

УДК 535 8:535 214 4

## ОПТИМАЛЬНАЯ СТРУКТУРА И ПРЕДЕЛЬНАЯ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ РАДИОМЕТРА С НЕСТАБИЛЬНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ УСИЛЕНИЯ

В. И. Антюфеев, А. С. Султанов

На базе теории оценок параметров сигналов решена задача синтеза структуры радиометра, оптимального в смысле максимума апостериорной плотности вероятности при наличии гауссовых флуктуаций коэффициента усиления высокочастотного тракта. Показано, что при произвольном отношении сигнал/шум оптимальным является радиометр, измеряющий отношение выходных напряжений сигнального и опорного каналов, с использованием прямоугольных модулирующих импульсов со скважностью, меньшей двух. В предельных случаях структура и чувствительность оптимального радиометра совпадает со структурой и чувствительностью либо классического модуляционного, либо компенсационного радиометра.

**Постановка задачи.** Радиометр представим состоящим из двух частей: заданной части, включающей источник полезного (1) и эталонного (2) шумовых сигналов, переключатель-модулятор (3), блок высокочастотного усиления (4), и синтезируемой части (5) (рис. 1). Относительно характеристик действующих в схеме сигналов и шумов будем придерживаться общепринятых в радиометрии допущений [1, 2]. Тогда нормированное относительно  $\sqrt{k\Delta f}$  напряжение на входе синтезируемой части можно записать в виде

$$u(t) = \sqrt{1+g}[\sqrt{m(t)T_c}u_c(t) + \sqrt{[1-m(t)]T_0}u_0(t) + \sqrt{T_{ш}}u_{ш}(t)],$$

$$t \in [0, \tau],$$

где обозначено:  $T_c$ ,  $T_0$  и  $T_{ш}$  — постоянные на интервале усреднения  $[0, \tau]$  шумовые температуры источников полезного и эталонного сигналов, а также заданной части радиометра соответственно,  $u_c(t)$ ,  $u_0(t)$

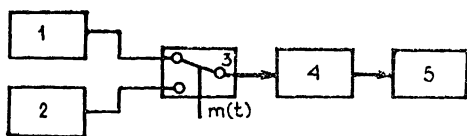


Рис. 1.

и  $u_{ш}(t)$  — соответствующие нормированные по мощности шумовые напряжения,  $m(t)$  и  $1-m(t)$  — модулирующие функции для полезного и эталонного сигналов соответственно,  $g$  — гауссова случайная величина с дисперсией  $\sigma^2$ , учитывающая квазистатические от-

носительные флуктуации коэффициента усиления (КУ),  $\Delta f$  — полоса пропускания заданной части радиометра,  $k$  — постоянная Больцмана.

Задача синтеза оптимального в смысле максимума апостериорной вероятности радиометра формулируется следующим образом: требуется найти оценку параметра (температурного контраста)  $\Delta T = T_c - T_0$  сигнала  $\sqrt{m(t)T_c}u_c(t) + \sqrt{[1-m(t)]T_0}u_0(t)$ , наблюдаемого на фоне шума  $\sqrt{T_{ш}}u_{ш}(t)$  при наличии мультипликативной помехи  $g$  с гауссовым априорным распределением вероятностей, причем оценка должна доставить максимум апостериорной плотности вероятности параметра  $\Delta T$ . В соответствии с рассматриваемым методом при на-

личии случайного мешающего параметра  $g$  оценка  $\hat{\Delta T}$  должна находиться совместно с оценкой параметра  $\hat{g}$  [3].

Разбивая на основании теоремы Котельникова интервал  $[0, \tau]$  на  $n=2\Delta f\tau$  одинаковых дискретов, после построения многомерной плотности вероятности процесса  $u(t)$  и перехода к непрерывному времени [3] для логарифма апостериорной плотности вероятности оцениваемых параметров  $\Delta T$  и  $g$  можно получить следующее выражение:

$$\ln w(\Delta T, g/u) = -\frac{1}{2} \ln(2\pi\sigma^2) - \frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{g^2}{2\sigma^2} - \Delta f\tau \ln(1+g) - \Delta f \int_0^\tau \left\{ \ln [m(t)\Delta T + T] + \frac{u^2(t)}{(1+g)[m(t)\Delta T + T]} \right\} dt,$$

где  $T = T_{\text{ш}} + T_{\text{д}}$ .

**Оценка предельной точности (чувствительности).** Для оценки чувствительности оптимального радиометра построим матрицу Фишера [3], которая в данном случае имеет вид

$$F = \frac{\Delta f\tau}{T^2} \begin{bmatrix} \langle M^2 \rangle & \frac{T \langle M \rangle}{1 + \hat{g}} \\ \frac{T \langle M \rangle}{1 + \hat{g}} & \frac{T^2}{(1 + \hat{g})^2 Q} \end{bmatrix},$$

где

$$\langle M^2 \rangle = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau M^2(t) dt, \quad \langle M \rangle = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau M(t) dt,$$

$$M(t) = m(t) / [1 + \beta m(t)],$$

$\beta$  — отношение сигнал/шум на входе приемника,  $\beta = \hat{\Delta T}/T$ ,

$$Q = [1 + (1 + \hat{g})^2 / \sigma^2 \Delta f\tau]^{-1}.$$

В результате вычисления обратной матрицы находим матрицу ковариаций ошибок

$$F^{-1} = \frac{Q(1 + \hat{g})^2}{\Delta f\tau [\langle M^2 \rangle - Q\langle M \rangle^2]} \begin{bmatrix} \frac{T^2}{Q(1 + \hat{g})^2} & -\frac{T \langle M \rangle}{1 + \hat{g}} \\ -\frac{T \langle M \rangle}{1 + \hat{g}} & \langle M^2 \rangle \end{bmatrix},$$

из которой определяем дисперсию оценки параметра  $\Delta T$ :

$$D_{\Delta T} = \frac{T^2}{\Delta f\tau} \gamma^2(Q, m, \beta),$$

где

$$\gamma(Q, m, \beta) = (\langle M^2 \rangle - Q\langle M \rangle^2)^{-1/2}.$$

Коэффициент  $\gamma(Q, m, \beta)$  характеризует ухудшение чувствительности оптимального приемника с заданной модулирующей функцией  $m(t)$  по сравнению с чувствительностью идеального компенсационного радиометра  $\delta T_{\text{к}} \approx T(\Delta f\tau)^{-1/2}$  и зависит от отношения сигнал/шум на входе  $\beta$  и параметра  $Q$ , связанного с дисперсией априорного распре-

ления параметра  $g$  формулой (2). Для нахождения функции  $\hat{m}(t)$ , минимизирующей выражение (4), достаточно определить функцию  $\hat{M}(t)$ , доставляющую максимум функционалу  $\psi(M) = \langle M^2 \rangle - Q \langle M \rangle^2$ . Можно показать, что последний в классе кусочно-непрерывных функций при ограничении  $a \leq m(t) \leq b$  ( $a < b$ ) достигает максимума на функциях, множество значений которых равно  $\{a, b\}$ . В силу соотношения (2) оптимальные модулирующие функции  $\hat{m}(t)$  также могут принимать только два значения, а именно, 0 и 1, что следует из неравенства  $0 \leq m(t) \leq 1$ . Обычно используются периодические модулирующие функции вида

$$\tilde{m}(t) = \sum_{i=0}^{N-1} a(t - i\eta), \quad (5)$$

где

$$a(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq \theta, \\ 0, & \theta \leq t \leq \eta, \end{cases} \quad N = \tau/\eta.$$

Для таких функций  $\langle M \rangle = [q(1+\beta)]^{-1}$ ,  $\langle M^2 \rangle = q^{-1}(1+\beta)^{-2}$  и, в соответствии с выражением (4),

$$\gamma^2(Q, \tilde{m}, \beta) = q^2(1+\beta)^2/(q-Q), \quad (6)$$

где  $q$  — скважность импульсов модулирующего напряжения,  $q = \eta/\theta$ . Минимизируя функцию (6) по скважности  $q$  при ограничении  $q \geq 1$ , найдем

$$\hat{q} = \begin{cases} 1, & 0 \leq Q \leq 1/2 \\ 2Q, & 1/2 < Q \leq 1 \end{cases}, \quad (7)$$

$$\gamma_1(Q, \beta) = \gamma(Q, \hat{m}, \beta) = (1+\beta) \begin{cases} (1-Q)^{-1/2}, & 0 \leq Q \leq 1/2 \\ 2\sqrt{Q}, & 1/2 < Q \leq 1 \end{cases},$$

где оптимальная модулирующая функция  $\hat{m}(t)$  определяется выражением (5), в котором  $\theta = \eta/\hat{q}$ .

Вводя отношение сигнал/шум на выходе приемника  $\alpha = \hat{\Delta T}/\sqrt{\Delta T}$ , из формулы (3) получим  $\hat{\Delta T} = \alpha T (\Delta f \tau)^{-1/2} \gamma_1(Q, \beta)$ . Тогда потенциальная чувствительность радиометра с оптимальной модулирующей функцией, определяемая как приращение входного сигнала  $\delta T$ , при котором отношение сигнал/шум на выходе  $\alpha = 1$ , равна

$$\delta T = (T/\sqrt{\Delta f \tau}) \gamma_1(Q, \beta). \quad (8)$$

Графики функции  $\gamma_1(Q)$  при различных значениях  $\beta$  приведены на рис. 2 (сплошные кривые). Когда  $Q \in [0, 1/2]$ ,  $\hat{q} = 1$  и оптимальным является радиометр, выполненный по компенсационной схеме. С учетом формулы (2) в случае отсутствия флуктуаций КУ приемника ( $\sigma^2 = 0$ ) имеем  $Q = 0$ ,  $\gamma_1(Q) = 1$ , т. е. чувствительность радиометра совпадает с чувствительностью идеального компенсационного приемника. При увеличении  $\sigma^2$  до значения  $\sigma^2 = (\Delta f \tau)^{-1}$  получим  $Q = 1/2$ ,  $\gamma_1(Q) = \sqrt{2}$ . В случае изменения  $\sigma^2$  в интервале  $(1/(\Delta f \tau), \infty)$   $Q \in (1/2, 1)$ ,  $q \in (1, 2)$ , т. е. оптимальным является модуляционный радиометр с несимметричной модулирующей функцией. При  $\sigma^2 \gg (\Delta f \tau)^{-1}$   $Q \rightarrow 1$ ,  $q \rightarrow 2$ ,  $\gamma_1(Q) \rightarrow 2$ , что совпадает с известным результатом для радиометра с модулирующей функцией типа «меандр» [1, 2], который, таким образом, является оптимальным при относительно большой нестабильности КУ или в случае полного отсутствия априорной информации о флуктуациях КУ ( $\sigma^2 \rightarrow \infty$ ).

Отметим, что значение  $\delta T = \sqrt{2} T (\Delta f \tau)^{-1/2}$  для чувствительности модуляционного радиометра с  $q=2$ , приведенное в работе [4], получается из формулы (6) при  $Q=0$ , т. е. в случае отсутствия флуктуаций КУ, когда предпочтительнее выполнять приемник по компенсационной схеме.

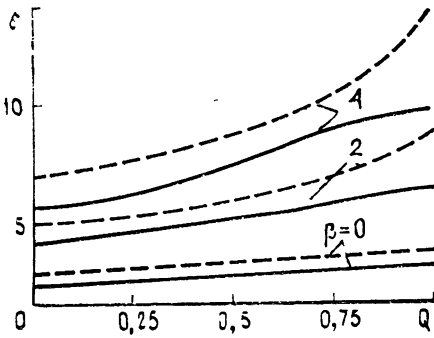


Рис. 2.

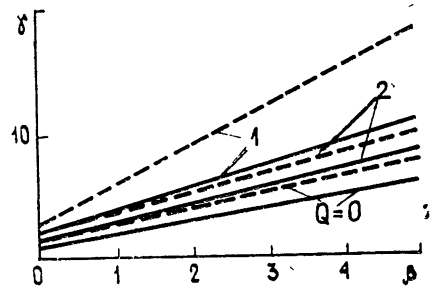


Рис. 3.

Для радиометра с синусоидальной модулирующей функцией вида  $m(t) = \cos^2(\pi Nt/\eta)$ , которая не является оптимальной, расчет по формуле (4) дает

$$\gamma(Q, \cos^2(\pi Nt/\eta), \beta) = \beta \left\{ 1 - Q + \frac{1}{\sqrt{1+\beta}} \times \right. \\ \left. \times \left[ \frac{1 - Q\sqrt{1+\beta} + \beta/2}{1+\beta} - 2(1-Q) \right] \right\}^{-1/2}, \quad (9)$$

а соответствующие графики приведены для сравнения на рис. 2 (штриховые кривые). При выполнении неравенства  $\beta \ll 1$ , которое справедливо в большинстве практически важных случаев, раскрывая неопределенность в выражении (9), получим соотношение

$$\gamma(Q, \cos^2(\pi Nt/\eta), 0) = 2\sqrt{2}/\sqrt{3-2Q},$$

которое для  $Q=1$  равно известному значению  $2\sqrt{2}$  [2].

На рис. 3 приведены графики функции  $\gamma(\beta)$  при различных значениях параметра  $Q$  для оптимальной (сплошные кривые) и синусоидальной (штриховые кривые) модулирующих функций.

**Синтез оптимальной структуры радиометра.** В соответствии с методом максимума апостериорной вероятности оптимальные оценки параметров  $\hat{\Delta T}$  и  $\hat{g}$  являются решениями системы уравнений

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial \ln w(\Delta T, g/u)}{\partial \Delta T} \right|_{\Delta T = \hat{\Delta T}, g = \hat{g}} = 0 \\ \left. \frac{\partial \ln w(\Delta T, g/u)}{\partial g} \right|_{\Delta T = \hat{\Delta T}, g = \hat{g}} = 0 \end{cases}$$

которая имеет вид

$$\begin{cases} \int_0^{\tau} \frac{m(t)}{m(t)\hat{\Delta T} + T} \left\{ 1 - \frac{u^2(t)}{(1+\hat{g})[m(t)\hat{\Delta T} + T]} \right\} dt = 0 \\ \frac{\hat{g}}{\sigma^2 \Delta f \tau} + \frac{1}{1+\hat{g}} - \frac{1}{\tau(1+\hat{g})^2} \int_0^{\tau} \frac{u^2(t) dt}{[m(t)\hat{\Delta T} + T]} = 0 \end{cases} \quad (10)$$

Для оптимальных прямоугольных модулирующих функций вида (5) систему (10) можно упростить и получить явные выражения для оценок  $\hat{\Delta T}$  и  $\hat{g}$ . Учитывая, что

$$\frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \frac{m(t) u^2(t) dt}{[m(t) \hat{\Delta T} + T]^2} = \frac{1}{\tau (\hat{\Delta T} + T)^2} \sum_{i=0}^{N-1} \int_{i\tau}^{(i+1)\tau} u^2(t) dt = \frac{A}{(\hat{\Delta T} + T)^2},$$

$$\frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \frac{u^2(t) dt}{m(t) \hat{\Delta T} + T} = \frac{1}{\tau} \sum_{i=0}^{N-1} \left[ \frac{1}{\hat{\Delta T} + T} \int_{i\tau}^{(i+1)\tau} u^2(t) dt + \frac{1}{T} \int_{i\tau}^{(i+1)\tau} u^2(t) dt \right] =$$

$$= \frac{A}{\hat{\Delta T} + T} + \frac{B}{T},$$

где  $A = \int_0^{\tau} m(t) u^2(t) dt$ ,  $B = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} [1 - m(t)] u^2(t) dt$ , приведем систему уравнений (10) к виду

$$\begin{cases} \hat{\Delta T} = \frac{qA}{1 + \hat{g}} - T \\ \frac{A}{\hat{\Delta T} + T} + \frac{B}{T} - 1 - \hat{g} - \frac{\hat{g}(1 + \hat{g})^2}{\sigma^2 \Delta f \tau} = 0 \end{cases} \quad (11)$$

Подставив первое уравнение во второе, получим кубическое уравнение для  $\hat{g}$ :

$$\frac{\hat{g}(1 + \hat{g})^2}{\sigma^2 \Delta f \tau} - \hat{g} \frac{1 - q}{q} - \frac{1 - q}{q} - \frac{B}{T} = 0. \quad (12)$$

Для большинства практических приложений обычно выполняется неравенство  $|g| \ll 1$ . В этом случае, удерживая в уравнении (12) линейные члены по  $\hat{g}$ , получим

$$1 + \hat{g} = q \frac{QB + (1 - Q)T}{(q - Q)T}. \quad (13)$$

Подстановка выражения (13) в (11) приводит к уравнению

$$\hat{\Delta T} = T \left[ \frac{(q - Q)A}{QB + T(1 - Q)} - 1 \right], \quad (14)$$

которое описывает оптимальную структуру приемника с модулирующей функцией вида (5) при произвольной скважности  $q$ . Чтобы найти оптимальную скважность, необходимо задаться параметрами  $\Delta f$ ,  $\tau$ ,  $T$ , и экспериментально оценить  $T_{ш}$  и  $\sigma^2$ . Затем по формуле (2) (при  $|g| \ll 1$ ) определить  $Q$  и из выражения (7) найти  $\hat{q}$ . Возможны два случая. Если  $\sigma^2 \ll \Delta f \tau$ , то  $Q < 1/2$ ,  $\hat{q} = 1$  ( $m(t) = 1$ ) и уравнение (14) принимает вид

$$\hat{\Delta T} = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} [u^2(t) - T] dt.$$

Последнее уравнение описывает структуру компенсационного радиометра.

Если  $\sigma^2 > \Delta f \tau$ , то  $Q > 1/2$ ,  $\hat{q} = 2Q$  и уравнение (14) преобразуется к следующему:

$$\hat{\Delta T} = T \left\{ \frac{\int_0^{\tau} m(t) u^2(t) dt}{\int_0^{\tau} [1 - m(t)] [u^2(t) + T'] dt} - 1 \right\},$$

где  $T' = T(1-Q)/(Q-1/2)$ . Соответствующая структура приемника приведена на рис. 4, где обозначено: А — антенный вход, ГШ — источник эталонного шумового сигнала, П — переключатель-модулятор, УВЧ — усилитель высокой частоты, ГОН — генератор опорных напряжений, К — усилитель с коэффициентом передачи  $K=T$ . Отметим, что в рассматриваемом случае  $|g| \ll 1$  оценка  $\hat{\Delta T}$  является инвариантной относительно изменений КУ приемника [5] при произвольном отношении сигнал/шум на входе.

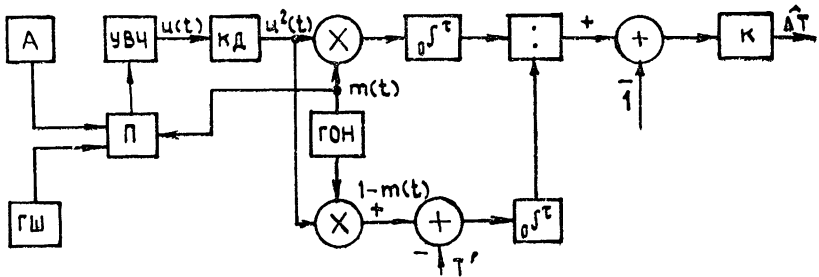


Рис. 4.

Рассмотрим случай относительно больших флуктуаций параметра  $g$ , т. е.  $\sigma^2 \gg (\Delta f \tau)^{-1}$ . При этом система уравнений (10) преобразуется к системе уравнений максимального правдоподобия [3], оптимальная скважность модулирующих импульсов становится равной двум, а оптимальная оценка  $\hat{\Delta T}$  определяется как отношение оценок мощности сигнала на различных полупериодах модулирующей функции. Ранее такой алгоритм был найден эвристически и предложен в [6]. В практически важном случае  $\beta \ll 1$  можно пренебречь модулирующим воздействием флуктуаций КУ на полезный сигнал по сравнению с аналогичным влиянием на собственный шум приемника. Тогда из выражений (11), (13) при  $q=2$ ,  $Q=1$  получим уравнение

$$\begin{aligned} \hat{\Delta T} &\approx \hat{\Delta T}(1+\hat{g}) = 2A - T(1+\hat{g}) = \\ &= \frac{2}{\tau} \int_0^{\tau} \{m(t)u^2(t) - [1-m(t)]u^2(t)\} dt, \end{aligned}$$

описывающее структуру радиометра Дикке [2].

Таким образом, в зависимости от соотношения между дисперсией флуктуаций КУ  $\sigma^2$  и величиной квадрата радиометрического выигрыша  $\Delta f \tau$  более чувствительной может быть либо компенсационная, либо модуляционная схема. Если  $\sigma^2 < (\Delta f \tau)^{-1}$ , радиометр целесообразно строить по компенсационной схеме, в противном случае — по модуляционной. Оптимальная модулирующая функция представляет собой периодически последовательность прямоугольных импульсов со скважностью, в общем случае зависящей от  $\sigma^2$  и  $\Delta f \tau$ , а алгоритм оптимальной оценки температурного контраста для произвольного отношения сигнал/шум

основан на определении отношения напряжений на выходах сигнального и опорного каналов. При большой нестабильности КУ ( $\sigma^2 \gg (\Delta f \tau)^{-1}$ ) максимальную чувствительность имеет радиометр с симметричной модулирующей функцией типа «меандр», который является оптимальным по критерию максимального правдоподобия. Малое входное отношение сигнал/шум позволяет использовать для оценки температурного контраста не отношение, а разность напряжений на выходах сигнального и опорного каналов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Башаринов А. Е, Гурвич А. С, Егоров С. Т Радионизлучение Земли как планеты. — М: Наука, 1974.
2. Есепкина Н. А, Корольков Д. В, Парийский Ю. Н. Радиотелескопы и радиометры. — М.: Наука, 1973.
3. Куликов Е. И., Трифионов А. П. Оценка параметров сигналов на фоне помех — М: Сов. радио, 1978.
4. Кисляков А. Г. — Изв. вузов — Радиофизика, 1978, 21, № 3, с 448.
5. Мурза Л. П. — Радиотехника и электроника, 1985, 30, № 7, с 1329.
6. Ohm E. A, Snell W. W — Bell System Techn J, 1963, 42, № 5, p 47.

Поступила в редакцию  
22 марта 1986 г.

#### RADIOMETER WITH FLUCTUATING GAIN OPTIMUM CONFIGURATION AND POTENTIAL SENSITIVITY

*V. I. Antyufeev, A. S. Sultanov*

To obtain the maximum of posterior probability density under gaussian fluctuations of r. f. circuit gain the problem is solved of radiometer structure synthesis on the basis of the signal parameter estimations. Under the arbitrary signal-to-noise ratio the radiometer is shown to be optimal which measures the ratio of signal and reference channel output voltages using rectangular modulating pulses with on-off time ratio less than 2. In the limit cases the structure and sensitivity of the optimal radiometer coincides with those of either classic modulational or compensational ones.

---