

УДК 621.373.12.532

ДИНАМИКА КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИХ ВОЛНОВЫХ ДВИЖЕНИЙ
В ОДНОНАПРАВЛЕННЫХ ЦЕПОЧКАХ ГЕНЕРАТОРОВ

И. С. Арансон, Н. Н. Веричев

Получено уравнение, описывающее цепочку последовательно включенных транзисторных автогенераторов. Исследована устойчивость периодических и квазипериодических режимов. Изучена возможность управления различными режимами колебаний цепочки при помощи периодических внешних воздействий. Показано, что переход к хаосу осуществляется через последовательное разрушение вдоль цепочки двух- и трехчастотных квазипериодических волновых движений.

Одной из наиболее сложных проблем нелинейной физики остается вопрос о пространственном развитии возмущений в полуограниченных диссипативных неравновесных средах. Определенные успехи в этой области связаны с анализом модельных систем, представляемых в виде цепочек тождественных дискретных элементов без глобальных обратных связей — сносных или потоковых [1, 2]. В последнее время к подобным системам проявляется также интерес в связи с использованием кольцевых автогенераторов, применяемых в фазированных антенных решетках, в преобразователях и умножителях частоты и т. д. [3].

В работе [4] предложены уравнения, описывающие такую взаимную полубесконечную «среду». Предполагая «среду» одномерной и учитывая лишь линейные связи между соседними элементами, исходные уравнения запишем в виде

$$dU_j/dt = F(U_j, \mu) + \hat{G}(U_j - U_{j-1}) + \hat{X}(U_{j-1} + U_{j+1} - 2U_j). \quad (1)$$

Здесь $dU_j/dt = F(U_j, \mu)$ — уравнения, описывающие динамику одного элемента (точечная система), μ — параметр, матрицы \hat{G} , \hat{X} характеризуют соответственно сносную и диффузионную связь между элементами. Физическая природа вектора U_j может быть самая различная.

В настоящей работе на примере цепочки транзисторных автогенераторов исследуется динамика волновых возбуждений, предшествующих хаосу, — периодических волн синхронизации и квазипериодических волн биений, устойчивость периодических и квазиопериодических режимов, рассматривается возможность управления различными состояниями цепочки с помощью внешних периодических воздействий, подаваемых в первый генератор (на границу «среды»).

1. Вывод основного уравнения. Рассмотрим модельную физическую систему, описываемую частным случаем уравнения (1). Она представляется цепочкой последовательно соединенных транзисторных генераторов (рис. 1). В каждом генераторе M — величина взаимной индукции, $C(U) = C_0 \left(1 + \frac{q_1}{2} U + \frac{q_2}{3} U^2 + \dots \right)$ — нелинейная емкость колебательного контура и переходов транзистора, L , L_1 — индуктивности колебательного контура и цепи обратной связи, R_b , R_e — внутреннее сопротивление переходов эмиттер — база и эмиттер — коллектор, C_c , R_c — параметры цепи связи, R_n — сопротивление нагрузки. Для простоты анализа предположим, что на рабочей частоте ω реактивное сопротивление L_1 мало по сравнению с R_n .

Запишем для токов I_L , I_C , I_h , I_{R_b} , I_{C_c} через соответствующие элементы схемы законы Кирхгофа и самоиндукции:

$$I_{C_j} + I_{R_{b_j}} + I_{L_j} = I_{C_{j-1}}, \quad U_j = d(LI_{L_j} + MI_{L_{j-1}})/dt,$$

$$I_{L_j} = I_{h_j} - I_{C_j}, \quad I_{C_j} = d(C(U_j)U_j)/dt, \quad I_{C_{j-1}} = (U'_{j-1} - U_j)/R_c +$$

$$+ C_c d(U'_{j-1} - U_j)/dt,$$

где U_j , U'_j — напряжения на емкости C и на R_n j -го генератора. Допустим, что в рабочей точке нелинейная зависимость тока коллектора I_{h_j} от напряжения эмиттер — база U_j имеет вид

$$I_{h_j} = SU_j + h_1 U_j^2/2 + h_2 U_j^3/3, \quad (3)$$

где $S = K/R_b$, K — коэффициент усиления транзистора по току, h_1 , h_2 — коэффициенты нелинейности. Как известно [5], $U'_j = \bar{K}U_j$, где $\bar{K} = KR_n/(R_b + (1+K)R_e)$ — коэффициент усиления транзистора по напряжению. Из соотношений (2), (3) получаем следующее уравнение:

$$d^2(C(U_j)U_j - C_c(\bar{K}U_{j-1} - U_j - (M/L)(\bar{K}U_j - U_{j+1}))/dt^2 + U_j/L =$$

$$= d[-U_j/R_b + (M/L)I_h(U_j) +$$

$$+ (\bar{K}U_{j-1} - U_j - (M/L)(\bar{K}U_j - U_{j+1}))/R_c]/dt.$$

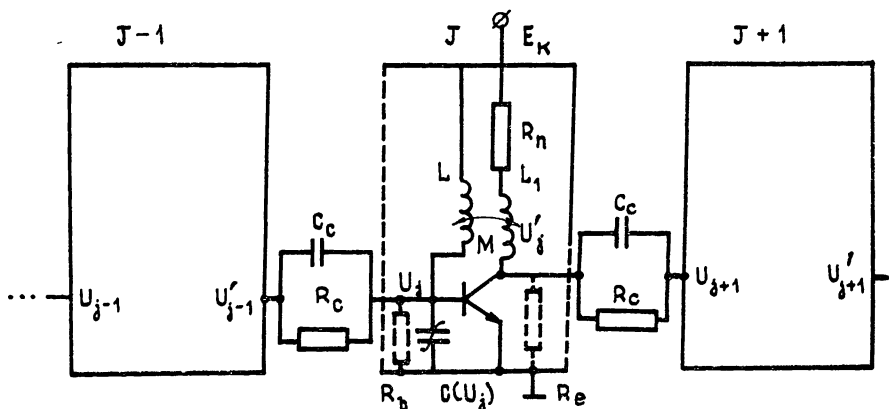


Рис. 1. Схема цепочки последовательно соединенных транзисторных генераторов.

Воспользуемся методом усреднения, предполагая величины $(M/L) \times \times S - 1/R_b$, $q_{1,2}$, $h_{1,2}(1/R_c)$ достаточно малыми. Соответствующее укороченное уравнение для комплексных амплитуд $b_j(t)$, где $U_j = b_j(t) \exp(i\omega t) + \text{к. с.}$, $\omega = (C_0 L)^{-1/2}$, имеет вид

$$2db_j/dt = A_1 b_j - A_2 |b_j|^2 b_j + A_3 b_{j-1} + A_4 b_{j+1}, \quad (5)$$

где

$$A_1 = MS\omega^2 \rightarrow (1/R_b + (1/R_c - iC_c\omega)(1 + M\bar{K}^{-1}L))/C_0,$$

$$A_2 = Mh_2\omega^2 - i\omega q_2, \quad A_3 = \bar{K}(1/R_c + i\omega C_c)/C_0, \quad A_4 = M\omega^2(1/R_c + i\omega C_c).$$

Как известно, для коэффициента усиления транзистора по напряжению выполнено неравенство $\bar{K} \gg 1$. При этом $A_4/A_3 \sim \bar{K}^{-1} \ll 1$. Это очень важное условие позволяет пренебречь влиянием $j+1$ -го генератора на j -й генератор и рассматривать в дальнейшем динамику системы (5) при однонаправленном типе связи между генераторами. Замена переменных $a_j = b_j(\text{Re}(A_2)/\text{Re}(A_1))^{1/2} \exp[-i(\text{Im}(A_1)t + j \arg(A_2))]$, $t \rightarrow t(\text{Re}(A_1))^{1/2}/2$, $\beta = \text{Im}(A_2)/\text{Re}(A_2)$, $g = A_3/\text{Re}(A_1)$ приводит (5) к каноническому виду:

$$da_j/dt = a_j - (1 - i\beta) a_j |a_j|^2 + g a_{j-1}. \quad (6)$$

2. **Стационарные волны синхронизации.** Рассмотрим ситуацию, когда в первый генератор цепочки, описываемой уравнениями (6), подается управляющее воздействие вида $a_0 = A_0 \exp(i\omega_0 t)$, где ω_0 и A_0 — частота и амплитуда воздействия*. Сделав замену переменных $b_j = a_j \exp(-i\omega_0 t)$, перепишем (6) в виде

$$db_j/dt = (1 - i\omega_0) b_j - (1 - i\beta) b_j |b_j|^2 + g b_{j-1}, \quad b_0 = A_0. \quad (7)$$

Режиму синхронизации всей цепочки на частоте внешнего воздействия ω_0 соответствует состояние равновесия (7), координаты которого определяются из рекуррентного соотношения

$$b_j^0 (1 - i\omega_0 - (1 - i\beta) |b_j^0|^2) = -g b_{j-1}^0. \quad (8)$$

Соотношение (8) можно интерпретировать как отображение по номеру j координат состояний равновесия точечных систем. Из (8) легко получить два одномерных отображения для интенсивности $I_j = |b_j^0|^2$ и фазы $\varphi_j = \arg(b_j^0)$ режима синхронизации при каждом j :

$$I_j (1 + \omega_c^2) + (1 + \beta^2) I_j^2 - 2(1 + \beta\omega_0) I_j = g^2 I_{j-1}, \quad I_0 = |A_0|^2; \quad (9)$$

$$\varphi_j = \varphi_{j-1} + \arctg[(\omega_0 - \beta I_j)/(1 - I_j)], \quad \varphi_0 = \arg(A_0). \quad (9a)$$

Прежде чем заняться анализом этих отображений, обратим внимание на замечательное свойство (7), обнаруженное в [4]. Для этого линеаризуем (7) вблизи состояния равновесия, определяемого (8), в результате чего получим линейное уравнение с постоянными коэффициентами

$$dx_j/dt = [1 - i\omega_0 - 2(1 - i\beta) I_j] x_j - (1 - i\beta) (b_j^0)^2 x_j^* + g x_{j-1}. \quad (10)$$

Матрица (10) — блочно-треугольная, поэтому характеристические показатели (10) совпадают с показателями точечных систем**

$$dx_j/dt = [1 - i\omega_0 - 2(1 - i\beta) I_j] x_j - (1 - i\beta) (b_j^0)^2 x_j^*, \quad (11)$$

которые задаются выражением

$$\lambda_{1,2j} = 1 - 2I_j \pm [(1 + \beta^2) I_j^2 - (\omega_0 - 2\beta I_j)^2]^{1/2}. \quad (12)$$

Таким образом, (12) при каждом j определяет устойчивость соответствующей точечной системы. Режим синхронизации всей цепочки поэтому будет устойчив лишь тогда, когда устойчивы все точечные системы.

Исследуем теперь отображение (8). Очевидно, для нас представляет интерес лишь отображение для интенсивностей (9), поскольку фазы не входят в выражения (12).

На рис. 2 приведены графики отображения (9) $I_j = F(I_{j-1})$ для различных значений параметров ω_0 , g , β . Это отображение в зависимости от значений параметров имеет следующие неподвижные точки:

1) $I_0^0 = 0$. Эта неподвижная точка существует при любых значениях параметров. Более того, она единственная, если а) $g^2 < (\omega_0 - \beta)^2 \times (1 + \beta^2)^{-1}$ (рис. 2а, кривая 1) или б) $1 + \beta\omega_0 < 0$, $g^2 < 1 + \omega_0^2$.

2) Две неподвижные точки: $I_0^0 = 0$ и $I_1^0 = \{1 + \beta\omega_0 + [(1 + \beta\omega_0)^2 - (1 + \beta^2)(1 + \omega_0^2 - g^2)]^{1/2}\} / (1 + \beta^2)$, если $g^2 > 1 + \omega_0^2$, $g^2 > (\omega_0 - \beta)^2 \times (1 + \beta^2)^{-1}$ (рис. 2а, кривые 2, 3).

* Задачу можно поставить иначе: считать цепочку автономной ($A_0 = 0$), но в первом генераторе задать отличные от последующих параметры g , β .

** Это свойство физически очевидно: слагаемые $x_{j-1}(t)$ играют в точечных системах роль внешних сил и не могут дать дополнительного экспоненциального роста возмущений $x_j(t)$.

3) Три неподвижные точки: $I_0^0 = 0$ и $I_{1,2}^0 = \{1 + \beta\omega_0 \pm [(1 + \beta\omega_0)^2 - (1 + \beta^2)(1 + \omega_0^2 - g^2)]^{1/2}\} / (1 + \beta^2)$, если $1 + \omega_0^2 \geq g^2 \geq (\omega_0 - \beta)^2 / (1 + \beta^2)$, $1 + \beta\omega_0 > 0$ (рис. 2б, кривые 1—3).

Из (12) легко получить условия для устойчивости режима синхронизации при каждом j : $\text{Re} \lambda_{1,2j} \leq 0$, если $I_j \geq 1/2$ и $dI_j/dI_{j-1} > 0$ *. Сформулируем теперь требования, необходимые для того, чтобы во всей цепочке был устойчив режим синхронизации на частоте внешнего воздействия ω_0 . Для этого должны быть удовлетворены следующие условия: а) параметры g, β, A_0 должны быть такими, чтобы неподвижная точка I_1^0 , принадлежащая верхней ветви отображения (9), удовлетворяла неравенству $I_1^0 > 1/2$; б) амплитуда управляющего воздействия A_0 должна быть больше пороговой A_p , где $|A_p|^2 = \min(I_1^{*2}, I_2^{*2})$, $I_1^* = F^{-1}(1/2)$, $dF(I_2^*)/dI = \infty$ (рис. 2).

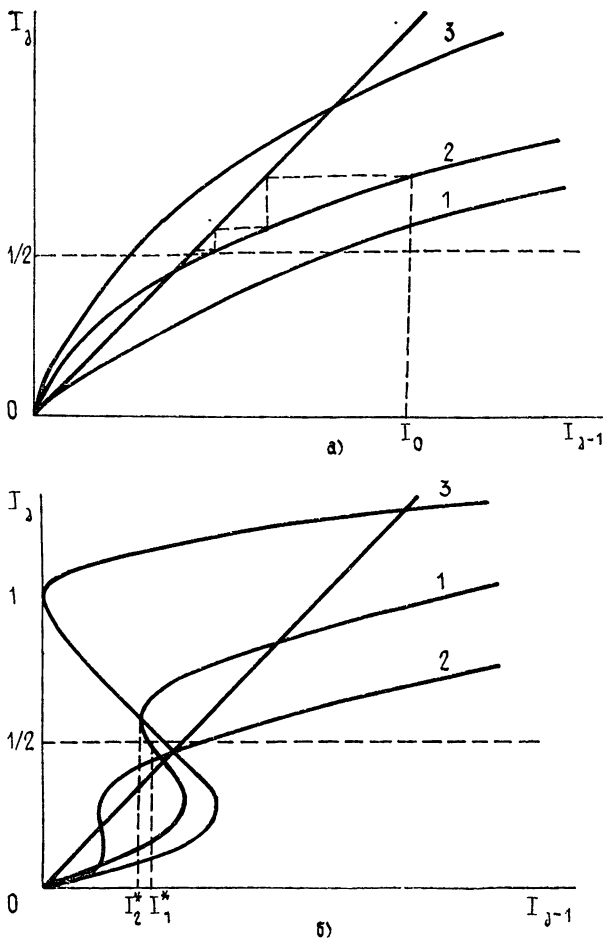


Рис. 2. Графики отображения (9) для различных значений параметров.

При выполнении этих условий в цепочке генераторов реализуется устойчивый режим синхронизации на частоте управляющего воздействия ω_0 в виде дискретной стационарной волны с монотонно изменяющейся вдоль j интенсивностью (при $j \rightarrow \infty$ интенсивность I_j стремится к предельному значению I_1^0). Такое решение будем называть стационарной волной синхронизации.

* Ветвь с отрицательным наклоном соответствует седловым состояниям равновесия, а ветвь с $I_j < 1/2$ — неустойчивым узлам или фокусам

Как следует из условий устойчивости и рис. 2, наиболее легко синхронизация осуществляется на частотах порядка β , т.е. на частоте автоколебаний точечной системы. При $\omega_0 \rightarrow \beta$ пороговое значение A_p стремится к нулю. Более того, в [4] доказано, что при $\omega_0 = \beta$ режим синхронизации на частоте β глобально устойчив при любых значениях параметров β , g , A_0^* . Если же $\omega_0 \neq \beta$, то существуют области параметров, в которых режим синхронизации неустойчив. Однако, если значение A_0 достаточно велико, несколько первых итераций отображения (9) будут удовлетворять условиям устойчивости даже в тех случаях, когда при $j \gg 1$ режим синхронизации неустойчив (см. рис. 2а, кривая 2). Это означает, что управляющее воздействие большой амплитуды вызовет синхронизацию первых нескольких генераторов. Но, начиная с некоторого номера j' ($j' < 1/2$), синхронизация сорвется и в цепочке реализуется какой-либо более сложный режим.

3. Волны стационарных биений. В этом разделе рассматривается случай $\omega_0 \neq \beta$. Как следует из предыдущего анализа, решение в виде волны синхронизации, распространяющейся от начала цепочки, может быть неустойчивым по двум причинам: а) амплитуда A_0 меньше пороговой (неустойчивость типа 1); б) неустойчив предельный при $j \rightarrow \infty$ режим синхронизации, т.е. $I_1^0 < 1/2$ (неустойчивость типа 2). В обоих этих случаях из одночастотного воздействия на частоте ω_0 возникают либо сразу в первом, либо в каком-то j' -генераторе квазипериодические двухчастотные биения, которые эволюционируют вдоль цепочки. Для удобства будем различать биения по типу неустойчивости, которая их вызывает: биения типа 1 и биения типа 2.

Исследуем сначала биения типа 1. Для простоты предположим $|A_0|^2 = \varepsilon^2 \ll |A_p|^2$. Сделав замену переменных $V_j = b_j \exp(-i\bar{\omega}t)$, где $\bar{\omega} = \omega_0 - \beta$, перепишем (7) в виде

$$dV_j/dt = (1 - i\beta)(V_j - V_j|V_j|^2) + gV_{j-1}, \quad V_0 = A_0 \exp(i\bar{\omega}t). \quad (13)$$

При $\varepsilon = 0$ (13), согласно [4], имеет глобально устойчивое решение в виде волны синхронизации на частоте β : $V_j(t) = U_j^0$, где U_j^0 удовлетворяет (9) с $\omega_0 = \beta$. При $\varepsilon \neq 0$ естественно искать решение в виде

$$V_j(t) = U_j^0 + \varepsilon W_j(t) + O(\varepsilon^2), \quad (14)$$

где $W_j(t)$ — поправка к решению, обусловленная внешним воздействием. Рассмотрим условия, при которых эта поправка не нарастает при $j \rightarrow \infty$. Легко убедиться, что при $j=1$ $W_1(t) = A_1 \exp(i\bar{\omega}t) + B_1 \exp(-i\bar{\omega}t) + O(\varepsilon)$. Предположим теперь, что и при $j \neq 1$ решение представляется в виде

$$V_j(t) = U_j^0 + \varepsilon [A_j \exp(i\bar{\omega}t) + B_j \exp(-i\bar{\omega}t)] + O(\varepsilon^2). \quad (15)$$

В общем случае такому решению в исходной системе (6) соответствует волна двухчастотных биений. Подставляя (15) в (13), в первом по ε приближении для A_j , B_j получим линейное отображение по номеру j . Поскольку при $j \rightarrow \infty$ $|U_j^0|^2 \rightarrow I^0$, то для простоты значения $|U_j^0|$ в этом отображении будем считать постоянными и равными I_1^0 . Тогда при каждом j A_j , B_j задаются выражением

$$\begin{pmatrix} A_j \\ B_j \end{pmatrix} = (D_1)^j C_1 + (D_2)^j C_2,$$

где $C_{1,2}$ — постоянные вектора, $D_{1,2}$ — характеристические показатели матрицы отображения, причем $D_{1,2} = g/(\lambda_{1,2} - i\bar{\omega})$, $\lambda_{1,2} = \lambda_{1,2j}$, $j \rightarrow \infty$.

* Именно эта ситуация реализуется в автономной цепочке ($A_0 = 0$), поскольку роль управляющего воздействия в этом случае играет сигнал с первого генератора, так как при $t \rightarrow \infty$ $a_1(t) = \exp(i\beta t)$.

Если $|D_{1,2}| < 1$, то решение вида (15) остается справедливым при сколь угодно больших j , а поправка $W_j(t)$ монотонно уменьшается с ростом j . Это означает, что достаточно далеко от начала цепочки система выходит на режим синхронизации на частоте β , а слабое управляющее воздействие просто «игнорируется».

Значительно более сложным является случай, когда один из показателей $|D_{1,2}| > 1$ *. В этой ситуации поправка нарастает вдоль j . Такую неустойчивость, по аналогии с распределенными системами, естественно назвать модуляционной конвективной (в дальнейшем просто конвективной). Очевидно, что при достаточно больших j решение вида (15) станет несправедливым, поскольку $W_j(t) \sim 1/\varepsilon$.

Выделим область параметров, в которой возможна такая конвективная неустойчивость. Для этого $\lambda_{1,2}$ должны быть комплексными и удовлетворять условию $|g/\text{Re}(\lambda_{1,2})| > 1$ ** . Представляя $\lambda_{1,2}$ в виде $\lambda_{1,2} = p \pm i\Omega$, где $p = 1 - 2I_1^0$, $(\Omega)^2 = \beta^2(1 - 2I_1^0)^2 - (1 + \beta^2)(I_1^0)^2$, из условия $|g/p| > 1$ имеем

$$|g| > [1 - 2/(1 + \beta^2)^{1/2}]^{-1} \approx 1 + 2/|\beta| + O(\beta^{-2}), \quad \beta^2 > 3. \quad (16)$$

Кроме того, для комплексности $\lambda_{1,2}$ необходимо выполнение условия

$$|g| > (1 + \beta^2)^{1/2} [(1 + \beta^2)^{1/2} - \beta] / [2\beta - (1 + \beta^2)^{1/2}] \approx 2/|\beta| + O(\beta^{-2}).$$

Однако это условие избыточное, поскольку при выполнении (16) оно удовлетворяется автоматически. Таким образом, в цепочке, описываемой уравнением (13), возможна конвективная неустойчивость, если величина связи g удовлетворяет (16), а частота управляющего воздействия $\bar{\omega}$ попадает в интервалы $[-\Omega - \bar{\Omega}, -\Omega + \bar{\Omega}]$; $[\Omega - \bar{\Omega}, \Omega + \bar{\Omega}]$, где $\Omega = (g^2 - p^2)^{1/2}$. Более того, поскольку система (13) нелинейна, усиливаться вдоль цепочки могут также гармоники $\bar{\omega}$, попадающие в полосу конвективной неустойчивости.

Исследуем теперь биения типа 2. Чтобы воспользоваться асимптотическими методами, рассмотрим область параметров g, β, ω_0 , в которой $I_1^0 = 1/2 - \varepsilon$, $0 < \varepsilon \ll 1$ (рис. 2б, кривая 2). Согласно (12) в этом случае $\lambda_{1,2} = 2\varepsilon \pm i\Omega'$, $(\Omega')^2 = (\omega_0 - 2\beta I_1^0)^2 - (1 + \beta^2)(I_1^0)^2$. Это означает, что при j волна синхронизации колебательно неустойчива в каждой точечной системе. Такую неустойчивость по аналогии с распределенными системами будем в дальнейшем называть абсолютной.

Выберем величину A_0 из условия $|A_0|^2 > 1/2$. Тогда в первых j' -генераторах устойчив режим синхронизации на частоте ω_0 . Но, начиная с некоторого j' , через бифуркацию Хопфа синхронизация теряет устойчивость и сменяется режимом биений с частотой $\Omega^* \approx \Omega'$, $(\Omega^*)^2 = (\omega_0 - 2\beta I_{j'})^2 - (1 + \beta^2)(I_{j'}^0)^2$, $I_{j'} < 1/2$ (в [4] такой переход назван пространственной бифуркацией). Воспользуемся методом усреднения и получим уравнения для комплексных амплитуд биений. Представим для этого при $j \gg j'$ решение (7) в виде

$$b_j(t) = b^0 + (1 + iB)z_j \exp(i\Omega^*t) + (1 + iB^*)z_j \exp(-i\Omega^*t), \quad (17)$$

где $b^0 = b_j^0$ при $j \rightarrow \infty$, $B = (I_1^0 + i\Omega') / (\omega_0 - \beta I_1^0)$ — компонента собственного вектора линеаризованной системы (7). Будем считать переменные z_j медленными, тогда после подстановки (17) в (7) и усреднения получим

$$dz_j/dt = (2\varepsilon_j - i(\Omega^* - \Omega'))z_j - (2(1 + |B|^2) - i\beta(3(1 + |B|^2)^2(i(B - B^*) - i(B - B^*)))z_j|z_j|^2 + gz_{j-1} + O(\varepsilon^2), \quad (18)$$

* Условие $|D_{1,2}| > 1$ выполняется только для одного показателя, так как $|D_1 D_2| < 1$.

** Легко убедиться, что $|g/\lambda_{1,2}| < 1$. Следовательно, в случае действительных $\lambda_{1,2}$ выполнено $|g/(\lambda_{1,2} - i\bar{\omega})| < |g/\lambda_{1,2}| < 1$.

$$z_j^2 = I_j' - I_1^0, \quad \varepsilon_j = (1 - 2I_j)/2.$$

Поскольку ε_j меняется в малых пределах ($0 < \varepsilon_j \ll 1$, $\varepsilon_j \rightarrow \varepsilon$ при $j \rightarrow \infty$), будем считать $\varepsilon_j = \varepsilon$. Уравнение (18) замечательно тем, что после замен $b_j' = z_j / ((1 + |B|^2)/2\varepsilon)^{1/2}$, $g' = g/2\varepsilon$, $t' = 2\varepsilon t$, $\omega_0' = (\Omega^* - \Omega')/2\varepsilon$, $|A_0|^2 = (1 + |B|^2)^{1/2}(I_j' - I_1^0)/2\varepsilon$, $\beta' = \beta(3(1 + |B|^2) \times (i(B - B^*))^{-1} - i(B - B^*) / (1 + |B|^2) / 2$ оно в точности совпадает с исходным уравнением (7). Это означает определенное подобие (скейлинг) таких пространственных бифуркаций, т.е. весь предыдущий анализ волн синхронизации, биений типа 1 и 2, можно без изменений повторить вновь по отношению к двух- и трехчастотным квазипериодическим режимам.

Как следует из (19), параметр связи g после пространственной бифуркации увеличивается в $(2\varepsilon)^{-1}$ раз. Это приводит к резкому расширению полосы частот для конвективной неустойчивости. Поэтому биения типа 2 оказываются очень чувствительными к различным малым возмущениям, обусловленными, например, поправками следующих приближений метода усреднения. Следовательно, управление биениями типа 2 затруднено сильной конвективной неустойчивостью.

4. Иерархия пространственных неустойчивостей при переходе к хаосу в цепочке генераторов. Полученные в предыдущих разделах результаты о развитии квазипериодических биений из волн синхронизации позволяют также качественно предсказать типичные пути переходов к хаосу вдоль системы.

Рассмотрим вначале ситуацию, когда на границе цепочки возникают биения типа 1 и их частота ω лежит в полосе конвективной неустойчивости. В этом случае амплитуда биений будет нарастать примерно по экспоненте вплоть до номера j^* , пока ее величина не станет порядка единицы. Естественно ожидать, что вслед за этим с биениями произойдут качественные перестройки. Действительно, численный эксперимент (рис. 3) показывает, что при j^* происходит пространственная бифуркация Хопфа — в спектре появляется третья несоизмеримая частота. Это явление мы можем интерпретировать как вторичную абсолютную неустойчивость. Далее вдоль цепочки происходит конвективное усиление спектральных компонент на этой частоте и комбинационных (вторичная конвективная неустойчивость) до тех пор, пока при номере j^0 не возникнет через очередную пространственную бифуркацию хаос.

Аналогично происходит эволюция биений типа 2. Рассмотрим случай $|A_0|^2 > 1/2$, т.е. в первых генераторах устойчив режим синхронизации. При $j = j'$ через пространственную бифуркацию Хопфа рождаются биения с базисными частотами ω_0, Ω^* . Как уже ранее говорилось, при $\varepsilon \ll 1$ пространственные бифуркации подчиняются соотношениям подобия (скейлинг) (см. (18), (19)). Поэтому в усредненной по ω_0 системе родившиеся при $j = j'$ биения играют для последующих генераторов роль управляющего воздействия с амплитудой $|A_0|^2 \sim (I_j' - I_0)/2\varepsilon$ и частотой $\omega_0' = (\Omega' - \Omega^*)/2\varepsilon$. Если такое воздействие может привести к синхронизации в усредненной системе на частоте Ω^* , то в исходной системе (7) будет распространяться от j' волна стационарных двухчастотных биений. В противоположном случае в $j'+1$ -генераторе усредненной системы рождаются биения типа 1, которым в исходной будут соответствовать трехчастотные колебания с частотами $\omega_0, \Omega', \Omega^*$. Более того, для спектральных компонент с частотами, кратными $\Omega' - \Omega^*$, будет заведомо выполнено условие конвективного усиления, так как в усредненной системе $g' \gg 1$. Нарастание вдоль цепочки таких трехчастотных биений приводит при $j = j^0$ к появлению хаотического режима. Эти предположения также подтвердились в численном эксперименте (рис. 4).

В работе исследованы квазипериодические режимы различной сложности. Несмотря на упрощенность постановки выявлены основные

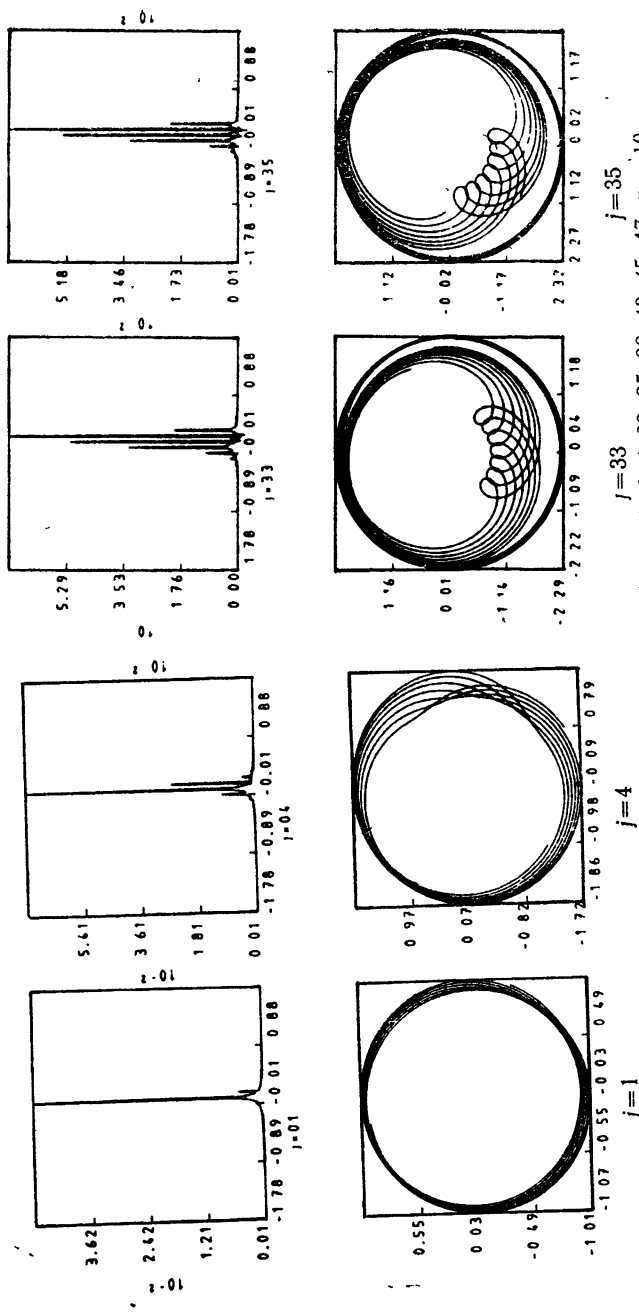


Рис. 3. Спектры мощности и проекции траектории $a_j(t)$ для $j=1, 4, 33, 35, 38, 40, 45, 47, \omega_0=10, \beta=3, g=5, A_0=1/2$. Двухчастотные биения типа I возникают при $j=1$ и переходят в трехчастотные при $j=38$. При $j=47$ наблюдается развитый хаос.

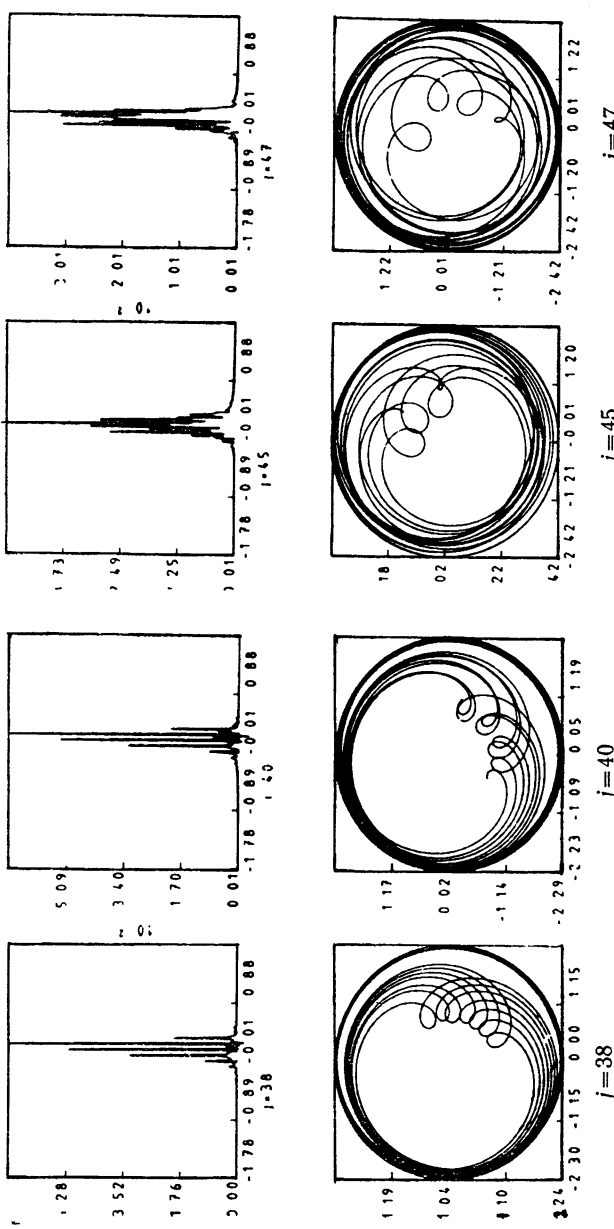


Рис. 3. Спектры мощности и проекции траектории $a_j(t)$ для $j=1, 4, 33, 35, 38, 40, 45, 47$, $\omega_0=10$, $\beta=3$, $g=5$, $A_0=1/2$. Двухчастотные биения типа 1 возникают при $j=1$ и переходят в трехчастотные при $j=38$. При $j=47$ наблюдается развитый хаос.

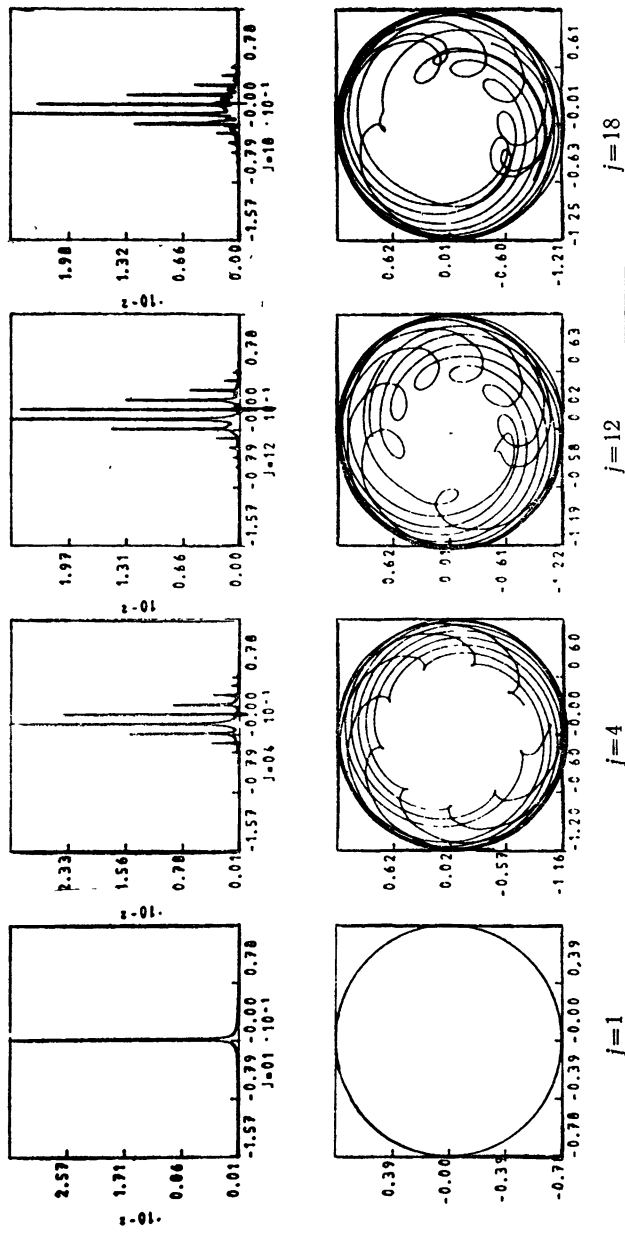


Рис. 4. Спектры мощности и проекции траектории $a_1(t)$ для $j = 1, 4, 12, 18, 24, 30, 45, 50, \omega_0 = 1, A_0 = 1, g = 0,7, \beta = 3$. Параметры выбраны таким образом, что $\varepsilon = 0,01$. Режим синхронизации на частоте ω_0 устойчив до $j = 3$. Двухчастотные бениа 2 возникают при $j = 4$. При $j = 12$ рождаются трехчастотные бениа, которые при $j = 24$ разрушаются и переходят в хаотические колебания.

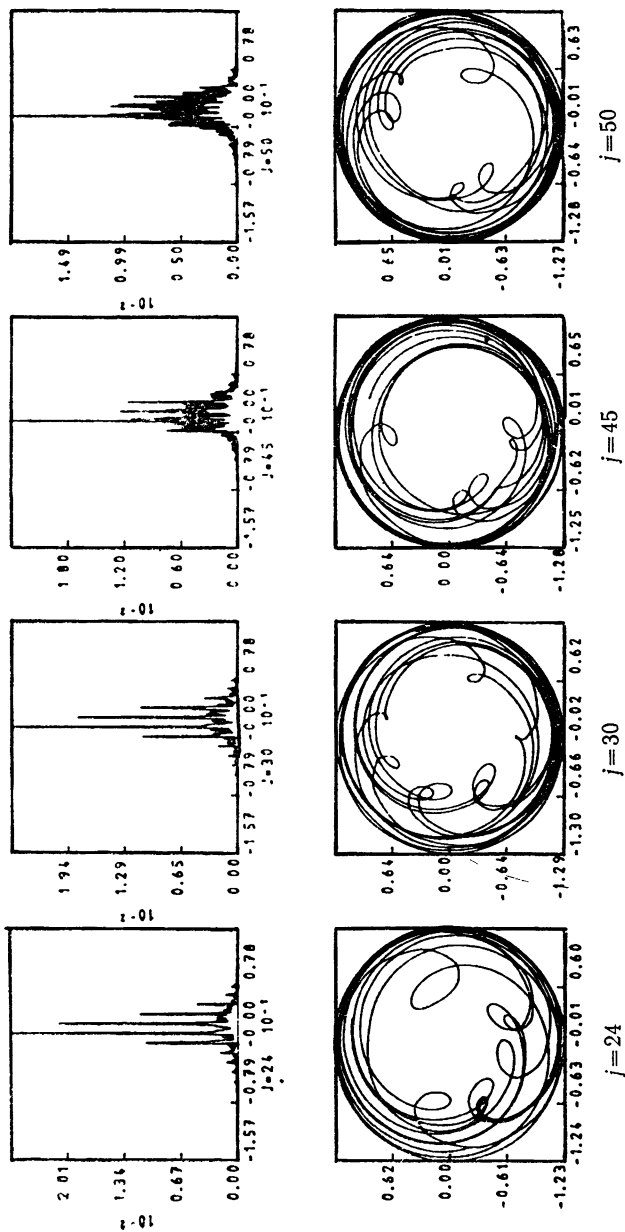


Рис. 4. Спектры мощности и проекции траектории $a_j(t)$ для $j = 1, 4, 12, 18, 24, 30, 45, 50$, $\omega_0=1$, $A_0=1$, $g=0,7$, $\beta=3$. Параметры выбраны таким образом, что $\varepsilon=0,01$. Режим синхронизации на частоте ω_0 устойчив до $j=3$. Двухчастотные биения типа 2 возникают при $j=4$. При $j=12$ рождаются трехчастотные биения, которые при $j=24$ разрушаются и переходят в хаотические колебания.

закономерности, наблюдаемые в непрерывных моделях, описываемых уравнениями с частными производными, а также в физических экспериментах с потоковыми системами: синхронизация цепочки внешними периодическими воздействиями, абсолютная и конвективная неустойчивость стационарных периодических режимов, развитие хаоса из регулярного воздействия благодаря иерархии пространственных неустойчивостей.

Неосвещенным остался вопрос о влиянии внешних шумов. Отметим, что если в цепочке возможна конвективная неустойчивость (выполнено условие (16)), то слабые широкополосные шумы, поданные в начало цепочки, будут нарастать примерно по экспоненте. Номер j_0 , определяющий величину области синхронизации, можно приблизительно оценить из выражения $d^2 \exp(rj_0) \sim 1$, где d^2 — интенсивность шума, а $r = |g/p| = |g/(2g(1+\beta^2)^{-1/2} + 1)|^*$. Однако, если пространственные бифуркации, приводящие к возникновению хаоса, происходят на интервале, значительно меньшем j_0 , то внешний шум слабо влияет на собственную динамику системы и, следовательно, справедливо детерминированное описание, развитое в настоящей работе.

Авторы выражают благодарность М. И. Рабиновичу за внимание и полезные замечания и А. Л. Шаровой за помощь при проведении численного эксперимента.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гапонов-Грехов А. В., Рабинович М. И., Старобинец И. М. — Письма в ЖЭТФ, 1984, 39, с. 561.
2. Афраймович В. С., Рабинович М. И., Сбитнев В. И. — Письма в ЖТФ, 1984, 6, с. 338.
3. Моросанов С. А., Смольский С. М. — Радиотехника и электроника, 1985, 12, с. 2395.
4. Арансон И. С., Гапонов-Грехов А. В., Рабинович М. И., Старобинец И. М. — ЖЭТФ, 1986, 90, с. 1707.
5. Воронов Э. И., Овечкин Ю. А. Основы проектирования усилительных и импульсных схем на транзисторах. — М. Машиностроение, 1973, с. 52.
6. Deissler R. I. — Phys. Lett., 1984, 100A, № 9, p. 451.

Институт прикладной физики
АН СССР

Поступила в редакцию
31 марта 1986 г.

DYNAMICS OF QUASIPERIODIC WAVE MOTIONS IN ONEDIRECTED CHAINS OF GENERATORS

I. S. Aranson, N. N. Verichev

The equation describing the oscillations in the chain of sequently connected transistor autogenerators is derived. The stability of periodical and quasiperiodical regimes has been investigated. The possibility of controlling of different regimes of the oscillations by the influence of external periodical signal is studied. It is revealed that the transition to chaos is realised through break-down of two and three dimensional quasiperiodical oscillations along the chain of generators.

* Для цепочки одномерных параболических отображений экспоненциальное усиление шума обнаружено в [6].