

УДК 538.56:519.25

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОДНОМЕРНОЙ ЗАДАЧИ О САМОВОЗДЕЙСТВИИ ВОЛНЫ В СТОХАСТИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ СРЕДЕ

И. О. Ярошук

Рассматривается задача о нормальном падении плоской монохроматической волны на полупространство нелинейной среды со случайными неоднородностями. Для простейших типов нелинейности, характерных для задач нелинейной оптики и физики ионосферы, анализируются статистические характеристики волнового поля, полученные путем численного моделирования уравнений метода «погружения» с использованием свойства эргодичности последних. Установлено, что статистические характеристики поля в основном определяются нелинейными эффектами.

1. Задача о падении монохроматической волны на слой среды  $H_0 \leq x \leq H$ , диэлектрическая проницаемость которой определяется интенсивностью волнового поля, представляет большой интерес, и ее исследованию посвящено большое число работ (библиографию вопроса можно найти, например, в [1]). В простейшем одномерном случае (нормальное падение волны на слоисто-неоднородную среду) волновое поле в среде описывается нелинейным уравнением Гельмгольца

$$\frac{d^2}{dx^2} U(x) + k^2 [1 + \varepsilon(x, J(x))] U(x) = 0, \quad J(x) = |U(x)|^2 \quad (1)$$

с условиями непрерывности поля и его производных на границах слоя. Если справа на слой падает волна  $U_0(x) = v \exp[ik(H-x)]$ , решение задачи (1) можно представить в виде  $U(x) = v u(x)$ , где  $u(x)$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2}{dx^2} u(x) + k^2 [1 + \varepsilon(x, J(x))] u(x) = 0, \quad J(x) = \omega |u|^2, \quad \omega = |v|^2 \quad (2a)$$

с краевыми условиями

$$u'(H) = -ik[2 - u(H)], \quad u'(H_0) = -iku(H_0) \quad (u'(x) = du/dx). \quad (2b)$$

Коэффициент отражения волны от слоя определяется равенством  $R_H = u(H) - 1$ . В общем случае величина  $\varepsilon(x, J(x))$  комплексна, т. е.  $\varepsilon(x, J(x)) = \varepsilon_1(x, J) + i\gamma(x, J)$ , где  $\varepsilon_1 = \varepsilon_1^*$ , а  $\gamma$  описывает поглощение волны в слое.

В исходной постановке задача (1) является краевой, в которой в ряде случаев возникают неоднозначности, связанные с тем, что одному и тому же полю внутри среды может отвечать несколько значений интенсивности падающей волны и, следовательно, коэффициента отражения. Исследование задачи (1) в рамках известных методов вызывает большие затруднения (обсуждение этого вопроса можно найти в [2, 3]).

В работах [2-4] развит подход к решению задачи, основанный на другом принципе. Используя метод погружения, исходная краевая задача сводится к задаче с начальными данными по параметрам «погружения»:  $H$  — положению правой границы слоя (на которую падает волна) и  $\omega$  — интенсивности падающей волны. При этом значение по-

ля на границе (или коэффициента отражения) описывается замкнутым нелинейным уравнением, а поле внутри слоя удовлетворяет уже линейному уравнению. Такой подход, как это продемонстрировано в [3], позволяет в случае отсутствия затухания получить зависимость модуля коэффициента отражения от интенсивности падающей волны в общем случае произвольной нелинейности, а при наличии затухания, для конкретных видов нелинейности, полученные уравнения удобны для численного анализа.

В работе [2] было показано, что с учетом зависимости решения от  $H$  и  $\omega$  как от параметров задача (2) эквивалентным образом описывается системой уравнений ( $u(H) = u_H(\omega)$ )

$$\left[ \frac{\partial}{\partial H} - \omega b(H, \omega) \frac{\partial}{\partial \omega} \right] u_H(\omega) = 2ik[u_H(\omega) - 1] + \frac{ik}{2} \varepsilon(H, J_H) u_H^2, \quad (3)$$

$$u_{H_0}(\omega) = 1;$$

$$\left[ \frac{\partial}{\partial H} - \omega b(H, \omega) \frac{\partial}{\partial \omega} \right] u(x; H, \omega) = a(H, \omega) u(x; H, \omega), \quad (4)$$

$$u(x; x, \omega) = u_x(\omega),$$

где

$$u_H(\omega) \equiv u(H; H, \omega), \quad a(H, \omega) = ik + (ik/2) \varepsilon(H, J_H) u_H(\omega),$$

$$b(H, \omega) = a(H, \omega) + a^*(H, \omega), \quad J_H = \omega |u_H(\omega)|^2.$$

Следствием (4) является уравнение для интенсивности поля внутри слоя неоднородной среды

$$\left[ \frac{\partial}{\partial H} - \omega b(H, \omega) \frac{\partial}{\partial \omega} \right] J(x; H, \omega) = 0, \quad J(x; x, \omega) = J_x(\omega). \quad (4a)$$

При  $\omega=0$  уравнения (3) и (4) вырождаются в соответствующие соотношения линейной задачи (см., например, [5]).

В случае  $\varepsilon(x, J) \equiv \varepsilon(J)$  можно совершить предельный переход  $H_0 \rightarrow -\infty$ , соответствующий падению волны на полупространство  $x < H$ . Такое исследование для простейших типов нелинейности, характерных для задач нелинейной оптики, физики ионосферы и физики плазмы, выполнено в [3, 4]. В работах [4, 6] численно изучалось поле на границе слоя и распределение интенсивности внутри слоя. Прослеживался переход от конечного слоя к полупространству. Было установлено, что ряд моделей неоднородной среды может породить несколько «стационарных»\* режимов как для коэффициента отражения волны от слоя (либо от полупространства), так и для интенсивности поля внутри среды, т. е. для нелинейной задачи характерны неоднозначности.

2. В данной работе сделана попытка изучения энергетических характеристик волны, распространяющейся в полупространстве нелинейной среды в присутствии флуктуаций диэлектрической проницаемости. В отечественной литературе такая задача впервые была поставлена в работе [7]. Будем далее предполагать, что  $\varepsilon_1(x, J) = \varepsilon_1(J) + \tilde{\varepsilon}_1(x)$ , где  $\tilde{\varepsilon}_1(x)$  без ограничения общности, считаем гауссовой дельта-коррелированной случайной функцией с параметрами

$$\langle \tilde{\varepsilon}_1(x) \rangle = 0, \quad \langle \tilde{\varepsilon}_1(x) \tilde{\varepsilon}_1(x') \rangle = 2\sigma^2 l \delta(x - x'). \quad (5)$$

Здесь  $\sigma^2$  — дисперсия процесса,  $l$  — радиус корреляции.

\* Здесь и далее под стационарностью подразумевается независимость энергетических характеристик волны в детерминированной задаче или их моментов в статистической задаче от параметра  $H$ , если только слой достаточно большой ( $H_0 \rightarrow -\infty$ ).

Специфической особенностью волновой задачи (1) или (2) является наличие двухточечных граничных условий, связанных с необходимостью учета рассеяния назад. При этом нарушается принцип динамической причинности, необходимый для описания статистики подобных волн в диффузионном приближении [5]. В работе [7] последнюю трудность удается обойти, сформулировав вспомогательную односточную граничную задачу — задачу Коши. На основе предложенной методики для модельного примера нелинейности  $\varepsilon_1(J) = \varepsilon' J$  ( $\varepsilon'$  — параметр) в [7] получено приближенное аналитическое решение и показана возможность существования нескольких решений стационарной задачи. Однако для успешного анализа были сделаны специальные предположения: затухание в среде отсутствовало, слой предполагался ограниченным зеркалом. Последние два условия означают, что модуль коэффициента отражения волны от слоя равен единице, поэтому в [7] изучалась фазовая структура коэффициента отражения.

Метод погружения, развитый в [2-4] для нелинейных задач, позволяет переформулировать исходную краевую задачу в задачу с начальными условиями как для любых условий на границах слоя, так и для произвольных  $\varepsilon(x, J(x))$ , поэтому представляется более общим при изучении распространения волн в нелинейных стохастических средах.

Наличие динамической причинности для системы уравнений погружения (3), (4) позволяет, в принципе, использовать математический аппарат, развитый в [5] для квазилинейных уравнений в частных производных. Однако уравнения Эйнштейна—Фоккера, возникающие при этом для соответствующей плотности вероятностей, имеют достаточно большую размерность по координатам фазового пространства, и их весьма затруднительно изучать как аналитическими, так и численными методами. Решить же задачу в общей постановке позволяет численное моделирование, результативность которого для линейных стохастических задач продемонстрирована, например, в [8].

3. Уравнения в частных производных первого порядка, как хорошо известно, эквивалентны системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Если перейти от размерных переменных  $x$  и  $H$  к нормированным  $\tilde{x} = xD$ ,  $h = HD$  (далее тильду у  $x$  не пишем;  $D = k^2 \sigma^2 l / 2$  — коэффициент диффузии) и ввести характеристические кривые  $\omega_h = \omega(h, \omega_0)$  согласно равенству

$$\frac{d}{dh} \omega_h = -b(h, \omega_h) \omega_h, \quad \omega_{h=h_0} = \omega_0, \quad (6a)$$

то поле на границе слоя  $u_h(\omega)$  будет описываться уравнением

$$\frac{d}{dh} u_h = 2i\alpha(u_h - 1) + \left( \alpha \varepsilon_1(J) + \tilde{\varepsilon}_2(h) - i \frac{\gamma \alpha}{2} \right) u_h^2, \quad u_{h=h_0} = 1, \quad (6b)$$

совпадающим по внешнему виду с уравнением линейной задачи (при  $\varepsilon_1 \equiv 0$ ), а уравнение (4a) позволяет получить равенство

$$(d/dh)J(x; h, \omega_h) = 0, \quad J(x; x, \omega_x) = J_x(\omega_x),$$

и, следовательно, интенсивность поля внутри среды остается постоянной на характеристике, т. е.

$$J(x; h, \omega_h) \equiv J_x(\omega_x). \quad (7)$$

Здесь  $\tilde{\varepsilon}_2$  — гауссов случайный процесс после нормировки:  $\langle \tilde{\varepsilon}_2(h) \tilde{\varepsilon}_2(h') \rangle = \delta(h - h')$ .  $\alpha = k/D$  — безразмерное волновое число. Комбинация  $\alpha \gamma = k \gamma / D$  определяет параметр  $\beta$ , роль которого в линейной стохастической задаче (т. е. при  $\varepsilon_1 \equiv 0$ ) подробно изучена в [9]. Так, в последней работе установлено, что при  $\beta \gg 1$  справедлива

феноменологическая теория переноса излучения; при  $\beta \leq 1$  становятся существенными эффекты корреляции между интенсивностями проходящей и отраженной волн, например при  $\beta < 1$  появляется сугубо статистическое явление для моментов интенсивности поля начиная со второго — статистический волновой параметрический резонанс [9].

Таким образом, в поставленной нелинейной стохастической задаче присутствуют следующие параметры:  $\alpha$ ,  $\omega$  и  $\beta$  (если только  $\gamma = \text{const}$ ). Значения  $\omega$  — интенсивности падающей волны, как и в работах [3, 4], будем выбирать в диапазоне  $\omega \leq 2$  или  $\omega \leq 3$ , что для моделей, изученных ниже, предполагает ситуации, в которых нелинейные эффекты определяющие (нелинейная часть  $\varepsilon$  больше единицы, см. (2)). Параметр  $\alpha$  зададим таким образом, чтобы при малых  $\omega$ , т. е. когда задача вырождается в линейную стохастическую, средняя интенсивность в среде описывалась диффузионным приближением, это предполагает условие  $\alpha \gg 1$  [5]. Далее везде при расчетах выбиралось  $\alpha = 10$ , позволяющее решить задачу с использованием разумных затрат машинного времени (ибо шаг дискретизации  $\Delta h$  определяется условием  $\alpha \Delta h \ll 1$  [10]). В детерминированной нелинейной задаче выбор конкретного значения  $\alpha$  приводит лишь к соответствующему сжатию или растяжению графиков по оси  $x$ .

Переход от волновой задачи (2) к задаче с начальными условиями (6) позволяет моделировать волновое поле на ЭВМ стандартными численными методами (см., например, [10]). Однако за один просчет уравнений (6) возможно получить лишь одну характеристику  $\omega_h = \omega(h, \omega_0)$ , которая выходит из определенного начального значения  $\omega_{h=h_0} = \omega_0$ , а также все волновые поля на ней. При расчете же статистических характеристик волнового поля необходимо уметь получать функцию  $u_h(\omega)$  для значений  $h$  и  $\omega$  из требуемого диапазона значений.

Процедура получения значений реализации  $J(x; h, \omega)$  (для заданной интенсивности падающей волны  $\omega$ ) основывалась на том факте, что  $\omega_h$  и  $u_h(\omega)$  являются гладкими, если их рассматривать как функции параметра  $\omega_0$ . По значениям сетки  $\{\omega(h, \omega_0^m)\}$  ( $m$  — индекс узла в сетке,  $m = \overline{1, N}$ ) и соответствующим значениям  $\{u_h^m\}$  для слоя  $[h_0, h]$  на основе уравнений погружения (6) стандартным образом [10] вычислялись сетки значений  $\{\omega(h + \Delta h, \omega_0^m)\}$ ,  $\{u_{h+\Delta h}^m\}$  для слоя  $[h_0, h + \Delta h]$ . Здесь  $\{\omega_0^m\}$  — заданная (вообще говоря подвижная и неравномерная) сетка начальных значений. Это позволило по сеточным значениям функций  $\omega(h, \omega_0)$  и  $u_h(\omega)$  вычислять с помощью интерполяции волновое поле на границе слоя для любых значений интенсивности падающей волны  $\omega$ . Знание же для любого слоя соответствующей сетки значений  $\{\omega_0\}$  делает возможным находить  $J(x; h, \omega)$  при конкретных  $\omega$  и  $x$  с помощью формулы (7).

Уравнения погружения (6) моделировались на ЭВМ с последующим вычислением статистических характеристик волнового поля по одной реализации на основе гипотезы эргодичности [8]:

$$\langle |R_\infty(\omega)|^2 \rangle = \frac{1}{L} \int_0^L dh |R_h(\omega)|^2, \quad (8)$$

$$\langle J^n(\xi, \omega) \rangle = \frac{1}{L} \int_0^L dx J^n(x; x + \xi, \omega), \quad n = 1, 2,$$

где точка  $x=0$  выбиралась достаточно далеко от левой границы  $h_0 < 0$  (когда распределение для  $J$  — стационарное). Длина реализации во всех выполненных расчетах выбиралась  $L=50$ , что, как показала серия численных экспериментов, обеспечило вполне надежную статистику.

4. Перейдем теперь к обсуждению результатов численных экспериментов. В первой серии экспериментов изучалась модель нелинейности  $\epsilon_1(J) = J$ , характерная для задач нелинейной оптики. На основе уравнений погружения эта модель для детерминированной задачи была подробно изучена в работах [3, 4, 6]. Отличительная особенность этой модели заключается в том, что решение волновой задачи единственное и гладкое при любой величине затухания  $\gamma$  (или  $\beta$ ). Однако учет флуктуаций диэлектрической проницаемости приводит к появлению неоднозначностей в решении задачи, появление которых существенно зависит от величины  $\beta$ .

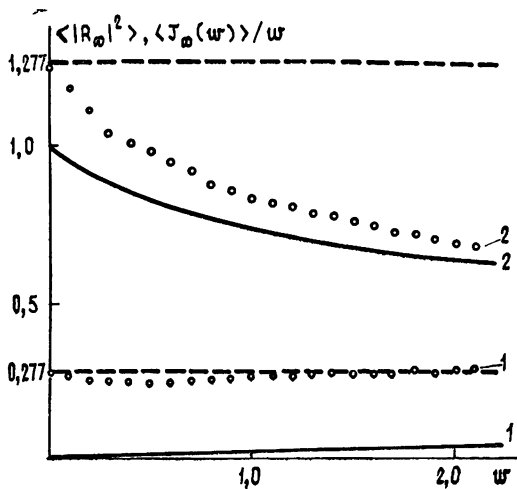


Рис. 1. Модель  $\epsilon = J + \epsilon_1(x) + i\gamma$ ,  $\beta = 1$  для задачи (2). Кружки 1 — моделирование  $\langle |R_\infty|^2 \rangle$ , 2 —  $\langle J_\infty \rangle / \omega$ . Кривые: 1 —  $|R_\infty|^2$ , 2 —  $J_\infty / \omega$  в детерминированной задаче  $\tilde{\epsilon}_1 \equiv 0$ .

На рис. 1 представлены результаты моделирования квадрата модуля коэффициента отражения  $\langle |R_\infty|^2 \rangle$  и нормированная на  $\omega$  интенсивность поля на границе  $\langle J_\infty(\omega) \rangle / \omega$  для полупространства неоднородной среды ( $h_0 \rightarrow -\infty$ ) в зависимости от интенсивности падающей волны. Параметр  $\beta$  выбран равным единице, что соответствует «умеренному» (см. [8, 9]) влиянию статистики в линейной задаче. Как видно из рис. 1, в рассматриваемом диапазоне  $\omega \leq 2$  среда с подобной нелинейностью слабо отражает падающую волну ( $|R_\infty|^2$  — достаточно мало), в соответствии с чем рассеивающие свойства среды, в основном,

определяются флуктуациями неоднородностей  $\tilde{\epsilon}_1$ , поэтому  $\langle |R_\infty(\omega)|^2 \rangle$  близко к диффузионному приближению. Напротив, для интенсивности поля на границе  $\langle J_\infty \rangle$  эффект нелинейности начинает проявляться уже для малых  $\omega$ , и с увеличением  $\omega$  величина  $\langle J_\infty(\omega) \rangle / \omega$  стремится

к значениям детерминированной задачи ( $\tilde{\epsilon}_1 \equiv 0$ ). Более полно влияние статистики и нелинейности можно проследить на рис. 2. Здесь приведены результаты моделирования  $\langle J(\xi, \omega) \rangle / \omega$  ( $\xi = h - x$ ) и соответствующих функций для детерминированной нелинейной задачи и линейной стохастической при малых значениях интенсивности падающей волны  $\omega = 0,2$  и больших значениях  $\omega = 2$ . При малых  $\omega = 0,2$  поле внутри среды в основном определяется флуктуациями среды и функция  $\langle J(\xi, \omega) \rangle / \omega$  ( $\omega = 0,2$ ) достаточно близка к кривой 3. Падение волны интенсивности  $\omega = 2$  приводит к осцилляциям функции  $\langle J(\xi, \omega) \rangle / \omega$  около кривой 2 с периодом  $T \sim 1/\alpha$  (за счет интерференции прямой и отраженной волн) вблизи границы и дальнейшему спаданию графика между кривыми 2 и 3. Это указывает, прежде всего, на тот факт, что в некотором слое среды (пока интенсивность волны в среде достаточно велика  $\langle J(\xi, \omega) \rangle \gg 1$ ) основную роль играют эффекты нелинейности,

статистика как бы «подавлена», что и приводит к интерференции в этом слое (см. [4]), а как только  $\langle J \rangle$  становится мало (волна в среде достаточно затухнет), то поведение интенсивности поля в среде начинает определяться целиком флуктуациями среды.

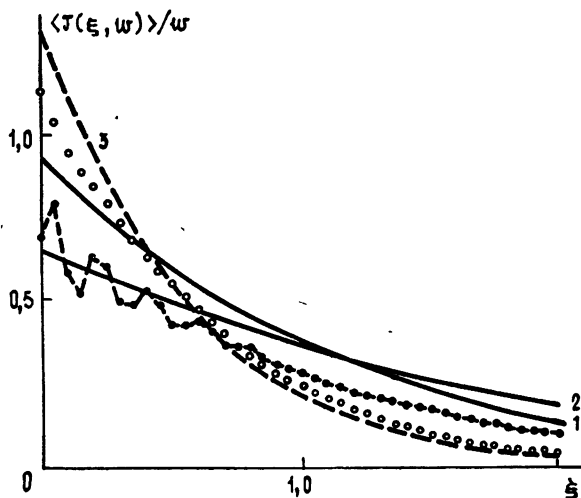


Рис. 2 Модель  $\varepsilon = J + \varepsilon_1(x) + i\gamma$ ,  $\beta=1$ . Кружки: светлые —  $\langle J(\xi, \omega) \rangle / \omega$  при  $\omega=0,2$ , черные — при  $\omega=2$ . Пунктирная линия —  $\langle J(\xi, \omega) \rangle / \omega$  при  $\omega \rightarrow 0$  (линейная задача). Кривые —  $J(\xi, \omega) / \omega$ , 1 —  $\omega=0,2$ , 2 —  $\omega=2$  в детерминированной задаче.

В выполненных расчетах, как это было отмечено выше, одновременно с вычислением статистических характеристик поля изучалось поведение  $\omega_h = \omega(h, \omega_0)$  как функции от  $\omega_0$  в каждом слое  $[h_0, h]$  (через шаг дискретизации  $\Delta h$ ), что позволило установить появление неоднозначностей в реализации поля уже для значения  $\beta=1$  (затухание  $\gamma = \beta/\alpha$ ). Например, при анализе 7000 слоев ( $L=70$ ) частота появления неоднозначностей\* около  $\omega=1$  была 0,05, а около  $\omega=2$  равна 0,1, при малых  $\omega \leq 0,3$  неоднозначности отсутствовали. Учитывая сравнительно редкое появление неоднозначностей в диапазоне  $\omega \leq 2$  (не более одного экстремума функции на 10 шагов по  $h$ ), для усреднения интенсивности поля по формуле (8) использовались значения  $J$  — первые по непрерывности функции  $\omega(h, \omega_0)$  от значения  $\omega=0$ . Очевидно, что любой другой алгоритм расчета практически не изменил бы графика функции  $\langle J(\xi, \omega) \rangle$ . Как показали численные эксперименты, уменьшение  $\beta$  приводит к существенному увеличению частоты появления неоднозначностей. Так, для  $\beta=0,08$  почти в каждом слое около любого значения  $\omega \geq 1$  было зафиксировано несколько семейств пересекающихся характеристик. Ввиду неоднозначности интерпретации расчет статистических характеристик волны в этом случае не проводился.

В следующей серии экспериментов изучалась модель неоднородностей  $\varepsilon = \varepsilon_1(x) + iJ$  (здесь  $x$  — размерное). Подобный пример хотя и не имеет прямого физического смысла, но для детерминированной нелинейной задачи обладает общими закономерностями распространения волн в ионосфере, а именно с некоторой глубины проникновения волны в слой  $\xi$ ,  $J(\xi, \omega)$  выходят на одну асимптотику  $\xi^{-1}$  независимо от интенсивности падающей на слой волны, т.е. имеет место хорошо известный эффект «насыщения» [11]. Нелинейность среды такого типа в отсутствие флуктуаций подробно обсуждалась в [6], было, в частности, установлено, что для слоя произволь-

\* Здесь под этим термином понимается отношение количества экстремумов функции  $\omega_h = \omega(h, \omega_0)$  в диапазоне значений  $\omega - 0,05 \leq \omega_h \leq \omega + 0,05$  к количеству слоев  $L/\Delta h$ , участвующих в усреднении.

ной толщины характеристики  $\omega(h, \omega_0)$  — гладкие монотонные функции.

Отметим, что для модели  $\varepsilon = \varepsilon_1(x) + iJ$  также полностью отсутствовали неоднозначности. На рис. 3 представлены рассчитанные по формуле (8) значения  $\langle |R_\infty|^2 \rangle$  и  $\langle J_\infty \rangle / \omega$  в зависимости от интенсивности падающей волны  $\omega$ . При бесконечно малой интенсивности  $\omega \ll 1$ , т.е. когда задача линейна, волна, падающая на полупространство, полностью отражается средой:  $\langle |R_\infty|^2 \rangle = 1$  и  $\langle J_\infty \rangle / \omega = 2$  за счет сильного рассеяния во флуктуирующей среде. Небольшое увеличение интенсивности ( $\omega \gtrsim 0,1$ ) качественно меняет отражающие свойства среды — функция  $\langle |R_\infty|^2 \rangle$  достаточно резко падает с ростом  $\omega$ , а при интенсивностях  $\omega \gtrsim 1$  отражающие свойства среды в основном определяются нелинейными эффектами. Заметим также, что в области значений  $\omega \leq 0,2$   $\langle |R_\infty(\omega)|^2 \rangle$  практически совпадает со значениями, вычисленными для линейной задачи (по формулам, приведенным в [8]), если только для линейной задачи формально полагать  $\beta = \alpha \omega$  (см. уравнение (6б)). Аналогичное поведение имеет место и для интенсивности поля на границе (см. рис. 3).

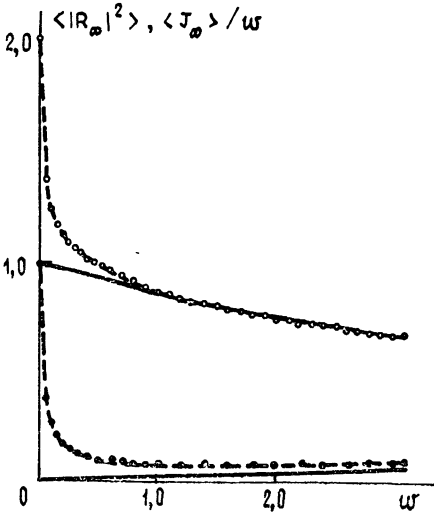


Рис. 3.

Рис. 3. Модель  $\varepsilon = \varepsilon_1(x) + iJ$ . Кружки — моделирование  $\langle |R_\infty|^2 \rangle$  (черные) и  $\langle J_\infty \rangle / \omega$  (светлые). Непрерывные кривые —  $|R_\infty|^2$  и  $J_\infty / \omega$  в отсутствие флуктуаций ( $\varepsilon_1 = 0$ ).

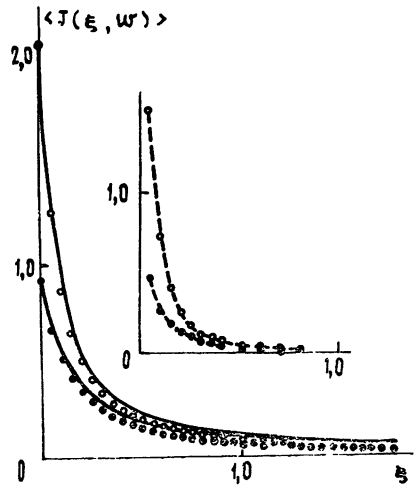


Рис. 4.

Рис. 4. Модель  $\varepsilon = \varepsilon_1(x) + iJ$ . Черные кружки  $\langle J(\xi, \omega) \rangle$  при  $\omega = 1$ , светлые —  $\omega = 3$ . Непрерывные кривые соответствуют  $J(\xi, \omega)$  при  $\omega = 1$  и  $\omega = 3$  в отсутствие флуктуаций ( $\varepsilon_1 = 0$ ). На врезке  $\langle J^2(\xi, \omega) \rangle$ .

На рис. 4 приведены результаты расчета средней интенсивности волны в полупространстве  $\langle J(\xi, \omega) \rangle$  для падающих волн  $\omega = 1$  и  $\omega = 3$ . Как и следовало ожидать, около границы ( $\xi \leq 0,1$ )  $\langle J(\xi, \omega) \rangle$  близки к решению детерминированной задачи, ибо затухание в среде достаточно велико и статистика проявляется слабо. Однако при достаточно глубоком проникновении волны в слой (когда  $\langle J \rangle \ll 1$ ) поведение поля в среде в основном должно определяться рассеянием волны на случайных неоднородностях и эффекты, определяемые нелинейностью, казалось бы, должны отсутствовать. В действительности оказалось, что при глубоком проникновении волны в слой  $\langle J(\xi, \omega) \rangle$  спадают несколько быстрее детерминированного решения, но, как показали численные расчеты (см. рис. 4), в стохастической задаче сохраняется существенно нелинейное свойство детерминированной задачи — эффект «насыщения», кривые  $\langle J(\xi, \omega) \rangle$  выходят на одну зависимость, примерно описываемую законом  $\text{const}/\xi^\lambda$ , где  $\lambda \approx 2$ . На врезке рис. 4 представлены соответствующие функции  $\langle J^2(\xi, \omega) \rangle$  для  $\omega = 1$  и  $\omega = 3$ . За-

метим также, что вторые моменты интенсивности  $\langle J^2(\xi, \omega) \rangle$  заметно отличаются от функций  $\{\langle J(\xi, \omega) \rangle\}^2$  (например,  $\langle J^2(\xi, \omega) \rangle$  больше  $\{\langle J(\xi, \omega) \rangle\}^2$  в 2,5 раза при  $\xi=1,5$  и  $\omega=1$ ). Это указывает на существенный вклад статистики в решение задачи.

5. Выше на примере простейших волновых задач показана возможность и результативность численного моделирования распространения волн в нелинейных средах со случайными неоднородностями на основе уравнений погружения с использованием гипотезы эргодичности. С помощью численного расчета удалось, в частности, установить, что характер поведения моментов интенсивности в основном определяется нелинейными эффектами, если только интенсивность волны в слое достаточно велика; влияние статистики становится существенным при достаточно глубоком проникновении волны в слой неоднородной среды. При этом для некоторых типов нелинейности возможны ситуации, когда нелинейные эффекты определяют характер поведения энергетических характеристик и при малой интенсивности волны, хотя рассеяние в среде связано с наличием флуктуаций.

Развитый подход, вообще говоря, не предполагает конкретизацию характера случайностей параметров среды и вида нелинейностей, что позволяет использовать конкретные реализации, полученные из натуральных данных.

Автор выражает благодарность В. И. Кляцкину за постановку задачи и полезные обсуждения результатов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Басс Ф. Г., Гуревич Ю. Г. Горячие электроны и сильные электромагнитные волны в плазме полупроводников и газового разряда. — М.: Наука, 1975.
2. Бабкин Г. И., Кляцкин В. И. — ЖЭТФ, 1980, 79, № 3(9), с. 817.
3. Кляцкин В. И., Козлов В. Ф., Ярошук Е. В. — ЖЭТФ, 1982, 82, № 2, с. 386.
4. Кляцкин В. И., Ярошук Е. В. — Изв. вузов — Радиофизика, 1985, 28, № 3, с. 320.
5. Кляцкин В. И. Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах — М.: Наука, 1980.
6. Кляцкин В. И. Препринт ИРЭ АН СССР № 16(388).—М., 1984.
7. Абрамович Б. С., Саичев А. И. — Изв. вузов — Радиофизика, 1979, 22, № 11, с. 1334.
8. Кляцкин В. И., Ярошук И. О. — Изв. вузов — Радиофизика, 1983, 26, № 10, с. 1241.
9. Бабкин Г. И., Кляцкин В. И., Козлов В. Ф., Ярошук Е. В. — Изв. вузов — Радиофизика, 1981, 24, № 8, с. 952.
10. Ярошук И. О. — ЖВММФ, 1984, 24, № 11, с. 1748.
11. Гуревич А. В., Шварцбург А. Б. Нелинейная теория распространения радиоволн в ионосфере — М.: Наука, 1973.

Тихоокеанский океанологический институт  
ДВНЦ АН СССР

Поступила в редакцию  
18 февраля 1986 г.

#### NUMERICAL SOLUTION ON ONE-DIMENSIONAL PROBLEM OF SELF-ACTION OF A WAVE IN A STOCHASTICAL NONLINEAR MEDIUM

*I. O. Yaroshchouk*

The problem of normal incidence of a plane monochromatic wave on nonlinear medium half-space with random inhomogeneities is considered. On the basis of invariant imbedding equations the wave field statistical characteristics are simulated numerically for the simplest types of nonlinearity characteristic of nonlinear optics and ionosphere physics problems.