

УДК 621 072.621.373

**ДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ И ШУМЫ  
ВЗАИМНО СИНХРОНИЗОВАННЫХ ГЕНЕРАТОРОВ, СВЯЗАННЫХ  
ЧЕРЕЗ ЛИНЕЙНУЮ ЧАСТОТНО-ЗАВИСИМУЮ СИСТЕМУ.  
II. СЛУЧАЙ ДВУХ ГЕНЕРАТОРОВ, СВЯЗАННЫХ  
ЧЕРЕЗ РЕЗОНАНСНЫЙ КОНТУР**

*А. Н. Васильев, Г. П. Минина*

На основании общих соотношений, выведенных в первой части работы, проведено исследование взаимной синхронизации двух генераторов, связанных через резонансный контур. Получены области синхронизма, частотные и амплитудные характеристики, условия устойчивости синхронных режимов. Рассмотрены естественные флуктуации в системе синхронизованных генераторов при различных режимах работы. Показано, что пьедестал спектральной линии и спектры амплитудных и фазовых флуктуаций имеют сложную структуру, определяемую корнями характеристического уравнения устойчивости.

Взаимная синхронизация генераторов, связанных через резонансный контур, используется для сложения мощностей генераторов, стабилизации частоты, управления частотой ансамбля генераторов и в других целях. В первой части работы [1] в одночастотном приближении были получены общие соотношения, определяющие динамические и шумовые характеристики системы  $N$  генераторов, связанных линейной системой. В настоящей работе полученные соотношения применяются для рассмотрения взаимной синхронизации двух генераторов, связанных через резонансный контур, исследуются частотные и амплитудные характеристики, области синхронизма и шумовые характеристики системы. Такое комплексное исследование аналогичных систем в работах других авторов не проводилось [2].

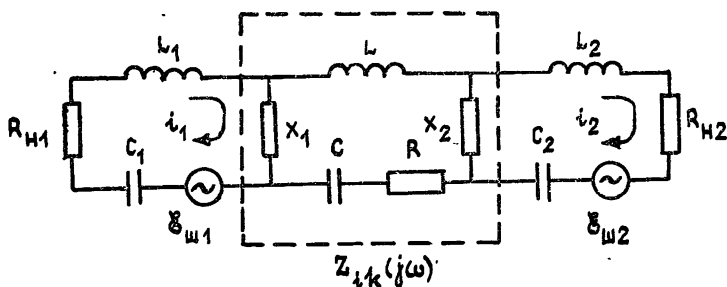


Рис. 1.

Исследуемая автоколебательная система является частным случаем системы со многими степенями свободы, описанной в [1]. Она представляет собой два томсоновских генератора (рис. 1), связанных между собой через резонансный четырехполюсник (изображен пунктиром), характеризуемый  $Z$ -параметрами  $Z_{ik}(j\omega)$ . На рис. 1 изображен пример конкретной реализации избирательного четырехполюсника в виде резонансного контура, связанного с генераторными контурами при помощи комплексных элементов связи  $X_1$  и  $X_2$ . Каждый генераторный

LCR-контур содержит нелинейный активный элемент  $R_{нк}$  и эквивалентный источник шума  $\mathcal{E}_{шк}$ . Воспользуемся общей теорией, изложенной в [1], и получим выражения для динамических характеристик системы. Для удобства введем безразмерные расстройки частот синхронного режима  $\omega$  и парциальных частот генераторов  $\nu_k$  относительно парциальной частоты резонансного контура  $\nu$  с добротностью  $Q$ :

$$x = \frac{\omega^2 - \nu^2}{\omega^2} Q, \quad x_1 = \frac{\nu_1^2 - \nu^2}{\omega^2} Q, \quad x_2 = \frac{\nu_2^2 - \nu^2}{\omega^2} Q. \quad (1)$$

Z-параметры резонансной связи между генераторами в этих переменных имеют вид

$$Z_{ik} = -j\omega L_i (k_{ik}^2 / (x + j)), \quad (2)$$

где  $L_i$  — индуктивность контура  $i$ -го генератора,  $k_{ik}^2$  — матрица комплексных коэффициентов связи. При  $k_{ii}^2 > 0$  связь  $i$ -го генератора с контуром реактивная, при  $k_{ii}^2 < 0$  — резистивная. Можно показать, что элементы  $k_{ik}^2$  не независимы:  $k_{11}^2 k_{22}^2 = k_{12}^2 k_{21}^2$ . Резонансный характер Z-параметров проявляется через частотно-зависимый знаменатель.

Рассмотрим случай изохронных генераторов. Пусть функции  $F_k$ , характеризующие нелинейность  $k$ -го генератора, аппроксимированы неполным кубическим полиномом

$$F_k = (\delta_{k0} + \delta_{k2} i_k^2) \frac{di_k}{dt}, \quad (3)$$

где  $i_k$  — ток в контуре  $k$ -го генератора; в  $\delta_{k0}$  включены потери в контуре  $k$ -го генератора. Из формул (6), (7) работы [1] получим уравнения амплитудных и частотных характеристик:

$$\frac{a'_1}{a_1^0} = \frac{\omega}{2|\delta_{10}|Q^2} \left\{ -\kappa_{11} \frac{1}{x^2 + 1} - \frac{a_2^0}{a_1^0} \kappa_{12} \frac{\cos \varphi + x \sin \varphi}{x^2 + 1} \right\}, \quad (4)$$

$$\frac{a'_2}{a_2^0} = \frac{\omega}{2|\delta_{20}|Q^2} \left\{ -\kappa_{22} \frac{1}{x^2 + 1} + \frac{a_1^0}{a_2^0} \kappa_{21} \frac{-\cos \varphi + x \sin \varphi}{x^2 + 1} \right\};$$

$$x_1 = x - \kappa_{11} \frac{x}{x^2 + 1} + \frac{a_2^0}{a_1^0} \kappa_{12} \frac{\sin \varphi - x \cos \varphi}{x^2 + 1}, \quad (5)$$

$$x_2 = x - \kappa_{22} \frac{x}{x^2 + 1} - \frac{a_1^0}{a_2^0} \kappa_{21} \frac{\sin \varphi + x \cos \varphi}{x^2 + 1},$$

где  $a_k^0$  — амплитуда стационарных колебаний свободного  $k$ -го генератора,  $a'_k$  — изменение амплитуды  $k$ -го генератора вследствие синхронного взаимодействия (считаем, что  $a'_k \ll a_k^0$  [1]),  $\kappa_{ik} = k_{ik}^2 Q^2$  — приведенные связи. В этом случае  $p_k = |\delta_{k0}|$ ,  $q_k = 0$ .

Многие особенности поведения автоколебательной системы можно выявить, исследуя ее амплитудные и частотные характеристики. Для данной системы более информативным является построение частотных поверхностей, которые дают возможность проследить зависимость частоты синхронных колебаний от большого числа параметров. Для двух генераторов удобно строить и исследовать поверхность  $x(x_1, x_2)$ , характеризующую изменение частоты синхронных автоколебаний при изменении парциальных частот генераторов.

Из уравнений системы (5) видно, что при фиксированной частоте  $x$  синхронные режимы возможны при парциальных частотах  $x_1$  и  $x_2$ ,

связанных уравнением эллипса. Положение точки на эллипсе определяет значение разности фаз колебаний генераторов  $\varphi$  (от нуля до  $360^\circ$ ).

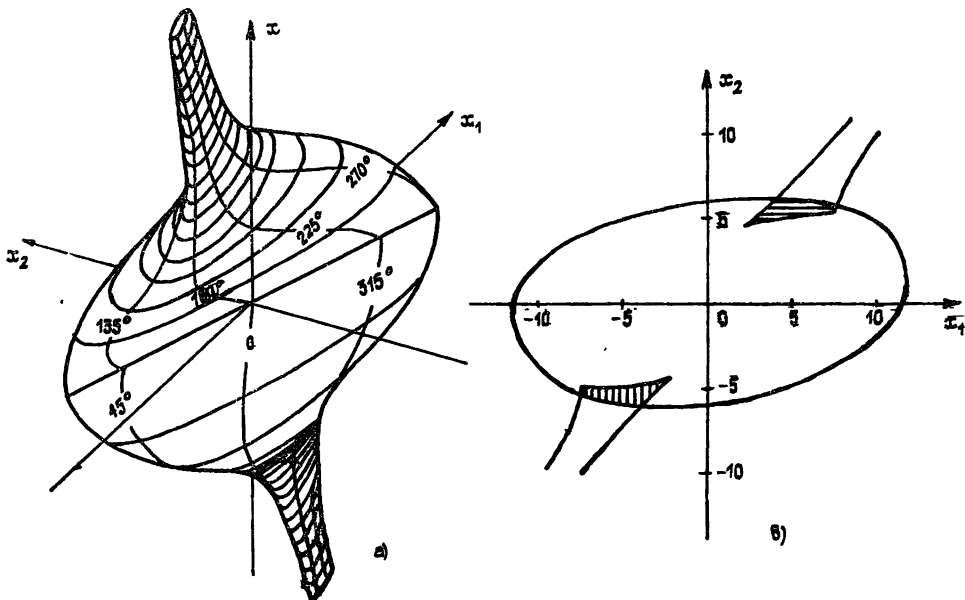


Рис. 2.

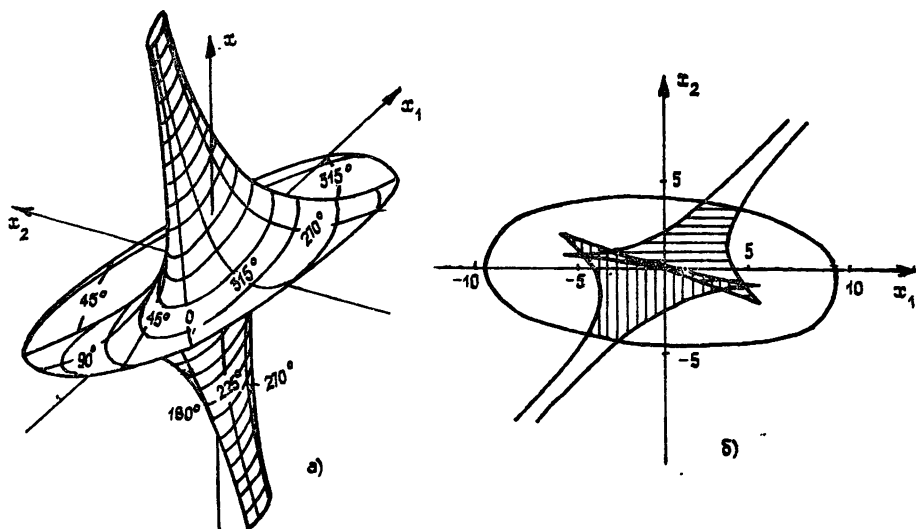


Рис. 3.

На рис. 2а и 3а изображены частотные поверхности для случаев резистивных (знак «минус» в приведенных связях) и реактивных (знак «плюс») связей между генераторами и контуром при параметрах  $|\delta_{10}|Q/\omega = |\delta_{20}|Q/\omega = 10$ ,  $\delta_{12}Q/\omega = \delta_{22}Q/\omega = 1$ ,  $\kappa_{11} = \pm 6$ ,  $\kappa_{12} = \pm 10$ ,  $\kappa_{22} = \pm 5$ ,  $\kappa_{21} = \pm 3$ . На поверхностях нанесены линии одинаковой разности фаз колебаний в генераторах ( $\varphi = \text{const}$ ). Проекция поверхности на плоскость  $x_1$  и  $x_2$  является областью расстройк, в которых возможны одночастотные синхронные режимы (рис. 2б, 3б). Сечение поверхности плоскостью  $x_i = \text{const}$  представляет собой частотную характеристику системы — зависимость частоты синхронного режима от парциальной частоты одного из генераторов при фиксированной парциальной частоте другого генератора. На рис. 4, 5 изображены частотные характеристики  $x = x(x_1, x_2 = \text{const})$ .

Естественно, далеко не все из этих режимов являются устойчивыми. Как было отмечено в [1], характеристическое уравнение для определения устойчивости совпадает с уравнением  $\det \hat{D}(\omega') = 0$ , где матрица  $\hat{D}(\omega')$  определена формулой (10) работы [1]. Можно показать, что это уравнение в рассматриваемом случае имеет пять нетривиальных корней. Условия неотрицательности мнимой части этих корней соответствуют пяти условиям устойчивости. Выражения для критериев устойчивости имеют сложный вид, и расчет устойчивости системы проводится на ЭВМ. Однако фазовый критерий устойчивости (свободный член характеристического полинома больше нуля) имеет простую геометрическую интерпретацию, и устойчивость по этому критерию может быть определена из вида частотной поверхности.

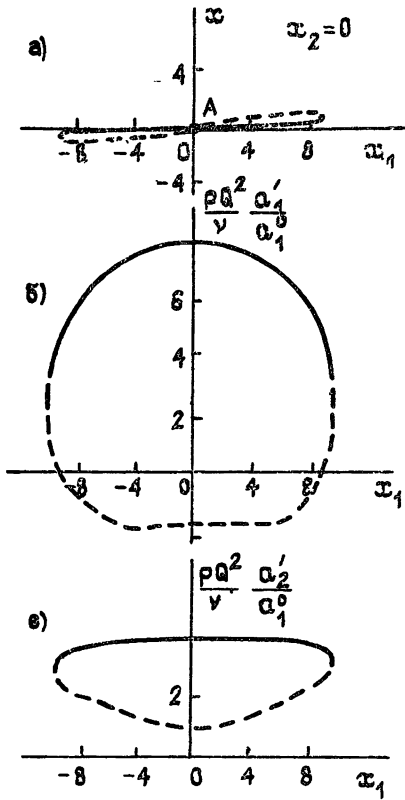


Рис. 4.

можно показать, что фазовый критерий устойчивости совпадает с условием положительности проекции на ось  $x$  положительной нормали к поверхности  $x(x_1, x_2)$ . Положительное направление координатной линии  $x$  (направление увеличения  $x$ ), положительное направление линии  $\varphi$  и направление положительной нормали к поверхности образуют правую систему осей. Учитывая, что с ростом  $\varphi$  точка на поверхности обходит эллипс против часовой стрелки при  $x > 0$  и по часовой при  $x < 0$ , положительное направление нормали определяет внешнюю нормаль в случае  $x > 0$  и внутреннюю нормаль в случае  $x < 0$ .

**Области синхронных режимов.** Области возможных расстройек, при которых существуют синхронные режимы, являются проекцией частотной поверхности на плоскость  $x_1$  и  $x_2$ . На рисунках показаны области синхронных режимов для резистивной (рис. 2б) и реактивной (рис. 3б) связей. Границы области обведены жирной линией. Так как устойчивые по фазовому критерию области частотной поверхности могут быть неоднозначны, то на плоскости  $x_1, x_2$  существуют области, где возможны несколько синхронных режимов — области неидентичной синхронизации [5]. На рисунках эти области заштрихованы. При выборе параметров системы синхронизации следует избегать попадания в области неидентичной синхронизации, так как это может привести к перескокам частоты автоколебаний системы синхронизованных генераторов. Области неоднозначности в системах генераторов при резистивных связях значительно меньше, чем при реактивных.

**Частотные и амплитудные характеристики.** Частотные характеристики приведены для случая резистивной связи на рис. 4а (при  $x_2=0$ ), для случая реактивной связи на рис. 5а (при  $x_2=0$ ) и на рис. 5г (при

$x_2=2$ ). Пунктиром обозначены неустойчивые участки кривых. На рисунках 4, 5 приведены также графики для относительного изменения амплитуд автоколебаний, обусловленного синхронным взаимодействием  $a'_k/a_k^0$  в зависимости от изменения парциальной частоты генератора  $x_1$  при фиксированных значениях  $x_2$ .

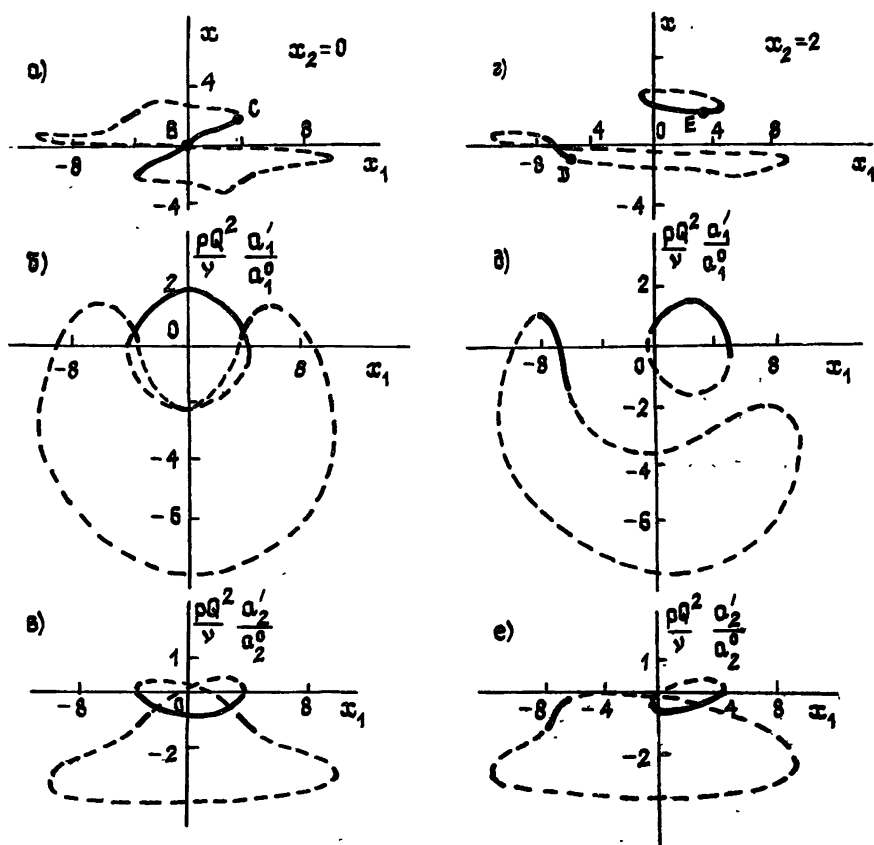


Рис. 5.

Рассмотрим случай резистивных связей (рис. 4). В случае, когда частота генерации входит в полосу пропускания контура связи ( $x \leq 1$ ) (на рис. 4 изображен случай  $x_2=0$ ), в системе может реализоваться режим стабилизации частоты, когда изменение частоты генератора  $x_1$  практически не влияет на частоту синхронных колебаний системы  $x$ . Устойчивая ветвь частотной характеристики однозначна.

В случае реактивных связей в области  $x \leq 1$  частотная характеристика может иметь несколько устойчивых по фазовому критерию ветвей, причем только одна соответствует режиму стабилизации. К сожалению, в расчетах с учетом всех критериев эта ветвь оказывалась неустойчивой (рис. 5а).

При синхронизации генераторов с дробно-кратным отношением частот результат получается противоположным — однозначные частотные зависимости наблюдаются при реактивных связях [3]. Гармоники, как известно, ортогональны колебаниям основного тона, что во многом эквивалентно фазовому сдвигу в связях на  $\pi/2$ . Такое различие в частотных кривых наблюдалось при затягивании частоты генератора на основном тоне и гармонике добротным контуром [4]. Аналогичные закономерности наблюдались другими авторами при исследовании синхронного взаимодействия колебаний в автоколебательной системе с двумя степенями свободы [5, 6].

При увеличении отстройки парциальной частоты одного из генераторов от парциальной частоты контура связи частотные характери-

ки из односвязных превращаются в двусвязные (рис. 5г). При дальнейшем увеличении отстройки частотные кривые имеют тот же вид вытянутых эллипсов, что и для двух генераторов, связанных комплексной связью [7]. Сечение, формирующее частотную кривую, проходит при этом только через один из «хвостов» частотной поверхности. Этот режим можно назвать режимом «управления», так как при изменении частоты одного из генераторов изменяется частота автоколебаний всей системы. В отличие от случая нерезонансно-связанных генераторов, где эффективность управления зависела от отношения мощностей генераторов (более мощный «навязывает» свою частоту), в случае резонансно-связанных генераторов важно отношение проходных мощностей генераторов, определяемых по формулам  $P_1^{np} = (a_1^0)^2 \kappa_{21}$ ,  $P_2^{np} = (a_2^0)^2 \kappa_{12}$ . Из рис. 5г видно, что частота генерации  $x$  слабо зависит от парциальной частоты  $x_1$  при параметрах, для которых строились кривые ( $P_1^{np} = 0,3P_2^{np}$ ). Амплитудные кривые в области стабилизации имеют тот же вид, что и при затягивании на основном тоне добротным контуром, а в области «управления» частотой совпадают со случаем взаимной синхронизации генераторов с комплексными связями: амплитуда генератора, обладающего большей проходной мощностью, уменьшается, амплитуда генератора с меньшей проходной мощностью увеличивается.

**Коэффициент стабилизации. Техническая ширина линии.** Важной практической задачей является стабилизация частоты ансамбля генераторов с помощью резонансного контура. Поэтому рассмотрим подробнее эффект стабилизации частоты в таких системах.

Назовем парциальными коэффициентами стабилизации по уходам частоты одного из генераторов при фиксированной парциальной частоте другого генератора величины  $S_1 = \left. \frac{\partial x}{\partial x_1} \right|_{x_2=\text{const}}$ ,  $S_2 = \left. \frac{\partial x}{\partial x_2} \right|_{x_1=\text{const}}$ . Так, парциальные коэффициенты стабилизации при  $x = x_1 = x_2 = 0$  равны

$$S_1 = 1 \mp \kappa_{11} + \kappa_{12} \left( \frac{1}{\kappa_{21}} \mp \frac{\kappa_{22}}{\kappa_{21}} \mp 2 \right), \quad S_2 = 1 \mp \kappa_{22} + \kappa_{21} \left( \frac{1}{\kappa_{12}} \mp \frac{\kappa_{11}}{\kappa_{12}} \mp 2 \right). \quad (6)$$

Верхний знак в этих выражениях — для случая реактивной связи, нижний — для резистивной. Коэффициент стабилизации для случая резистивных связей больше при тех же значениях параметров, чем для реактивной.

Уход частоты автоколебаний  $dx$ , обусловленный уходами частот обоих генераторов, будет равен

$$dx = \frac{\partial x}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial x}{\partial x_2} dx_2 = S_1^{-1} dx_1 + S_2^{-1} dx_2.$$

Медленные ухода частоты определяют техническую ширину линии

$$\sqrt{\langle (dx)^2 \rangle} = \sqrt{S_1^{-2} \langle (dx_1)^2 \rangle + S_2^{-2} \langle (dx_2)^2 \rangle}, \quad (7)$$

где  $\sqrt{\langle (dx_i)^2 \rangle}$  — техническая ширина линии свободного  $i$ -го генератора. Если ухода частоты генераторов одинаковы, то ширина линии определяется соотношением

$$\sqrt{\langle (dx)^2 \rangle} = \sqrt{\langle (dx_1)^2 \rangle} / S_{\text{эфф}}, \quad (8)$$

где

$$S_{\text{эфф}} = S_1 S_2 / \sqrt{S_1^2 + S_2^2}. \quad (9)$$

**Естественные флуктуации в системе генераторов.** Форма спектральной линии в многоконтурных системах существенно зависит от частоты генерации в системе, т. е. от того, в какой точке частотной характеристики находится система. Формулы, полученные в [1], позво-

ляют исследовать форму пьедестала спектральной линии синхронизованных генераторов, а также амплитудные и фазовые флуктуации при различных режимах синхронизации и, соответственно, различных синхронных частотах (рис. 6, 7).

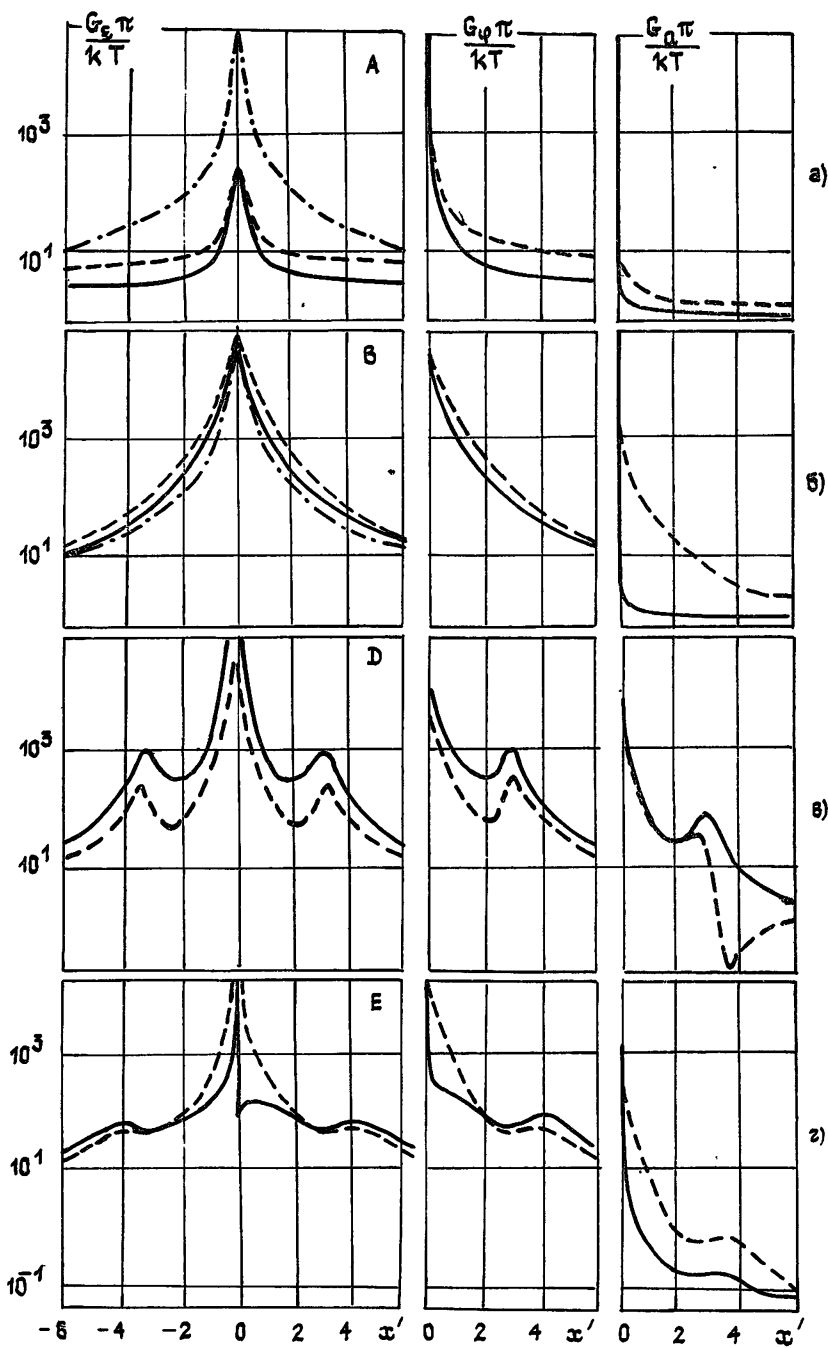


Рис. 6.

Детерминант матрицы  $\hat{D}(\omega')$  в формуле (16) работы [1], определяющей форму спектральной линии, непосредственно связан с характеристическим уравнением устойчивости, поэтому при подходе к границе устойчивости флуктуации в системе резко возрастают. Поскольку  $\det \hat{D}(\omega')$  является в рассматриваемом случае алгебраической функ-

цией, выражение для спектральной линии можно разложить на сумму лоренцианов, положение и ширина которых определяются действительной и мнимой частью корней характеристического уравнения устойчивости. Пять условий устойчивости соответствуют пяти нетривиальным корням уравнения  $\det \hat{D}(\omega') = 0$ . Можно показать, что действительные части этих корней либо равны  $\omega$ , либо попарно расположены на одинаковом расстоянии от  $\omega$ . Возможны три различных случая: 1) все лоренцианы центрированы около частоты синхронной генерации  $\omega$ , 2) пара лоренцианов расположена симметрично относительно частоты генерации, 3) две пары лоренцианов расположены симметрично по бокам основной линии. Кроме нетривиальных корней характеристическое уравнение имеет тривиальный корень  $\omega' = \omega$ , связанный с произволом выбора фазы одного из генераторов. Это приводит к возможности диффузии фазы и, тем самым, к формированию центрального пика лоренцевой формы [8].

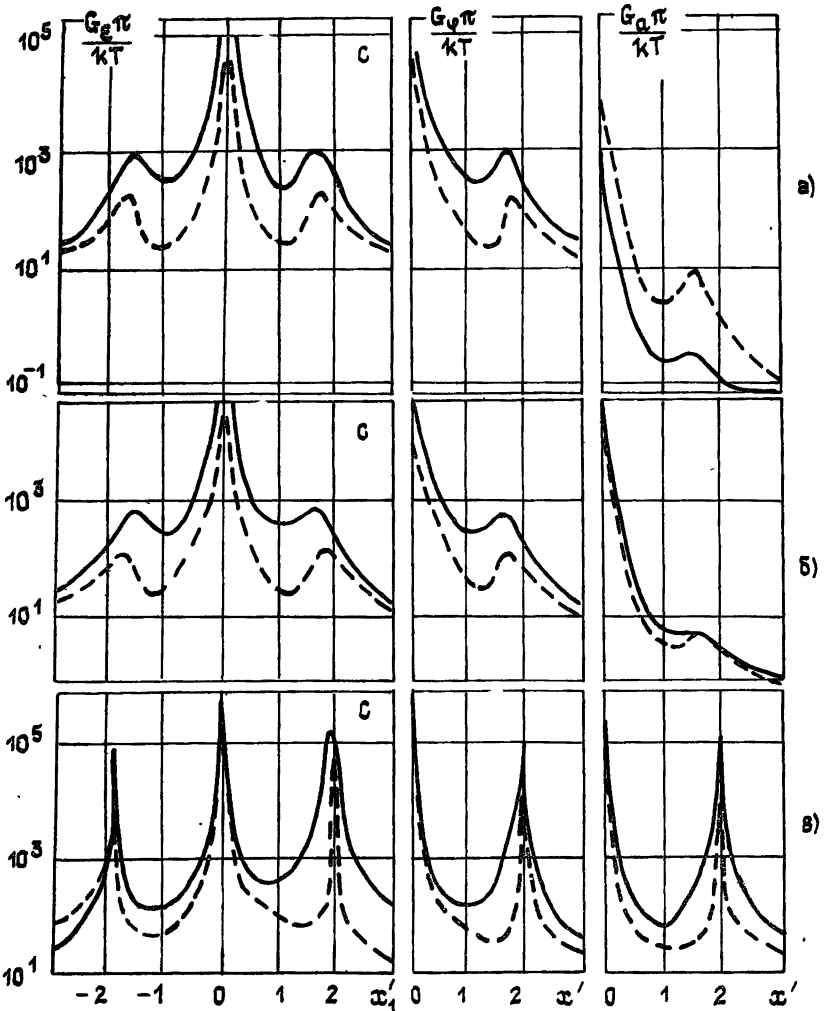


Рис. 7.

На рис. 6, 7 приведены спектральные плотности флуктуаций мощности  $G_e$  в зависимости от частоты анализа  $x+x'$ , спектры амплитудных  $G_a$  и фазовых  $G_\varphi$  флуктуаций для различных режимов генерации, выделенных точками *A* на рис. 4а, *B*, *C* на рис. 5а, *D*, *E* на рис. 5б. На рисунках изображен случай синхронизации одинаковых генераторных контуров и контура связи



$Q_h/Q = 0,3$ . Остальные параметры такие же, как и на рис. 4, 5. На рисунках сплошными линиями обозначены спектры первого генератора системы, пунктирными линиями — спектры второго генератора. Штрихпунктирной линией на рис. 6а, б изображена спектральная плотность флуктуаций мощности свободного генератора при тех же параметрах генераторного контура.

Анализ полученных результатов позволяет сделать несколько выводов.

В случае резистивных связей (рис. 6а) шумы, как правило, меньше, чем в случае реактивных связей (рис. 6б). Это связано с большим запасом по устойчивости в системе. При этом все корни характеристического уравнения имеют действительные части, равные  $\omega$ , поэтому крылья спектральной линии монотонно спадают. При резистивных связях естественные флуктуации мощности в синхронизованной системе меньше, чем у свободного генератора, при реактивных связях картина может быть обратной.

В случае реактивных связей форма пьедестала может быть сложной за счет появления добавочных пиков в пьедестале (рис. 6в, г, 7). Уменьшение прочности предельного цикла приводит к асимметрии спектральной линии (рис. 7 — а)  $pQ/\nu=50$ , б)  $pQ/\nu=10$ , в)  $pQ/\nu=1,05$ ). Этот эффект связан с изменением соотношения между амплитудными и фазовыми флуктуациями: с уменьшением прочности предельного цикла доля амплитудных флуктуаций растет и корреляция между амплитудными и фазовыми флуктуациями приводит к асимметрии. Заметим, что, как правило, вклад амплитудных флуктуаций в спектральную плотность мощности оказывается меньше, чем вклад фазовых флуктуаций. Однако в случае, изображенном на рис. 7в, при подходе к границе устойчивости путем уменьшения прочности предельного цикла амплитудные и фазовые флуктуации в боковых пиках на частотах, близких к неустойчивым корням уравнения устойчивости, резко возрастают и становятся сравнимыми по величине. В многоконтурных системах возможно также уменьшение флуктуаций амплитуды в некоторой области частот за счет «отсоса» энергии в контур (рис. 6в).

На рис. 6г приведена спектральная линия, соответствующая точке  $E$  на частотной кривой рис. 5г. Эта точка интересна тем, что парциальный коэффициент стабилизации  $S_1$  обращается в бесконечность (заметим, что эффективный коэффициент стабилизации по уходом частот обоих генераторов (9) остается конечной величиной). Центральный пик спектральной линии первого генератора при этом резко сужается и становится асимметричным. Это связано, в частности, с тем, что при любом направлении ухода  $dx_1$  частота генерации увеличивается. Стабильность частоты синхронного режима при этом полностью определяется вторым генератором. Форма линии второго генератора в этом случае не имеет никаких особенностей. Реализация работы генератора в таких режимах может иметь важное техническое применение: если второй генератор системы высокостабильный, то указанный эффект приводит к малым уходом частоты генерации синхронных режимов и резкому сужению линии первого генератора. Заметим, что это явление не связано с частотно-избирательными свойствами промежуточного контура, так как на таких частотах отстройки контур связи теряет свои резонансные свойства и вырождается в комплексную связь.

Приведенный выше краткий анализ поведения динамических и шумовых характеристик конкретного примера системы взаимно связанных генераторов показывает плодотворность предложенного в [1] подхода к исследованию таких систем. Здесь были только намечены характерные явления, возникающие в системе взаимно синхронизуемых генераторов, подробное исследование требует детального анализа конкретных систем. Преимуществом предложенного метода является возможность рассматривать генераторы с произвольной зависимостью связей от частоты, в том числе и при подстановке экспериментально измеренных зависимостей  $Z$ -параметров связи от частоты, В частности, такого рода

расчеты могут быть полезными и при исследовании паразитных резонансов в распределенных связях.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Васильев А. Н., Минина Г. П. // Радиофизика. 1988. Т. 31. № 11. С. 1388. (Изв. высш. учеб. заведений).
2. Дворников А. А., Уткин Г. М. Фазированные автогенераторы радиопередающих устройств. — М.: Энергия, 1980. — 176 с.
3. Минакова И. И., Минина Г. П. // Труды IX Международной конференции по нелинейным колебаниям. — Киев Наукова думка, 1978. Т. 3. С. 436.
4. Минакова И. И., Минина Г. П., Сильнов Б. А. // Вестник МГУ. 1983 Т. 24. Сер. 3. № 6. С. 97.
5. Клибанова И. М. // Радиофизика. 1973. Т. 16. № 11. С. 1707 (Изв. высш. учеб. заведений).
6. Клибанова И. М., Малахов А. Н., Мальцев А. А. Флуктуации в сложных автоколебательных системах: Учебное пособие. — Горький: Гос. ун-т. 1984. — 90 с.
7. Гершензон Е. М., Левитес А. А. // Радиотехника и электроника. 1972. Т. 17. № 9. С. 1861.
8. Малахов А. Н. Флуктуации в автоколебательных системах. — М.: Наука, 1968. — 660 с.

Московский институт радиотехники,  
электроники и автоматики

Поступила в редакцию  
10 июня 1986 г.,  
после переработки  
26 января 1988 г.

#### DYNAMIC CHARACTERISTICS AND NOISE OF SYNCHRONIZED OSCILLATORS COUPLED BY LINEAR FREQUENCY DEPENDENT SYSTEM. II. THE CASE OF TWO OSCILLATORS COUPLED BY A RESONANT CIRCUIT

*A. N. Vasil'ev, (G. P. Minina)*

Synchronization in a system of two oscillators coupled by resonant circuit is considered. Dynamic and noise characteristics are derived from general equations given in Part I of the article. The influence of resonant properties of linear system on the characteristics of synchronous regime is discussed.

---