ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXXI, № 12 *РАДИОФИЗИКА* *1988*

УДК 550.388

ВЫЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ГРИНА УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА МЕТОДОМ ПЯТОГО ПАРАМЕТРА

Ю. Г. Павленко, Ю. А. Афиногенов, Р. Гонзалес Фелипе

Показано, что метод пятого параметра, разработанный Фоком в квантовой теории поля, является эффективным при интегрировании волновых уравнений с переменными коэффициентами. Рассмотрено два способа решения уравнения Гельмгольца для полной функции Грина.

В теории распространения волн используются в основном приближенные методы интегрирования. Причина этого в том, что точные решения, представленные в виде рядов, непригодны для численных расчетов. В настоящее время известны несколько асимптотических методов решения волновых уравнений: методы геометрической оптики [1–3], плавных возмущений [4], параболического уравнения [1,4,5], коротковолновых асимптотик [3,6,7]. В последнее время с успехом применялись методы, развитые в квантовой теории поля [8,9] и вариационные принципы [10,11].

Наиболее общий подход к решению уравнения Гельмгольца связан с определением функции Грина (ФГ). Причина этого в том, что ФГ определяет структуру общего решения для произвольного источника излучения. В настоящее время основным методом получения ФГ волнового уравнения для трехмерно-неоднородной среды является теория возмущений. Однако в квантовой теории поля известен непертурбативный подход к отысканию ФГ, основанный на методе пятого параметра, разработанном в 1937 г. Фоком [12]. В дальнейшем этот подход был развит Швингером и получил широкое рапространение в полевых теориях [13,14]. Существенным достоинством метода является единый подход к расчету наблюдаемых величин и относительная простота вычислений.

В настоящей работе показано, что уже первое приближение в наиболее простом варианте, предложенном Фоком, совпадает с решением уравнения Дайсона для полной ФГ [8]. Более того, начальное приближение полностью определяет дифракционный характер распространения волны конечной апертуры. В отличие от параболического приближения этот метод позволяет учесть волну, рассеянную неоднородностью в произвольном направлении. В частности, получено новое решение проблемы оптического изображения [15], непосредственно связывающее пространства предмета и изображения. Развит новый подход к вычислению ФГ (диффузионное приближение), аналогичный методу плавных возмущений (МПВ) для решения уравнения Гельмгольца. Однако в отличие от этого метода ФГ позволяет учесть волновую природу распространения ограниченных в пространстве пучков. Метод пятого параметра открывает широкие возможности интегрирования систем линейных уравнений с переменными коэффициентами. Особый интерес представляет применение метода к решению уравнений Максвелла в трехмерной неоднородной и гиротропной среде.

1. Параметрическое представление ФГ. Рассмотрим следующую постановку задачи о распространении в неоднородной среде скалярного поля, удовлетворяющего уравнению

$$\partial_{\alpha\alpha}E + k^2\varepsilon(x)E = 0, \tag{1}$$

Пусть вне ограниченной области, в которой $\varepsilon(\boldsymbol{x}) \neq 1$, находится источник, создающий поле $E_0(\boldsymbol{x})$. Требуется найти решение (1), которое в асимптотике отличается от $E_0(\boldsymbol{x})$ наличием сферической волны, исходящей из области $\varepsilon(\boldsymbol{x}) \neq 1$. Решение этой задачи имеет вид

$$E(\boldsymbol{x}) = E_0(\boldsymbol{x}) + \int d^3 x'\, G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}')\, k^2 \sigma(\boldsymbol{x}')\, E_0(\boldsymbol{x}'), \tag{2}$$

где $\sigma(\boldsymbol{x}) = \varepsilon(\boldsymbol{x}) - 1$, $G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}')$ — полная ФГ, удовлетворяющая уравнению

$$\Lambda G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = -\delta^{(3)}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'), \quad \Lambda = \partial_{\alpha\alpha} + k^2\varepsilon(\boldsymbol{x}). \tag{3}$$

Приведем ниже несколько вариантов отыскания решения (3), основанных на методе пятого параметра. С этой целью запишем обратный к Λ оператор в виде интеграла по параметру τ [12]:

$$\Lambda^{-1} = -\frac{i}{2}\int_0^\infty d\tau \exp\left[i\frac{\tau}{2}(\Lambda + i0)\right]. \tag{4}$$

Учитывая параметрическую форму Λ^{-1}, получим из (3)

$$G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = \frac{i}{2}\int_0^\infty d\tau U(\tau, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}'),$$

$$U(\tau, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = \exp\left[i\frac{\tau}{2}(\Lambda + i0)\right]\delta^{(3)}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'). \tag{5}$$

Функция $U(\tau, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}')$ удовлетворяет уравнению типа Шредингера

$$i\partial_\tau U = -\frac{1}{2}\Lambda U \tag{6}$$

с начальным условием $U(0, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = \delta^{(3)}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')$. В отличие от параболического уравнения (6) описывает «диффузию» функции распространения по всем направлениям. ФГ свободного пространства

$$G_0(\xi) = \frac{1}{4\pi|\xi|}\exp(ik|\xi|), \quad \xi = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}',$$

может быть представлена в виде (5):

$$G_0(\xi) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3}\frac{e^{ip\xi}}{p^2 - k^2 - i0} = \frac{i}{2}\int_0^\infty d\tau U_0(\tau, \xi),$$

$$U_0(\tau, \xi) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3}\exp\left[ip\xi + i\frac{\tau}{2}(k^2 - p^2 + i0)\right] = \exp\left(ik^2\frac{\tau}{2}\right) g\left(\xi, \frac{\tau}{2}\right), \tag{7}$$

$$g(a, c) = (4\pi i c)^{-3/2}\exp(ia^2/4c).$$

2. Метод Фока. Решение уравнения (6) будем искать в виде

$$U(\tau, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = U_0(\tau, \xi)\exp[i\varphi(\tau, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}')], \tag{8}$$

где $\varphi(\tau, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}')$ — функция, подлежащая определению, причем $\varphi(0, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = 0$. Подставляя (8) в (6), получим уравнение для функции $\varphi(\tau, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}')$:

$$\partial_\tau \varphi + \frac{1}{\tau}\xi_\alpha \partial_\alpha \varphi - \frac{i}{2}\partial_{\alpha\alpha}\varphi + \frac{1}{2}(\partial_\alpha\varphi)^2 - \frac{k^2}{2}\sigma(\boldsymbol{x}) = 0. \tag{9}$$

В работе Фока [12] предложен метод решения уравнения типа (9) в виде ряда по степеням τ:

$$\varphi(\tau, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = \sum_{n=1}^{\infty} i^{n-1} \tau^n \varphi_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}'). \tag{10}$$

Подстановка (10) в (9) приводит к рекуррентным уравнениям

$$n\varphi_n + \xi_\alpha \partial_\alpha \varphi_n = f_n(\boldsymbol{x}), \quad f_1 = \frac{k^2}{2}\sigma(\boldsymbol{x}), \quad f_2 = \frac{1}{2}\partial_{\alpha\alpha}\varphi_1, \ldots \tag{11}$$

Учитывая тождество $\chi_n(\boldsymbol{x}) = \int\limits_0^1 ds \frac{d}{ds}[\chi_n(\boldsymbol{r}) s^n]$, $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{x}' + \boldsymbol{\xi} s$, находим решение (11):

$$\varphi_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = \int\limits_0^1 ds\, s^{n-1} f_n(\boldsymbol{r}),$$

следовательно,

$$\varphi_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = \frac{k^2}{2}\int\limits_0^1 ds \sigma(\boldsymbol{r}), \quad \varphi_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = \frac{k^2}{4}\int\limits_0^1 ds\, s(1-s)\frac{\partial^2 \sigma(\boldsymbol{r})}{\partial r_\alpha^2}. \tag{12}$$

Заметим, что решение (10) удовлетворяет условию взаимности $\varphi_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = \varphi_n(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{x})$, которому подчиняется ФГ. Подставляя (12), (8) в (5), получим решение для ФГ в виде

$$G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = \frac{i}{2}\int\limits_0^\infty d\tau U_0(\tau, \boldsymbol{\xi}) \exp\left[i\frac{k^2}{2}\tau\int\limits_0^1 ds\sigma(\boldsymbol{r}) - \frac{k^2}{4}\tau^2\int\limits_0^1 ds\; s(1-s)\frac{\partial^2 \sigma(\boldsymbol{r})}{\partial r_\alpha^2}\right]. \tag{13}$$

Из (13) находим, что уже в первом приближении фурье-образ ФГ

$$G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{e^{ip\xi}}{p^2 - k_1^2 - i0} = \frac{e^{ik_1|\xi|}}{4\pi|\xi|}, \quad k_1 = k\sqrt{1 + \int\limits_0^1 ds\sigma(\boldsymbol{x}' + \boldsymbol{\xi} s)}$$

содержит полюс $p = k_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}')$, соответствующий учету эффектов многократного рассеяния [4, 8]. Аналогичный результат можно получить суммированием борновского ряда с использованием приближения Глаубера [16] для ФГ свободного пространства [17].

Можно добиться существенного упрощения ФГ (13), учитывая наличие выделенного направления — прямую, соединяющую источник и точку наблюдения. Пусть $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор, параллельный этой прямой. Введем обозначения $\xi_3 = \boldsymbol{n}\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\xi}_\perp = \boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{n}\xi_3$, $\boldsymbol{x}'_\perp = \boldsymbol{x}' - \boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}\boldsymbol{x}')$ и сделаем замену переменных $z'' = \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}' + \boldsymbol{\xi} s)$. Тогда $\boldsymbol{x}' + \boldsymbol{\xi} s = \boldsymbol{x}'_\perp + \boldsymbol{\xi}_\perp \times \frac{z'' - \boldsymbol{n}\boldsymbol{x}'}{\boldsymbol{n}\boldsymbol{\xi}} + \boldsymbol{n} z'' = \boldsymbol{r}'$. Поскольку основной вклад в интеграл (2) дает область $|\boldsymbol{\xi}_\perp| \ll |\boldsymbol{n}\boldsymbol{\xi}|$, то ФГ (13) можно представить в виде

$$G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') \simeq \frac{i}{2k} g^{(2)}\left(\boldsymbol{\xi}_\perp, \frac{|\xi_3|}{2k}\right)\exp[ik|\xi_3| + i\delta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}')]; \tag{14}$$

$$\delta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = \frac{k}{2}\int\limits_{\boldsymbol{n}\boldsymbol{x}'}^{\boldsymbol{n}\boldsymbol{x}} dz''\left[\frac{|\xi_3|}{\xi_3} + \frac{i}{2k}\frac{(\boldsymbol{n}\boldsymbol{x} - z'')(z'' - \boldsymbol{n}\boldsymbol{x}')}{\xi_3}\Delta_\perp\right]\sigma(\boldsymbol{r}'); \tag{15}$$

$$g^{(2)}(a, c) = \frac{1}{4\pi i c}\exp\left(i\frac{a^2}{4c}\right). \tag{16}$$

Наличие второго слагаемого в $\delta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}')$ дает вклад в функцию ослабления амплитуды волны.

3. Формирование изображения параксиальным пучком. Поместим начало координат на границе рассеивающего объема, который занимает область $0 \leqslant z \leqslant L$. Зададим диэлектрическую проницаемость в виде $\varepsilon(\boldsymbol{x}) = 1 - \gamma^2(x^2+y^2)$ и сферический источник излучения в точке $(x_{0n}, -R)$, причем $|x_{0n}|$, $L \ll R$ и $\gamma L \ll 1$. Для определения поля в точках с координатами $(x_n, z>0)$ при условии $|x_n| \ll z$ функции $E_0(\boldsymbol{x}')$ и $G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')$ в интеграле (2) можно представить в виде

$$E_0(\boldsymbol{x}') = \frac{a_0}{R}\exp\left[ikR + i\frac{k}{2R}(x_n' - x_{0n})^2\right]\exp(ikz'),$$
$$G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = \frac{i}{2k}g^{(2)}\left(\xi_\perp, \frac{\xi_3}{2k}\right)\exp\left[ik\xi_3 + i\delta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}')\right]. \tag{17}$$

Интегрируя (2) по частям [18], получим

$$E(\boldsymbol{x}) = E_0(\boldsymbol{x})\int d^2x_n'\, g^{(2)}\left(x_n' - \frac{Rx_n + x_{0n}z}{R+z}, \frac{Rz}{2k(R+z)}\right)\exp[i\delta(x_n')], \tag{18}$$

где

$$\delta(x_n') = \frac{k}{2}\int_0^L dz''\left[1 + i\frac{z''(z-z'')}{2kz}\frac{\partial^2}{\partial x_n'^2}\right]\sigma(x_n', z'').$$

Полагая в (18) $x_{0n} = 0$, получим

$$E(\boldsymbol{x}) = E_0(\boldsymbol{x})\left[\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{z}\right)\Big/\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{z} - \gamma^2 L\right)\right]\times$$
$$\times\exp\left[-\frac{ikx_n^2}{2(R+z)}\frac{R\gamma^2 L}{z\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{z}-\gamma^2 L\right)}\right].$$

Очевидно, что квадратичная среда действует как линза с фокусным расстоянием $f = (\gamma^2 L)^{-1}$. Заметим, что для произвольных значений γL интегрирование уравнений Максвелла приводит к выражению $f = \gamma^{-1}\operatorname{ctg}\gamma L$ [15]. В точке с координатой $z = (1/f - 1/R)^{-1}$ напряженность поля имеет максимум — дельта-образную особенность, связанную с использованием параболического приближения (17). Если источник находится в фокусе, т. е. $R = f$, то поле в области $z > L$ представляет плоскую волну. Таким образом, формула (18) может быть положена в основу дифракционной теории изображения источника в оптически-неоднородных средах. В отличие от существующей теории оптического изображения [15], здесь не возникает необходимости переноса пространства предмета на входную апертуру и переноса поля с выходной апертуры в пространство изображения. Особый интерес представляет применение формулы (18) для решения обратной задачи определения свойств среды методами цифровой томографии [19].

Заметим, что если эффективная область интегрирования удовлетворяет условию $\xi_3 \ll k\rho^2$ (ρ — поперечные размеры неоднородностей), то

$$g^{(2)}\left(\xi_\perp, \frac{|\xi_3|}{2k}\right) \simeq \delta^{(2)}(\xi_\perp),$$

В этом случае (14) совпадает с ФГ одномерного уравнения Гельмгольца.

4. Диффузионное приближение. Предположим, что выполнены условия, соответствующие применению метода плавных возмущений [4,8]. Тогда решение (6) можно искать в виде (8), представляя функцию $\varphi(\tau, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}')$ в виде ряда по степеням σ:

$$\varphi(\tau, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = \sum_{n=1}^{\infty} W_n(\tau, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}'),$$

где $W_n \sim \sigma^n$. Подставляя это выражение в (9) получим систему уравнений

$$\partial_\tau W_n + \frac{1}{\tau}\xi_\alpha \partial_\alpha W_n - \frac{i}{2}\partial_{\alpha\alpha} W_n = R_n(\boldsymbol{x}),$$

$$R_1(\boldsymbol{x}) = \frac{k^2}{2}\sigma(\boldsymbol{x}), \quad R_2(\boldsymbol{x}) = -\frac{1}{2}(\partial_\alpha W_1)^2, \ldots \tag{19}$$

Уравнение (19) приводится к уравнению диффузии, решение которого имеет вид

$$W_n(\tau, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = \int d^3 x''\, \tilde{g}(\tau, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}', \boldsymbol{x}'')\, R_n(\boldsymbol{x}''); \tag{20}$$

$$\tilde{g}(\tau, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}', \boldsymbol{x}'') = \tau \int_0^1 ds g\left[\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}'' + \xi s,\ \frac{\tau}{2}s(1-s)\right]. \tag{21}$$

Заметим, что основной вклад в интеграл (20) дает область $\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}'' + \xi s = 0$. Если функцию $g(\boldsymbol{a}, c)$ в интеграле (21) представить в виде

$$g(\boldsymbol{a}, c) = \delta^{(3)}(\boldsymbol{a}) + ic\frac{\partial^2 \delta^{(3)}(\boldsymbol{a})}{\partial a_\alpha \partial a_\alpha} + \ldots,$$

то в первом приближении $W_1(\tau, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = \tau\varphi_1 + i\tau^2\varphi_2 + \ldots$ соответствует решению (10). Для того, чтобы учесть вклад дифракционных эффектов в приближении Гюйгенса—Френеля, достаточно использовать приближение

$$g\left[\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}_3'' + \xi s, \frac{\tau}{2}s(1-s)\right] = \delta(x_3' - x_3'' + \xi_3 s) g^{(2)}\left[\boldsymbol{x}_\perp' - \boldsymbol{x}_\perp'' + \xi_\perp s, \ \frac{\tau}{2}s(1-s)\right],$$

где x_3', x_3'', ξ_3 — компоненты векторов $\boldsymbol{x}', \boldsymbol{x}'', \xi$, параллельные вектору $\boldsymbol{n}$. В этом случае ФГ в низшем приближении по $\sigma(\boldsymbol{x})$ определяется формулой (14), в которой следует заменить $\delta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}')$ выражением

$$\delta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = \frac{k|\xi_3|}{2\xi_3}\int_{nx'}^{nx} d^3x''\sigma(\boldsymbol{x}'')g^{(2)}\left[\boldsymbol{x}_\perp' - \boldsymbol{x}_\perp'' + \xi_\perp\frac{x_3'' - x_3'}{\xi_3}, \frac{(x_3'' - x_3')(x_3 - x_3'')}{2k|\xi_3|}\right]. \tag{22}$$

Полученная таким образом ФГ позволяет найти решение в рамках применимости МПВ. Однако в отличие от МПВ решение представляет суперпозицию падающей и рассеянной волн. В качестве примера рассмотрим распространение плоской волны $E_0(\boldsymbol{x}) = e^{ikz}$. Заменяя в (14) $\delta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}')$ выражением (22), получим решение (2) в виде

$$E(\boldsymbol{x}) = e^{ikz}\exp\left[\frac{ik}{2}\int_{-\infty}^{z} d^3\boldsymbol{x}''\sigma(\boldsymbol{x}'')g^{(2)}\left((\boldsymbol{x}_\perp - \boldsymbol{x}_\perp'', \ \frac{z - z''}{2k}\right)\right] +$$

$$+e^{-ikz}\int\limits_z^{\infty} dz'\sigma(x_\perp, z')\exp\left[2ikz'+\frac{ik}{2}\int\limits_z^{z'} d^3x''\,\sigma(x'')\times\right.$$

$$\left.\times g^{(2)}\left(x_\perp - x''_\perp,\ \frac{(z''-z')(z-z'')}{2k(z'-z)}\right)\right].$$

Условию $z\to\infty$ соответствует волна, прошедшая через неоднородность, а при $z\to-\infty$ получим волну, отраженную от неоднородности.

Рассмотренные способы определения полной ФГ показывают, что метод пятого параметра является эффективным подходом к интегрированию уравнений в частных производных с переменными коэффициентами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фейнберг Е Л. Распространение радиоволн вдоль земной поверхности. — М.: Наука, 1961. С. 546.
2. Кравцов Ю. А., Орлов Ю. И. Геометрическая оптика неоднородных сред. — М.: Наука, 1980. С. 304.
3. Фелсен Л., Маркувиц Н. Излучение и рассеяние волн. — М.: Мир, 1978. Т. 1. С. 547.
4. Рытов С. М., Кравцов Ю А., Татарский В. И. Введение в статистическую радиофизику. — М.: Наука, 1978. Ч. II. С. 463.
5. Фок В. А. Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн. — М.: Сов. радио, 1970. С. 155.
6. Бабич В. М., Булдырев В. С. Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. — М: Наука, 1972. С. 456.
7. Маслов В. П., Федорюк М. В. Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики. — М: Наука, 1976. С. 296.
8. Татарский В. И. Распространение волн в турбулентной атмосфере. — М.: Наука, 1967. С. 548.
9. Барабаненков Ю. Н // УФН. 1975. Т. 117. С. 49
10. Швингер Ю. Неоднородности в волноводах. Зарубежная электроника № 3. — М.. Сов. радио, 1970. С. 97.
11. Ваганов Р. Б., Каценеленбаум Б. З. Основы теории дифракции. — М.: Наука, 1982. С. 272.
12. Фок В. А. Работы по квантовой теории поля. — Л.: Гос. ун-т, 1957. С. 141.
13. Швингер Ю. Новейшее развитие квантовой электродинамики. — М.: ИЛ, 1954. С. 254.
14. Биррел Н., Девис П. Квантованные поля в искривленном пространстве. — М.: Мир, 1984. С. 80.
15. Маркузе Д. Оптические волноводы — М.: Мир, 1974 С. 367.
16. Глаубер Р. // УФН. 1971. Т. 103. Вып. 4. С. 641.
17. Анидо Г., Миллер Д. // Физика за рубежом Серия Б 1986. С. 101.
18. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. — М.. Наука, 1974. С. 613.
19. Хермен Г. Восстановление изображений по проекциям. Основы цифровой томографии. — М.: Мир, 1983. С. 349.

Московский государственный университет

Поступила в редакцию 11 марта 1987 г.,

CALCULATION OF GREEN FUNCTION OF THE WAVE EQUATION HELMHOLTZ BY METHOD OF THE FIFTH PARAMETER

Yu. G. Pavlenko, Yu. A. Afinogenov, R. Gonzales Felipe

The method of the fifth parameter developed by V. A. Fock for the quantum field theory is shown to be effective for integration of wave equations with variable coefficients. Two methods of finding the Green function for the Helmholtz wave equation are applied.