / R^0 ds_0, \quad (7)$$

$$\Pi_\varphi(r, \varphi, z) = \iint_S [-\mu_r^0 \sin(\varphi - \varphi_0) + \mu_\varphi^0 \cos(\varphi - \varphi_0)] \exp(ikR^0) / R^0 ds_0.$$

Здесь  $\mu_r^0(z_0, \varphi_0)$  и  $\mu_\varphi^0(z_0, \varphi_0)$  — неизвестные функции, определенные на поверхности волновода, а

$$R^0 \equiv \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\varphi - \varphi_0) + (z - z_0)^2}$$

есть расстояние между точкой наблюдения  $(r, \varphi, z)$  и текущей точкой интегрирования  $(r_0, \varphi_0, z_0)$  на поверхности.

Легко показать, что неизвестные функции  $\mu_r^0(z_0, \varphi_0)$  и  $\mu_\varphi^0(z_0, \varphi_0)$  также удовлетворяют соотношению Флоке

$$\mu^0(z_0 + L, \varphi_0) = \exp(ih_0 L) \mu^0(z_0, \varphi_0). \quad (8)$$

В выражении (7) перейдем от поверхностного интеграла к двойному. При этом элемент поверхности записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} ds_0 &= A(z_0, \varphi_0) d\varphi_0 dz_0 \equiv \{R^2(z_0, \varphi_0) [1 + R_z'^2(z_0, \varphi_0)] + \\ &+ R_\varphi'^2(z_0, \varphi_0)\}^{1/2} d\varphi_0 dz_0. \end{aligned}$$

Обозначив

$$\mu(z_0, \varphi_0) = A(z_0, \varphi_0) \mu^0(z_0, \varphi_0), \quad (9)$$

запишем выражение (6) в виде

$$\Pi(r, \varphi, z) = \int_{-\infty}^{\infty} dz_0 \int_0^{2\pi} d\varphi_0 \mu(z_0, \varphi_0) \exp(ikR^0)/R^0. \quad (10)$$

Известно ([10] (2.14.2.4)), что

$$\exp(ikR^0)/R^0 = (i/2) \int_{-\infty}^{\infty} H_0^{(1)}(\rho g) \exp[ih(z - z_0)] dh, \quad (11)$$

где  $H_0^{(1)}(x)$  — функция Ганкеля первого рода,

$$\rho = \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\varphi - \varphi_0)}, \quad g^2 = k^2 - h^2.$$

Тогда, используя (8) и (11), после несложных преобразований выражение для функции  $\Pi(r, \varphi, z)$  можно записать в следующем виде:

$$\Pi(r, \varphi, z) = (\pi i/L) \int_0^L dz_0 \int_0^{2\pi} d\varphi_0 \mu(z_0, \varphi_0) \sum_{m=-\infty}^{\infty} H_0^{(1)}(g_m \rho) \exp[ih_m(z - z_0)], \quad (12)$$

где  $h_m = h_0 + 2\pi m/L$ ,  $g_m^2 = k^2 - h_m^2$ .

Наконец, используя представление функции Ганкеля ([8], 8.551.2)),

$$H_0^{(1)}(g_m \rho) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left[ J_l(g_m r) H_l^{(1)}(g_m r_0), r_0 > r \right] \times \\ \times \exp[i l (\varphi - \varphi_0)] \equiv \sum_l K_{m,l}^0 \exp[i l (\varphi - \varphi_0)], \quad (13)$$

компоненты магнитного вектора Герца можно записать в виде

$$\Pi_r(r, \varphi, z) = (\pi i/L) \int_0^L dz_0 \int_0^{2\pi} d\varphi_0 [\mu_r \cos(\varphi - \varphi_0) + \mu_\varphi \sin(\varphi - \varphi_0)] \times \\ \times \sum_{m,l} K_{m,l}^0 \exp[i l (\varphi - \varphi_0) + i h_m (z - z_0)], \quad (14)$$

$$\Pi_\varphi(r, \varphi, z) = (\pi i/L) \int_0^L dz_0 \int_0^{2\pi} d\varphi_0 [-\mu_r \sin(\varphi - \varphi_0) + \mu_\varphi \cos(\varphi - \varphi_0)] \times \\ \times \sum_{m,l} K_{m,l}^0 \exp[i l (\varphi - \varphi_0) + i h_m (z - z_0)].$$

В полученном представлении решения (14) координаты точек интегрирования и наблюдения разделены полностью.

В общем случае на решение в виде (14) следует подействовать оператором, стоящим в выражении для граничных условий, совершить предельный переход на границу и получить систему двух интегральных уравнений второго порядка. Вместе с тем в ряде практических случаев можно получить уравнения первого порядка путем факторизации решения. Ниже приведены примеры такой факторизации.

**Азимутально-симметричные волны E-типа в волноводе с азимутально-симметричной гофрировкой.** Уравнение поверхности  $S$  волновода с азимутально-симметричной гофрировкой в цилиндрических координатах имеет вид

$$r = R(z), \quad -\infty < z < \infty, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi. \quad (15)$$

Все размерные параметры и переменные, которые используются при решении задачи, отнормируем на  $L/2\pi$ . Тогда функция  $R(z)$  является  $2\pi$ -периодической и  $h_m = h_0 + m$ .

Для описания азимутально-симметричных волн  $E$ -типа достаточно использовать лишь азимутальную компоненту магнитного вектора Герца и записать выражение для  $\Pi_\varphi(r, z)$  с помощью азимутальной компоненты неизвестной вектор-функции  $\mu(z_0)$ . В данном случае задача (5) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \Delta \Pi_\varphi + k^2 \Pi_\varphi - (1/r^2) \Pi_\varphi &= 0, \\ [1/r + \partial/\partial r - R'(z)(\partial/\partial z)] \Pi_\varphi|_{r=R(z)} &= 0, \\ \Pi_\varphi(r, z + 2\pi) &= \exp(ih_0 2\pi) \Pi_\varphi(r, z), \end{aligned} \quad (16)$$

а выражение решения (14)

$$\begin{aligned} \Pi_\varphi(r, z) &= (i/2) \int_0^{2\pi} dz_0 \int_0^{2\pi} d\varphi_0 \mu_\varphi(z_0) \cos(\varphi - \varphi_0) \times \\ &\times \sum_{m,l} K_{m,l}^0 \exp[iil(\varphi - \varphi_0) + ih_m(z - z_0)]. \end{aligned}$$

После интегрирования последнего выражения по  $\varphi_0$  получаем

$$\Pi_\varphi(r, z) = i\pi \int_0^{2\pi} \mu_\varphi(z_0) \sum_{m=-\infty}^{\infty} K_{m,1}^0 \exp[ih_m(z - z_0)] dz_0. \quad (17)$$

Подействуем на (17) оператором, стоящим в выражении для граничных условий в (16):

$$\begin{aligned} F(r, z) &\equiv [1/r + \partial/\partial r - R'(z)(\partial/\partial z)] \Pi_\varphi(r, z) = \\ &= i\pi \int_0^{2\pi} \mu_\varphi(z_0) \sum_m \left[ \begin{aligned} &J_1(g_m r_0) [g_m H_0^{(1)}(g_m r) - ih_m R'(z) H_1^{(1)}(g_m r)], \quad r > r_0 \\ &H_1^{(1)}(g_m r_0) [g_m J_0(g_m r) - ih_m R'(z) J_1(g_m r)], \quad r < r_0 \end{aligned} \right] \times \\ &\times \exp[ih_m(z - z_0)] dz_0. \end{aligned} \quad (18)$$

Теперь совершим предельный переход на границу, где  $r = R(z)$ . Результаты классической теории потенциала здесь использовать нельзя, поскольку поверхность волновода при наличии гофрировки не является поверхностью Ляпунова ([1], с. 115).

Предельное значение изнутри получим по схеме

$$\lim_{M \rightarrow S_{\text{int}}} F(M) = F(M)|_{M \in S} - \frac{1}{2} [F_{\text{ext}} - F_{\text{int}}], \quad (19)$$

где выражение  $[F_{\text{ext}} - F_{\text{int}}]$  есть скачок функции  $F$  при переходе границы изнутри наружу.

Выберем по обе стороны поверхности две точки: внутреннюю  $B(r - \alpha, z)$  и наружную  $A(r + \alpha, z)$ . Рассмотрим разность значений выражения (18) в точках  $A$  и  $B$ . При малом  $\alpha$  на участке интегрирования вне отрезка  $[z_1, z_2]$  (рис. 1) интеграл разности стремится к нулю при  $\alpha \rightarrow 0$ . Поэтому мы рассмотрим интеграл лишь на отрезке  $[z_1, z_2]$ :

$$\begin{aligned} F(A) - F(B) &= i\pi \int_{z_1}^{z_2} \mu_\varphi(z_0) \sum_m \{ J_1(g_m r_0) [g_m H_0^{(1)}(g_m(r + \alpha)) - \\ &- ih_m R'(z) H_1^{(1)}(g_m(r + \alpha))] - H_1^{(1)}(g_m r_0) [g_m J_0(g_m(r - \alpha)) - \\ &- ih_m R'(z) J_1(g_m(r - \alpha))] \} \exp[ih_m(z - z_0)] dz_0. \end{aligned}$$

Для каждого члена ряда устремим  $\alpha$  к нулю:

$$F(A) - F(B) = -\pi \int_{z_1}^{z_2} \mu_\varphi(z_0) \sum_m g_m [J_1(g_m r) N_0(g_m r) - J_0(g_m r) N_1(g_m r)] \exp[ih_m(z - z_0)] dz_0.$$

Воспользовавшись тем, что

$$J_n(x) N_{n-1}(x) - J_{n-1}(x) N_n(x) = 2/\pi x,$$

получаем разрыв при переходе границы:

$$\begin{aligned} F(A) - F(B) &= -\frac{2}{r} \int_{z_1}^{z_2} \mu_\varphi(z_0) \sum_m \exp[ih_m(z - z_0)] dz_0 = \\ &= -\frac{4\pi}{r} \int_{z_1}^{z_2} \mu_\varphi(z_0) \exp[ih_0(z - z_0)] \delta(z - z_0) dz_0 = -\frac{4\pi}{r} \mu_\varphi(z) \end{aligned} \quad (20)$$

Итак, для  $\mu_\varphi(z)$  получили однородное интегральное уравнение Фредгольма второго рода:

$$i\mu_\varphi(z) = \frac{R(z)}{2} \int_0^{2\pi} \mu_\varphi(z_0) \times \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \times \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[ \begin{aligned} &J_1(g_m R(z_0)) [g_m H_0^{(1)}(g_m R(z)) - ih_m R'(z) H_1^{(1)}(g_m R(z))], R(z) > R(z_0) \\ &H_1^{(1)}(g_m R(z_0)) [g_m J_0(g_m R(z)) - ih_m R'(z) J_1(g_m R(z))], R(z) < R(z_0) \end{aligned} \right] \times \\ \times \exp[ih_m(z - z_0)] dz_0. \end{aligned}$$

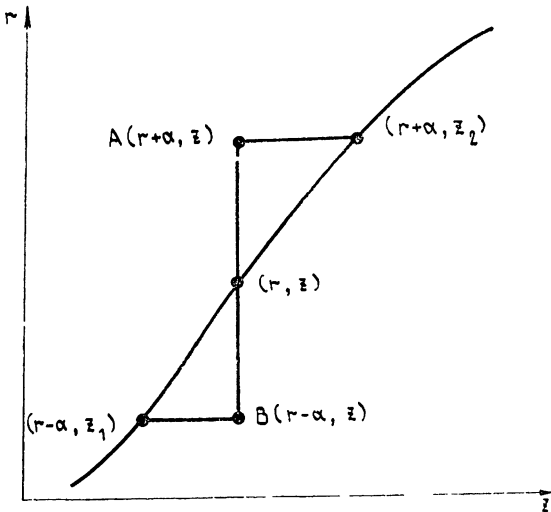


Рис. 1.

«Спектр» этого уравнения, т. е. зависимость волнового числа  $k$  от параметра Флоке  $h_0$ , есть дисперсионная характеристика волновода.

**Системы граничных интегральных уравнений для волноводов с азимутально-симметричной и винтовой гофрировками.** Здесь приведены системы граничных интегральных уравнений для различных волноводных мод двух частных видов волноводов, полученные с использованием вышеприведенной методики.

1. В случае азимутально-симметричной гофрировки граничные условия задачи имеют вид

$$\frac{\partial \Pi_r}{\partial z} \Big|_{r=R(z)} = 0, \quad (22)$$

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial \Pi_r}{\partial \varphi} + \left[ \frac{1}{r} + \frac{\partial}{\partial r} - R'(z) \frac{\partial}{\partial z} \right] \Pi_\varphi \Big|_{r=R(z)} = 0.$$

В таких волноведущих системах возможна факторизация электромагнитного поля по азимуту и последующее решение задачи отдельно для каждой моды:

$$\Pi_{r,\varphi}(r, \varphi, z) = e^{in\varphi} \Pi_{r,\varphi}^1(r, \varphi). \quad (23)$$

Легко доказать, что такая же факторизация справедлива и для плотности:

$$\mu_{r,\varphi}(z, \varphi) = e^{in\varphi} \mu_{r,\varphi}^1(z).$$

Здесь  $n$  — номер азимутальной гармоники.

Используя схему (19), получаем смешанную систему граничных интегральных уравнений:

$$\int_0^{2\pi} \mu_r^1(z_0) \sum_m h_m K_m^{(1)} \exp[ih_m(z - z_0)] dz_0 - i \int_0^{2\pi} \mu_\varphi^1(z_0) \times \\ \times \sum_m h_m K_m^{(2)} \exp[ih_m(z - z_0)] dz_0 = 0, \quad (24)$$

$$\int_0^{2\pi} \mu_r^1(z_0) \sum_m K_m^{(3)} \exp[ih_m(z - z_0)] dz_0 + i \int_0^{2\pi} \mu_\varphi^1(z_0) \sum_m K_m^{(4)} \times \\ \times \exp[ih_m(z - z_0)] dz_0 = -(1/r) \mu_\varphi^1(z),$$

где

$$r = R(z), \quad r_0 = R(z_0),$$

$$K_m^{(1)} = J_{n-1}(g_m r_0) H_{n-1}^{(1)}(g_m r) + J_{n+1}(g_m r_0) H_{n+1}^{(1)}(g_m r),$$

$$K_m^{(2)} = J_{n-1}(g_m r_0) H_{n-1}^{(1)}(g_m r) - J_{n+1}(g_m r_0) H_{n+1}^{(1)}(g_m r), \quad (25)$$

$$K_m^{(3)} = (2n/r_0) J_n(g_m r_0) H_n^{(1)}(g_m r) + ih_m R'(z) K_m^{(2)},$$

$$K_m^{(4)} = g_m H_n^{(1)}(g_m r) [J_{n+1}(g_m r_0) - J_{n-1}(g_m r_0)] - ih_m R'(z) K_m^{(1)}$$

при условии  $r > r_0$ . Для случая  $r < r_0$  функции Бесселя и Ганкеля меняются местами с одновременной сменой аргументов.

Здесь первое уравнение есть однородное уравнение Фредгольма первого рода, а второе — однородное уравнение Фредгольма второго рода, и оба они — относительно продольной координаты  $z$ .

В случае азимутально-симметричных волн, т. е. при  $n=0$ , система (24) распадается на два независимых уравнения

$$\int_0^{2\pi} \mu_r^1(z_0) \sum_m h_m K_m^{(1)} \exp[ih_m(z - z_0)] dz_0 = 0,$$

$$i \int_0^{2\pi} \mu_\varphi^1(z_0) \sum_m K_m^{(4)} \exp[ih_m(z - z_0)] dz_0 = -(4/R(z)) \mu_\varphi^1(z),$$

поскольку  $K_m^{(2)} = K_m^{(3)} = 0$ . Первое из этих уравнений описывает азимутально-симметричные волны  $H$ -типа, а второе, совпадающее с (21), — волны  $E$ -типа.

2. Рассмотрим волновод с винтовой  $n$ -заходной гофрировкой. В случае левого винта  $n > 0$ , правого —  $n < 0$ . В цилиндрических координатах уравнение поверхности такого волновода имеет вид

$$r = R(z, \varphi) \equiv R(z - n\varphi), \quad (26)$$

$$-\infty < z < \infty, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

Функция  $R(z, \varphi)$  — непрерывная, непрерывно дифференцируемая по обеим координатам,  $2\pi n$  — периодическая по  $z$  (здесь  $L = 2\pi n$ ) и  $h_m = h_0 + m/n$ . Для таких волноводов задача полностью сохраняется в виде (4).

В данном случае недопустима факторизация решения типа (23), поскольку в выражения для граничных условий входят функции, зависящие от всех трех координат.

При введении новой системы координат

$$\bar{r} = r, \quad \bar{\varphi} = \varphi - z/n, \quad \bar{z} = z, \quad (27)$$

в которой волновод продольно однороден ( $R(z, \varphi) \equiv R(\bar{\varphi})$ ), становится возможной факторизация решения по продольной координате  $\bar{z}$  и решение задачи отдельно для каждой гармоники  $\exp(ih_j \bar{z}) \Pi^1(\bar{r}, \bar{\varphi})$ . Для плотности также справедливо

$$\mu(\bar{z}, \bar{\varphi}) = \exp(ih_j \bar{z}) \mu^1(\bar{\varphi}). \quad (28)$$

Используя (28), проинтегрируем по  $\bar{z}_0$  решение (14). Используя схему (19), получаем систему граничных интегральных уравнений, но уже в «поперечном» сечении волновода:

$$\int_0^{2\pi} \mu_r^1(\bar{\varphi}_0) \sum_m \exp[i(j-m)(\bar{\varphi} - \bar{\varphi}_0)] h_m [-K_m^{(1)} + i(R'(\bar{\varphi})/\bar{r})K_m^{(2)}] d\bar{\varphi}_0 +$$

$$+ i \int_0^{2\pi} \mu_r^1(\bar{\varphi}_0) \sum_m \exp[i(j-m)(\bar{\varphi} - \bar{\varphi}_0)] h_m [K_m^{(2)} - i(R'(\bar{\varphi})/\bar{r})K_m^{(1)}] d\bar{\varphi}_0 = 0, \quad (29)$$

$$\int_0^{2\pi} \mu_r^1(\bar{\varphi}_0) \sum_m \exp[i(j-m)(\bar{\varphi} - \bar{\varphi}_0)] [(j-m)K_m^{(1)} - (1 + ih_m \bar{r}(R'(\bar{\varphi})/n)) \times$$

$$\times K_m^{(2)} - \bar{r}K_m^{(3)}] d\bar{\varphi}_0 + i \int_0^{2\pi} \mu_\varphi^1(\bar{\varphi}_0) \sum_m \exp[i(j-m)(\bar{\varphi} - \bar{\varphi}_0)] \times$$

$$\times [-(j-m)K_m^{(2)} + (1 + ih_m \bar{r}(R'(\bar{\varphi})/n))K_m^{(1)} + \bar{r}K_m^{(4)}] d\bar{\varphi}_0 = -4\mu_\varphi^1(\bar{\varphi}),$$

где

$$\bar{r} = R(\bar{\varphi}), \quad \bar{r}_0 = R(\bar{\varphi}_0),$$

$$K_m^{(1)} = J_{j-m-1}(g_m \bar{r}_0) H_{j-m-1}^{(1)}(g_m \bar{r}) + J_{j-m+1}(g_m \bar{r}_0) H_{j-m+1}^{(1)}(g_m \bar{r}),$$

$$K_m^{(2)} = J_{j-m-1}(g_m \bar{r}_0) H_{j-m-1}^{(1)}(g_m \bar{r}) - J_{j-m+1}(g_m \bar{r}_0) H_{j-m+1}^{(1)}(g_m \bar{r}), \quad (30)$$

$$K_m^{(3)} = \frac{j-m}{\bar{r}} K_m^{(1)} - \frac{1}{\bar{r}} K_m^{(2)} - \frac{2(j-m)}{\bar{r}_0} J_{j-m}(g_m \bar{r}_0) H_{j-m}^{(1)}(g_m \bar{r}),$$

$$K_m^{(4)} = \frac{j-m}{\bar{r}} K_m^{(2)} - \frac{1}{\bar{r}} K_m^{(1)} + g_m H_{j-m}^{(1)}(g_m \bar{r}) [J_{j-m+1}(g_m \bar{r}_0) - J_{j-m-1}(g_m \bar{r}_0)]$$

при условии  $\bar{r} > \bar{r}_0$ . Как и в (25), для случая  $\bar{r} < \bar{r}_0$  функции Бесселя и Ганкеля меняются местами с одновременной сменой аргументов.

Системы (24) и (29) представляют собой смешанные системы интегральных уравнений. Каждая из них содержит однородные интегральные уравнения Фредгольма первого и второго рода с сингулярными ядрами. Таким образом, задача нахождения дисперсионного соотношения между волновым числом и параметром Флоке свелась к решению задачи на собственные значения системы интегральных уравнений с нелинейным вхождением параметра.

Одним из возможных путей решения этой задачи состоит в выделении из ядер уравнений сингулярной части и обращения операторов, содержащих эти сингулярности.

При численной реализации спектральной задачи (21) из ядра выделяется сингулярная часть вида

$$\psi(z, z_0) \ln [\operatorname{ch}(R(z) - R(z_0)) - \cos(z - z_0)],$$

где  $\psi(z, z_0)$  — периодическая, непрерывная и непрерывно дифференцируемая функция по обоим аргументам.

Полная реализация метода регуляризации интегральных уравнений для систем (24) и (29) является предметом отдельной публикации.

Численная реализация и анализ спектральной задачи были проведены для частного случая системы (24) — уравнения (21).

**Численная реализация спектральной задачи для нулевой моды волновода с азимутально-симметричной гофрировкой.** Применим метод Фурье для нахождения спектра уравнения (21). Для этого разложим функцию  $\mu_\varphi(z)$  в ряд Фурье:

$$\mu_\varphi(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp(ih_n z),$$

где  $a_n = (1/2\pi) \int_0^{2\pi} \mu_\varphi(z) \exp(-ih_n z) dz$ , и подставим этот ряд в (21).

Получаем однородную систему линейных алгебраических уравнений

$$ia_n = \sum_{l=-\infty}^{\infty} A_{nl} a_l. \quad (31)$$

Предположим, что профиль гофрировки  $R(z)$  удовлетворяет следующим условиям: а)  $R(z)$  — четная функция относительно точек  $z=0$  и  $z=\pi$ ; б)  $R'(z) \leq 0$  для  $0 \leq z \leq \pi$ .

В таком случае элементы матрицы  $A_{nl}$  вычисляются по формуле

$$\begin{aligned} A_{nl} = & \frac{1}{\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{\pi} dz \int_0^z dz_0 \{ g_m [r J_0(g_m r) H_1^{(1)}(g_m r_0) \cos(z(m-n)) \times \\ & \times \cos(z_0(l-m)) + r_0 J_1(g_m r) H_0^{(1)}(g_m r_0) \cos(z_0(m-n)) \cos(z(l-m))] + \\ & + h_m J_1(g_m r) H_1^{(1)}(g_m r_0) [r R'(z) \sin(z(m-n)) \cos(z_0(l-m)) + \\ & + r_0 R'(z_0) \sin(z_0(m-n)) \cos(z(l-m))] \}. \end{aligned} \quad (32)$$

Если для полученной матрицы  $\det(A_{nl} - iE) = 0$ , то задача имеет нетривиальное решение, и значение  $h_0$  и  $k$  лежит на дисперсионной кривой.

В результате численного эксперимента было установлено, что модуль общего члена ряда в (32) имеет порядок убывания  $O(1/m)$ . Для суммирования ряда на ЭВМ это плохая сходимость.

Для улучшения сходимости было использовано преобразование Куммера ([12], с. 199). Ряд, полученный преобразованием Куммера, в нашем случае обладает следующими свойствами:

а) наибольший по модулю член ряда имеет номер, для которого  $|m| < \max(|n|, |l|)$ ;



б) член ряда с номером  $|m| = \max(|n|, |l|) + 3$  по абсолютному значению меньше наибольшего члена на 3—4 порядка, причем элементы ряда с номерами  $\pm m$  имеют противоположные знаки и близки по абсолютной величине. Все сказанное имеет место для волновых чисел  $k < \max(|n|, |l|)$ .

В результате преобразования Куммера из ядра интегрального уравнения была выделена логарифмическая сингулярность. Интегрирование этой особенности было проведено при помощи квадратур Гаусса для логарифма [13].

Однако из-за ошибок вычисления элементов и урезания матрицы определитель урезанной системы (31) отличен от нуля. Поэтому за дисперсионное соотношение между волновым числом  $k$  и параметром Флоке  $h_0$  выбирали точку кривой значений определителя на комплексной плоскости, наименее удаленную от начала координат.

На рис. 2 приведен график дисперсионного соотношения для азимутально-симметричной моды азимутально-симметричного волновода с профилем

$$R(z) = 26,1 + R_1 \cos z \quad (33)$$

при  $R_1 = 0,4$  (кривая 1) и 3,6 (кривая 2). Для этих профилей оказалось достаточно взять 13 членов ряда ( $-6 \leq m \leq 6$ ) для каждого элемента матрицы размерности  $7 \times 7$  ( $-3 \leq n, l \leq 3$ ).

При этом спадание членов ряда описано выше, и отброшенные члены ряда для  $|m| \geq 7$  имеют величину порядка  $10^{-6}$ . Действительные и мнимые части элементов матрицы с удалением от центра в любом направлении на три элемента уменьшаются по крайней мере на четыре порядка. В ситуации, когда  $k < |h_m|$  для всех  $m$ , элементы матрицы становятся мнимыми. Тогда соответствующая часть кривой значений определителя в комплексной плоскости будет находиться на одной из осей. Итерационный процесс поиска дисперсионного соотношения оказался устойчивым и в этом случае.

Ранее известные методы расчета гофрированных волноводящих систем использовали лишь приближенные дисперсионные уравнения для нахождения зависимости волнового числа от параметра Флоке.

В настоящей работе получен общий вид компонент магнитного вектора Герца, из которых указанным способом

можно получить систему интегральных уравнений, спектр которой является точным дисперсионным уравнением волновода.

Кроме того, получены системы смешанных интегральных уравнений (т. е. точные дисперсионные уравнения) для любых волновых гармоник двух частных видов волноводов — с азимутально-симметричной и винтовой периодическими гофрировками. Приведены результаты численного решения задачи для нулевой азимутальной гармоники азимутально-симметричного волновода.

Авторы считают своим приятным долгом выразить благодарность М. И. Петелину и Н. Ф. Козалева за помощь в постановке задачи.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Релятивистская высокочастотная электроника. Материалы Всесоюзного семинара. — Горький, 1979.
2. Овчаров В. Т. Лекции по электронике СВЧ (4-я зимняя школа-семинар инженеров). Кн. 4. — Саратов: Гос. ун-т, 1978, с. 93.
3. Ковалев Н. Ф. — Электронная техника. Сер. 1. Электроника СВЧ, 1978, № 3, с. 102.
4. Белов В. Е., Богомолов Я. Л., Родыгин Л. В. Тезисы докладов IX Всесоюзной конференции по электронике СВЧ — Киев, 1979, 1, с. 92.
5. Короза В. И., Трагов А. Г., Шанкин Ю. П. — Радиотехника и электроника, 1970, 15, № 10, с. 2185.
6. Короза В. И., Трагов А. Г., Шанкин Ю. П. — Радиотехника и электроника, 1971, 16, № 10, с. 1788.
7. Дайковский А. Г., Португалов Ю. И., Рябов А. Д. Препринт ИФВЭ.— Серпухов, 1981.
8. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений — М.: Гостехиздат, 1962.
9. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. — М.: Наука, 1981.
10. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Специальные функции. — М.: Наука, 1983.
11. Линейные уравнения математической физики — М.: Наука, 1964.
12. Демидович Б. П., Марон И. А. Основы вычислительной математики. — М.: Гостехиздат, 1960.
13. Бенерджи П., Баттерфилд Р. Методы граничных элементов в прикладных науках. — М.: Мир, 1984.
14. Смирнов В. И. Курс высшей математики — М.: Наука, 1981, 4, ч. 2.
15. Григорьев А. Д., Янкевич В. Б. — Зарубежная радиоэлектроника, 1977, № 5, с. 43.
16. Альховский Э. А., Асафьев В. И., Данилова А. Г. и др. В кн.: Вычислительные методы и программирование (Численные методы в задачах электродинамики). — М.: Гос ун-т, 1975, 24, с. 279.
17. Вайнштейн Л. А., Суков А. И. — Радиотехника и электроника, 1985, 29, № 8, с. 1472.

Институт прикладной физики  
АН СССР

Поступила в редакцию  
26 марта 1986 г.

### 3 USE OF THE INTEGRAL EQUATION METHOD FOR THE CALCULATION OF ELECTRODYNAMIC CHARACTERISTICS OF PERIODIC CORRUGATED WAVEGUIDES

*V. E. Belov, L. V. Rodygin, S. E. Fil'chenkov, A. D. Yunakovskij*

Calculation method for electrodynamic characteristics of periodic corrugated waveguide systems is described. The method is based on the representation of the field as a solution of Helmholtz vector equation in the form of the potential of simple layer transformed under Floquet conditions. Systems of mixed integral equations for the weight vector-function of the potential of simple layer in azimuthally symmetric and helically corrugated waveguides are derived. Fourier method is realized numerically in search of the dispersion relation for azimuthally symmetric waves of a circular corrugated waveguide.

---